Použitie lineárnej kombinácie v úlohách analytickej geometrie

Martin Billich

ABSTRACT: *In the present paper possibility of using bunch of lines and circles to solve some problems of analytic geometry are discussed. We describe some facts from the plane theory about linear combination of equations for lines and circles.There are shown four solved examples of this part of analytic geometry. Further three problems are formulated.*

1. Úvod

Na úvod si pripomenieme jednoduchú úlohu – riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

Algebraické riešenie je založené na tom, že prvú rovnicu násobíme vhodným nenulovým reálnym číslom α a druhú rovnicu číslom β tak, aby ich súčet

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad (3)$$

neobsahoval neznámu x, resp. y. Rovnica (3) je *lineárnou kombináciou* rovníc (1) a (2). Vieme, že riešenie sústavy rovníc (1), (2) je rovnaké ako riešenie sústavy rovníc (1), (3), resp. (2), (3). Týmto postupom dostaneme riešenie danej sústavy v tvare rovníc $x = k_1,\ y = k_2$.

Teraz sa pozrime na grafické riešenie tohto systému lineárnych rovníc jazykom geometrie. Množina všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice spĺňaju rovnicu (1), resp. (2) je priamka. Existencia riešenia teda závisí od ich vzájomnej polohy. Sústava rovníc má jediné riešenie práve vtedy, ak odpovedajúce priamky sú navzájom rôznobežné, t.j. ich normálové vektory (a_1, b_1) a (a_2, b_2) sú lineárne nezávislé. V tomto prípade vhodnou voľbou parametrov α, β nájdeme priamky rovnobežné so súradnicovými osami a prechádzajúce ich spoločným bodom, ktorých rovnice sú

$$1x + 0y - k_1 = 0$$

$$0x + 1y - k_2 = 0$$

Korektnosť predchádzajúceho riešenia vyplýva z nasledujúcej vety :

Veta. (Viď [2]) Priamka $\boldsymbol{p}$ prechádza spoločným bodom priamok daných rovnicami (1) a (2) práve vtedy, ak sa jej rovnica dá napísať v tvare (3).

Úloha 1. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza spoločným bodom priamok $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ daných rovnicami

$$\boldsymbol{p} : x + 2y + 3 = 0$$
$$\boldsymbol{q} : \pi x - 3y + \sqrt{2} = 0$$

a na súradnicových osiach vytína úseky rovnakej dĺžky.

<u>*Riešenie:*</u> Hľadaná priamka bude mať rovnicu (3) v tvare

$$\alpha\left(x + 2y + 3\right) + \beta\left(\pi x - 3y + \sqrt{2}\right) = 0$$

Po úprave dostaneme

$$\left(\alpha + \beta\pi\right)x + \left(2\alpha - 3\beta\right)y + 3\alpha + \sqrt{2}\beta = 0$$

Ak hľadaná priamka ma vytínať na súradnicových osiach rovnako veľké úseky, tak z hľadiska jej polohy vieme rozlíšiť nasledujúce tri prípady:

(*i*) Normálový vektor má smer (1,1). Potom platí

$$\alpha + \beta\pi = 2\alpha - 3\beta$$

úpravou

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pi + 3$$

Ak si zvolíme $\alpha = \pi + 3$, tak $\beta = 1$ a rovnica hľadanej priamky bude

$$\left(2\pi + 3\right)x + \left(2\pi + 3\right)y + 3\pi + 9 + \sqrt{2} = 0 \qquad (a)$$

(*ii*) Normálový vektor má smer $(1,-1)$. Potom platí

$$\alpha + \beta\pi = -\left(2\alpha - 3\beta\right)$$

úpravou

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3-\pi}{3}$$

Ak si zvolíme $\alpha = 3 - \pi$, tak $\beta = 3$ a rovnica hľadanej priamky bude

$$\left(2\pi+3\right)x-\left(2\pi+3\right)y+9-3\pi+3\sqrt{2}=0 \qquad (b)$$

(*iii*) Hľadaná priamka bude prechádzať priesečníkom súradnicových osí. Potom platí:

$$3\alpha+\sqrt{2}\beta=0$$

Ak si zvolíme $\alpha=\sqrt{2}$, tak $\beta=-3$ a rovnica hľadanej priamky bude

$$\left(\sqrt{2}-3\pi\right)x+\left(9+2\sqrt{2}\right)y=0 \qquad (c)$$

Počet riešení tejto úlohy závisí od polohy spoločného bodu priamok ***p***, ***q***. Ak tento bod neleží na osi kvadrantu, tak zadaniu úlohy vyhovujú tri priamky – rovnice (*a*), (*b*), (*c*). Ak spoločný bod leží na osi kvadrantu, tak riešením je dvojica priamok s rovnicami (*a*) a (*b*).

