

Heuristicke riešenie problému lineárnej optimalizácie

Danka Timková

ABSTRACT: *The aim of this paper is to present a linear optimization problem in terms of language that is understandable for students of secondary schools. The teaching of linear optimization is here proposed as an example of mathematical applications in real life and as an area, which allows integrating knowledge from various branches of mathematics. The maximizing restaurants' profit is linear optimization problem that helps break down the barriers between secondary school mathematics and the outside world.*

The paper presents program GRULP II as well. This program assists students while solving linear programming problems in terms of graphical method.

1. ÚVOD

V našom každodennom živote sa stretávame so situáciami, kedy chceme získať určitú vec za najnižšiu možnú cenu, alebo pri určitej námahe dosiahnuť čo najväčší možný efekt, alebo vykonať za daný čas čo najväčšiu prácu,... Rozhodovanie, nájdenie najvhodnejšieho, optimálneho riešenia problému patria k najčastejšie sa vyskytujúcim problémom v praktickom živote, ktorými sa zaoberá matematická optimalizácia. Jej časťou je lineárna optimalizácia (lineárne programovanie), ktorú pre široké aplikácie v praxi, ale aj vďaka nenáročnosti metód a zaujímavých prístupov považujeme za vhodnú tému na obohatenie obsahu vyučovania matematiky. Úlohy lineárnej optimalizácie môžeme riešiť viacerými metódami (simplexová, duálna, revidovaná,...). My sme sa zamerali na grafickú metódu riešenia úloh lineárnej optimalizácie, ktorá si nevyžaduje veľký matematický aparát, pretože nadväzuje na vzdelávací štandard z matematiky.

Pri klasickom spôsobe vyučovania má učiteľ často problémy s motiváciou, zaujímavejším podaním učiva a predvedením jeho užitočnosti v aplikáciách. Nami navrhovaný problém z prostredia blízkeho pre študentov a jeho riešenie aj s použitím počítačov sa snaží tieto problémy preklenúť. Prostredníctvom riešenia úloh lineárnej optimalizácie,

vhodných didaktických metód, foriem a pomôcok by sme sa chceli pokúsiť zefektívniť vyučovanie matematiky, urobiť matematiku pre študentov atraktívnejšou, prelomiť bariéru medzi stredoškolskou matematikou a každodenným životom.

2. PRÍKLAD HEURISTICKEHO RIEŠENIA PROBLÉMU LINEÁRNEJ OPTIMALIZÁCIE

Ako vhodný príklad aplikácie grafického riešenia sústavy lineárnych rovníc a nerovníc s dvomi neznámymi a určenia optimálnej hodnoty lineárnej funkcie vzhľadom na lineárne ohraničenia nám poslúži problém maximalizácie zisku reštaurácie s rýchlym občerstvením.

Príklad je spracovaný takou formou, aby sa dal použiť pri systematizácii tematického celku Lineárne rovnice a nerovnice. V tomto prípade predpokladáme, že študenti budú ovládať algebraické a grafické riešenie sústavy lineárnych rovníc s dvomi neznámymi, grafické riešenie sústavy aspoň štyroch lineárnych nerovníc s dvomi neznámymi, prácu s klávesnicou a myškou.

Scenár vyučovania navrhovaného problému sme pre lepšiu prehľadnosť rozčlenili do niekoľkých etáp, ktoré popíšeme v nasledujúcich podkapitolách.

2.1. Formulácia problému

Základný problém je načrtnutý učiteľom nasledovne:

Predstavte si, že vlastníme (alebo máme prenajatú) reštauráciu s rýchlym občerstvením. Reštaurácia ponúka okrem iného aj rôzne druhy chlebíčkov pripravených zo šunky, syra a zeleninového šalátu. Naša reštaurácia je zisková (priemerný denný zisk sa pohybuje okolo 20 000 Sk) a kvôli dobrému umiestneniu na hlavnej ulici dokážeme všetky pripravené chlebíčky predat'. Avšak každý deň máme prebytky 6 kilogramov šunky, 2 kilogramov syra a 27 kilogramov zeleninového šalátu.

Čo máme urobiť s týmito prebytkami, ak prísne hygienické predpisy nám nedovoľujú skladovať zásoby a použiť ich na ďalší deň a zníženie dodávok jednotlivých surovín je pre nás cenovo nevýhodné?

