

Obrázek jako názorný prostředek vizualizace matematické myšlenky

Pavel Tlustý

ABSTRACT: *The article deal with some elegant visual demonstrations of certain mathematical ideas from basic and grammar school.*

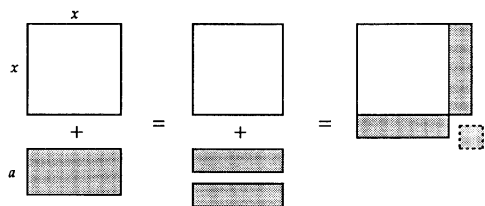
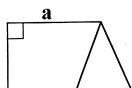
Před časem se mi dostaly do rukou zajímavé knížečky „*Proofs Without Words*“ a „*Proofs Without Words II*“. Jejich autor si dal tu práci, že vyhledal v literatuře velké množství vtipných nápadů, které jednoduchým způsobem ukazují na platnost některých vztahů. Řadu z nich mohou učitelé bezesporu použít k názorné demonstraci platnosti některých matematických vět a to jak na základní, tak i střední škole. Naopak žáci mají možnost tímto způsobem „tvořivě“ přistoupit ke studiu matematiky a pokusit se sami o některé další důkazy.

I když obrázek nelze považovat za exaktní důkaz, geometrická představa je zpravidla efektivnějším nositelem informace než moderní symbolický zápis. Domnívám se, že právě přehnaný důraz na exaktní symbolický zápis je jednou z příčin proč v posledních letech klesá mezi studenty zájem o studium matematiky. Žákům a studentům jsou předkládána matematická tvrzení bez náležitého vysvětlení hlubších souvislostí. Tímto formálním přístupem se zcela potlačuje základní výchovný cíl celé matematiky a to je rozvoj myšlení a schopnosti samostatného uvažování. Vždyť je to právě „chytré nápady“ činí z matematiky zcela výjimečnou vědní disciplínu. Ne nadarmo se říká: „*To see is often to understand*“.

1. Pythagorova věta (důkaz uveřejnil v roce 1876 J. A. Garfield, 20. prezident USA) (*plocha lichoběžníka je rovna součtu ploch tří trojúhelníků*)

$$2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

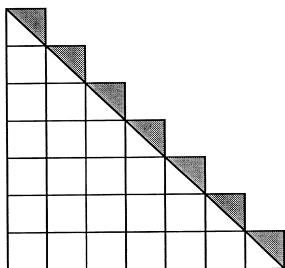
$$c^2 = a^2 + b^2$$



2. Doplnění na čtverec

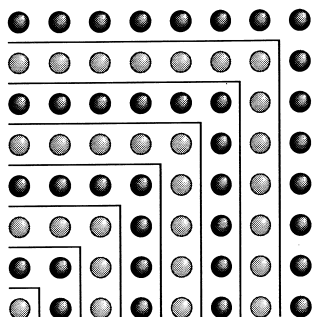
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

3. Součet prvních n přirozených čísel



$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

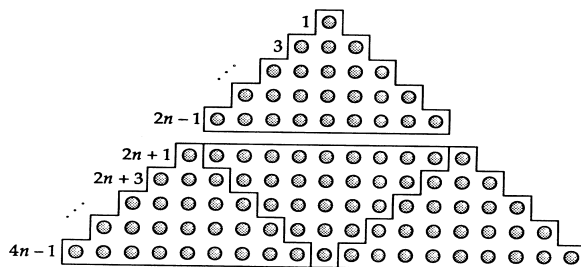
5. Součet lichých čísel



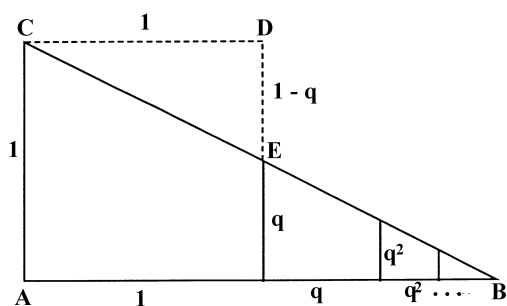
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

6. Vlastnost posloupnosti lichých čísel

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\dots+(4n-1)} = \frac{1}{3}$$



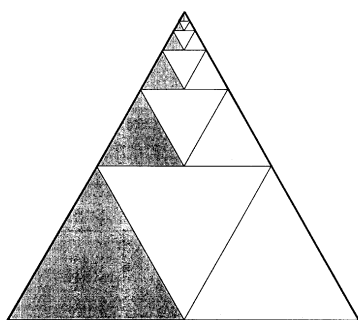
7. Součet členů nekonečné geometrické posloupnosti
(trojúhelníky ABC a DCE jsou podobné)



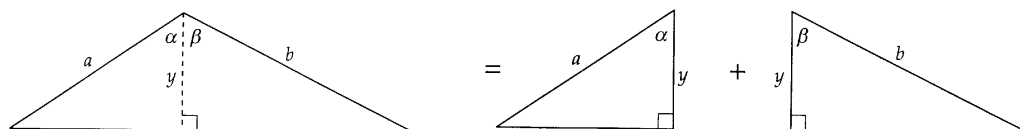
$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

8. Součet členů nekonečné geometrické posloupnosti

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$$



9. Součtové vzorce pro sinus



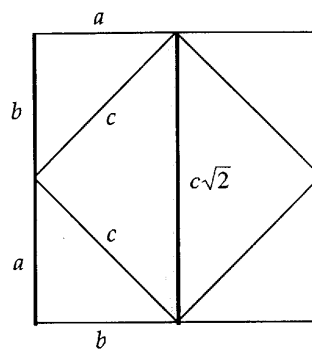
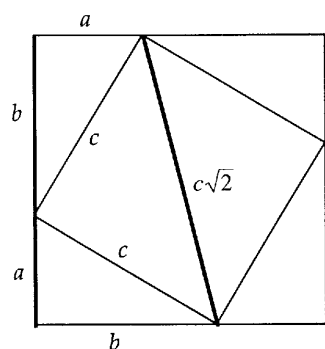
$$y = a \cos \alpha = b \cos \beta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a b \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} a y \sin \alpha + \frac{1}{2} b y \sin \beta = \\ &= \frac{1}{2} a b \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} a b \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

10. Vlastnost pravoúhlého trojúhelníku (kanadská matematická olympiáda 1969)

Nechť c je přepona pravoúhlého trojúhelníku. Dokažte, že pak $a + b \leq c\sqrt{2}$. Kdy nastane rovnost?



Literatura:

- [1] Nelsen, R. B.: *Proofs without words*, The Mathematical Association of America, Washington, 1993
- [2] Nelsen, R. B.: *Proofs without words II.*, The Mathematical Association of America, Washington, 2000

Adresa:

Pavel Tlustý
katedra matematiky PF JU
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: tlusty@pf.jcu.cz