2. Zväzky kružníc

Pozrime sa teraz bližšie na možnosti ďalšieho využitia lineárnej kombinácie nielen lineárnych, ale aj nelineárnych útvarov. Konkrétne sa v tomto príspevku budeme zaoberať zväzkami kružníc a ich využitím v riešení úloh analytickej geometrie.

Majme danú kružnicu ***k*** a priamku ***p*** rovnicami

$$\boldsymbol{k}:(x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{p}:\ ax+by+c=0 \qquad (5)$$

Ak vynásobíme rovnicu (5) ľubovoľným nenulovým reálnym číslom α a obe rovnice sčítame, dostaneme rovnicu

$$[(x-m)^2+(y-n)^2-r^2]+\alpha\,(ax+by+c)=0 \qquad (6)$$

Rovnicu upravíme na tvar

$$(x-A)^2+(y-B)^2=A^2+B^2-C$$

kde

$$A=m-\frac{\alpha}{2}a,\quad B=n-\frac{\alpha}{2}b,\quad C=m^2+n^2-r^2+\alpha c.$$

Čo môžeme povedať o množine všetkých bodov (v rovine), ktorých súradnice spĺňajú rovnicu (6) ?

Ak výraz $A^2 + B^2 - C$ je záporný, tak neexistuje bod, ktorého súradnice spĺňajú rovnicu (6). V opačnom prípade to môže byť bod alebo kružnica. Ak priamka ***p*** pretína kružnicu ***k*** v dvoch rôznych bodoch, tak (6) je rovnicou kružnice, ktorá tieto spoločné body obsahuje, pretože ich súradnice spĺňajú obe rovnice (4) aj (5). V tomto prípade je priamka ***p*** *chordálou* kružníc daných rovnicami (4) a (6). Inými slovami, (6) je rovnicou kružnice patriacej do *zväzku kružníc*, ktorý je určený kružnicou ***k*** a chordálou ***p***. (Chordála je množina všetkých bodov, ktoré majú k daným kružniciam rovnakú mocnosť. Zväzok kružníc je množina všetkých kružníc, ktoré majú spoločnú chordálu. Pozri [1] str. 122, 123.)

Podobná situácia nastane v prípade, ak budeme uvažovať lineárnu kombináciu rovníc dvoch kružníc. Majme teda dané dve kružnice $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ rovnicami

$$\boldsymbol{k}_1 : \ (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$$
$$\boldsymbol{k}_2 : \ (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$$

ktoré sa pretínajú v práve dvoch bodoch. *Zväzok kružníc* (určený dvoma kružnicami) je množinou všetkých kružníc, ktorých rovnice sa dajú vyjadriť v tvare

$$\alpha\,[(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2] + \beta\,[(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2] = 0 \tag{7}$$

Zväzky kružníc rozdeľujeme podľa vzájomnej polohy (počtu spoločných bodov) dvoch určujúcich kružníc $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ na *eliptický* (práve dva spoločné body), *parabolický* (jediný spoločný bod) a *hyperbolický* (žiaden spoločný bod).

Pre $\alpha + \beta = 0$ je rovnicou (7) určená *chordála* daného zväzku kružníc.

Zatiaľ sme sa zaoberali lineárnou kombináciou rovníc priamok a kružníc. Rovnako môžeme uvažovať ľubovoľné krivky, prvého a druhého stupňa. Ich lineárna kombinácia v tvare

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

určuje krivku, ktorej typ závisí od koeficientov *A, B, C.*

Na troch úlohách analytickej geometrie si teraz môžeme ukázať použitie lineárnej kombinácie rovníc priamok a kružníc.

Úloha 2. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $M[-1,1]$ a spoločnými bodmi kružnice ***k***: $(x-2)^2+(y+1)^2-1=0$ a priamky ***p***: $2x-y-3=0$.

<u>*Riešenie:*</u> Rovnica hľadanej kružnice má tvar

$$[(x-2)^2+(y+1)^2-1]+\alpha\,(2x-y-3)=0$$

Keď dosadíme súradnice bodu M do tejto rovnice, tak jednoduchým výpočtom dostaneme $\alpha=2$. Rovnicu hľadanej kružnice dostaneme, ak túto hodnotu dosadíme do vyššie uvedenej rovnice :

$$x^2+y^2=2$$

Úloha 3. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružnice ***k***: $x^2+(y-7)^2-32=0$ a priamky ***p***: $x-2y+2=0$ a dotýka sa priamky ***q***: $x=0$.