Od tohto bodu by hodina mala prebiehať vo forme dialógu. Vyzveme študentov, aby navrhovali rôzne stratégie riešenia problému „čo s prebytkami“. Keďže prebytky nevyhodíme, upresníme si, čo je našim kritériom pre rozhodnutie sa, čo budeme s prebytkami robiť: či nám ide o to, aby sme spotrebovali všetky prebytky, alebo aby sme mali čo najväčší zisk, aj keď sa nám niektoré suroviny zvýšia,... Predpokladajme, že prostredníctvom týchto prebytkov chceme čo najviac zvýšiť doterajší zisk reštaurácie, pričom sa nemusia minúť všetky prebytky.

Očakávame, že študenti uplatnia svoje skúsenosti s reštauráciami s rýchlym občerstvením a začnú navrhovať nejaké jedlá, ktoré by naša reštaurácia mohla z daných prebytkov vyrábať. Študentom poskytneme priestor pre diskusiu o atraktivnosti navrhovaných jedál, avšak učiteľ by mal udržiavať vhodnú mieru medzi návrhmi študentov a ich deštruktívnymi nápadmi. V podstate nezáleží na tom, aké jedlo študenti navrhnu na prípravu zo zvyšujúcich sa surovín. Učiteľ by však kvôli grafickému riešeniu v rovine mal usmerniť študentov k voľbe práve dvoch druhov jedál. Predpokladajme, že sa študenti rozhodli pre výrobu šunkového a syrovo-šunkového šalátu.

Tieto diskusie by mali viesť k študentmi rozvinutej formulácii problému, ktorá oproti predchádzajúcej navyše obsahuje dodatok:

Koľko kilogramov šunkového a koľko syrovo-šunkového šalátu máme denne vyrobiť zo 6 kilogramov šunky, 2 kilogramov syra a 27 kilogramov zeleninového šalátu, aby sme dosiahli čo najväčší zisk z predaja týchto šalátov? Predpokladáme, že všetok vyrobený šalát dokážeme predat'.

Vedíme študentov k tomu, aby uvažovali nad postačujúcimi informáciami potrebnými na riešenie problému; uvedomili si, že na vyriešenie tohto problému nepotrebujú napríklad informáciu o doterajšom zisku reštaurácie, ale na druhej strane nutnými informáciami pre vyriešenie problému sú zloženie jednotlivých šalátov a ich predajné ceny. Očakávame, že študenti na základe svojich doterajších skúseností navrhnu, ktoré z daných surovín a v akom množstve použijeme pri príprave jednotlivých šalátov. Pre lepšiu prehľadnosť by mal učiteľ na tabuľu priebežne zapisovať údaje do tabuľky. Zároveň učiteľ by mal dohliadať na reálnosť nápadov a všetky zaujímavé nápady ako vyrábať navyše syrový šalát, dokúpiť tatársku omáčku na dochutenie šalátov,... si poznačíme a vrátíme sa k nim v poslednej etape nazvanej „Čo sa stane, ak...“.

Po tejto úvodnej diskusii, ktorá mala motivovať študentov, zistiť, oživiť ich doterajšie skúsenosti s prostredím problému, máme kompletnú formuláciu problému, ktorá môže vyzeráť napríklad takto:

Koľko kilogramov šunkového a koľko syrovo-šunkového šalátu máme denne vyrobiť zo 6 kilogramov šunky, 2 kilogramov syra a 27 kilogramov zeleninového šalátu, aby sme dosiahli čo najväčší zisk z predaja týchto šalátov? Predajná cena za jeden kilogram šunkového šalátu je 120 Sk a syrovo-šunkového 150 Sk. Na výrobu jedného kilogramu šunkového šalátu potrebujeme 0,4 kg šunky a 0,6 kg zeleninového šalátu a na kilogram syrovo-šunkového šalátu potrebujeme 0,3 kg šunky, 0,2 kg syra a 0,5 kg zeleninového šalátu. Predpokladajme, že všetok vyrobený šalát dokážeme predat'.

2.2. Heuristicke riešenia, porozumenie problému

Dialógom medzi študentmi a učiteľom chceme doceliť, aby študenti porozumeli problému, ktorý máme vyriešiť, vedeli ho slovne sformulovať a uvedomili si, že potrebujeme nájsť také množstvá šalátov, ktoré dokážeme vyrobiť a ktorých predajom dosiahneme maximálny zisk.