<u>*Riešenie:*</u> Ak do rovnice hľadanej kružnice

$$[x^2+(y-7)^2-32]+\alpha\,(x-2y+2)=0$$

dosadíme $x=0$, dostaneme kvadratickú rovnicu s parametrom α

$$y^2-(14+2\alpha)y+17+2\alpha=0$$

Riešením tejto rovnice sú *y*-ové súradnice spoločných bodov hľadanej kružnice a danej priamky ***q***. Ak priamka ***q*** má byť jej dotyčnicou, tak diskriminant tejto kvadratickej rovnice musí byť rovný nule, t.j.

$$\mathbf{D}=[-(14+2\alpha)]^2-4(17+2\alpha)=0$$

Postupnou úpravou dostaneme

$$\alpha^2+12\alpha+32=0\text{, resp. }(\alpha+8).(\alpha+4)=0$$

Riešením sú dve hodnoty $\alpha_1=-8$, $\alpha_2=-4$. Potom hľadané kružnice budú mať rovnice

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16 \quad \text{a} \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 .$$

Úloha 4. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $\boldsymbol{k}_1 : \ x^2 + (y-1)^2 = 1$ a $\boldsymbol{k}_2 : \ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ a ktorej stred leží na priamke $\boldsymbol{p} : \ y+1=0$.

<u>*Riešenie:*</u> Hľadaná kružnica bude mať rovnicu

$$\alpha\,[x^2 + (y-1)^2 - 1] + \beta\ [(x-2)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$$

po úprave

$$(\alpha + \beta)\, x^2 + (\alpha + \beta)\, y^2 - 4\beta\, x - (2\alpha + 6\beta)\, y + 9\beta = 0$$

alebo

$$\left(x - A\right)^2 + \left(y - B\right)^2 = A^2 + B^2 - C$$

kde

$$A = \frac{2\beta}{\alpha + \beta}\ , \quad B = \frac{\alpha + 3\beta}{\alpha + \beta}\ , \quad C = \frac{9\beta}{\alpha + \beta} \qquad (\alpha + \beta \neq 0\,)$$

Pretože chceme, aby stred hľadanej kružnice $S\,[A, B]$ ležal na priamke $\boldsymbol{p}$, musí platiť

$$B + 1 = 0\ , \text{ resp. } \ \frac{\alpha}{\beta} = -2$$

Ak položíme $\alpha = 2$, tak $\beta = -1$ a hľadaná kružnica má rovnicu

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 14$$

Podobné úvahy s lineárnou kombináciou vieme využiť aj pri nasledujúcich úlohách, ktorých riešenia ponecháme na čitateľovi.

Úloha 5. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza spoločným bodom priamok $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ daných rovnicami

$$\boldsymbol{p} : 3x - y + 1 = 0 \qquad \boldsymbol{q} : \ \sqrt{3}x + 2y + 7 = 0$$

a súčasne sa dotýka kružnice $\boldsymbol{k}$: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Úloha 6. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza spoločným bodom priamok $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ daných rovnicami

$$\boldsymbol{p}: ex - y + \pi = 0 \qquad \boldsymbol{q}: 5x + 2y - 3 = 0$$

a na súradnicových osiach vytína úseky v pomere 4:3.

Úloha 7. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $\boldsymbol{k}_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ a $\boldsymbol{k}_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

3. Záver

Aj keď v tomto príspevku sme uviedli riešenia štyroch úloh a sformulovali sme ďalšie tri úlohy, pozorný čitateľ si iste uvedomil, že uvedené postupy môžeme využiť aj pri riešení iných úloh analytickej geometrie, nielen v rovine, ale aj v trojrozmernom priestore pre prípad lineárnej kombinácie rovníc rovín a guľových plôch (zväzkoch guľových plôch).

Literatúra:

[1] Šedivý, O. - Božek, M.- Duplák, J. – Kršňák, P. - Trenkler, M.: *Geometria 2,* Bratislava, SPN 1987.

[2] Trenkler, M.:*O lineárnej kombinácii,* Matematika, informatika, fyzika 1996, číslo 9, s. 6-9.

Adresa autora:

RNDr. Martin Billich
Pedagogická fakulta KU
Katedra matematiky a fyziky
Nám. A. Hlinku 56/1
034 01 Ružomberok