Poskytneme študentom priestor a čas na experimentovanie, „pohranie“ sa s číslami. Očakávame od študentov odhady množstiev šalátov, ktoré dokážeme vyrobiť, aj s obhájením správnosti ich voľby a vypočítaním zisku. Šikovnejší študenti pravdepodobne hneď navrhnú malé množstvá, o ktorých je zo zadania ľahké rozhodnúť, či na ich prípravu máme dostatok surovín.

Konkrétne ukážky by mali prispieť k intuitívnemu pochopeniu pojmov prípustné, neprípustné a optimálne riešenie a k vlastnej definícii týchto pojmov. Vyzveme študentov k diskusii o množstvách šalátov, ktorá by mala viesť k záveru, že čísla, ktoré predstavujú množstvá šalátov, ktoré dokážeme vyrobiť, musia byť nezáporné reálne čísla.

2.3. Diskusia o spôsoboch riešenia problému

V nasledujúcej časti by mali študenti zhodnotiť predchádzajúci spôsob hľadania optimálneho riešenia sformulovaného problému. Voľba prípustných množstiev a výpočet ziskov nie je práve najefektívnejší spôsob, keďže prípustných riešení je veľmi veľa a stratili by sme veľa času ich zisťovaním. Môžeme sa však pokúsiť preskúmať množinu prípustných množstiev šalátov.

Vyzveme študentov k zisteniu horného a dolného ohraničenia prípustných množstiev šalátov. Je samozrejmé, že množstvá šalátov musia byť nezáporné čísla. Študenti by nemali mať problém zistiť, že z daných množstiev surovín dokážeme vyrobiť maximálne 15 kilogramov šunkového šalátu, ale 0 kg syrovo-šunkového a najviac 10 kg syrovo-šunkového šalátu, ale žiaden šunkový šalát.

Usmerníme študentov, aby si uvedomili, čo znamená riešiť náš problém touto metódou: voliť si množstvá šalátov a overovať, či ich dokážeme vyrobiť, môže byť dosť zdĺhavé, pretože na výber dvoch nezáporných čísel máme nekonečne veľa možností. Jednoduchšie je popísanie problému pomocou matematických prostriedkov (rovníc, nerovníc, funkcií premenných,...), teda zostavenie matematického modelu.

2.4. Formulácia matematického modelu reálnej situácie

Očakávame, že študenti zvolia vhodné matematické označenie neznámych, napríklad:

✓ x_1 = množstvo šunkového šalátu vyrobeného za deň (v kilogramoch),

✓ x_2 = množstvo kilogramov syrovo-šunkového šalátu vyrobeného denne.

Študenti odvodia obmedzenia na množstvo surovín a matematicky popíšu

zisk (teda popíšu množinu prípustných riešení a sformulujú účelovú funkciu). Matematický model problému je nasledovný:

maximalizovať zisk (Z)

$$120x_1 + 150x_2,$$

vzhľadom na obmedzené množstvá nasledujúcich surovín:

✓šunka

$$0.4x_1 + 0.3x_2 \leq 6,$$

✓syr

$$0.2x_2 \leq 2,$$

✓zeleninový šalát

$$0.6x_1 + 0.5x_2 \leq 27,$$

pričom

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2.5. Diskusia o možných výsledkoch riešenia matematického modelu

V ďalšej fáze riešenia vyzveme študentov k návrhu spôsobu riešenia sformulovaného matematického modelu. Očakávame, že študenti navrhnu grafické riešenie nerovníc zostaveného matematického modelu. Podľa potreby je možné zopakovať vedomosti o grafickom riešení lineárnych rovníc a nerovníc aj pomocou prezentácie *Grafické riešenie lineárnych rovníc a nerovníc*, ktorá je súčasťou výučbového hypertextu [1]-príklad Bagetéria.

Množinu riešení každej nerovnice zostaveného matematického modelu vieme graficky znázorniť v súradnicovej sústave s osami x_1 a x_2 príslušnou polrovinou. Prienikom zobrazených polrovín odvodených z uvedených nerovností dostaneme množinu všetkých prípustných množstiev šalátov. Pre lepšiu predstavu o množine prípustných riešení diskutujeme so študentmi o tom, akým rovinným útvarom môže vo všeobecnosti byť táto množina (prázdna množina, bod, úsečka, n-uholník, polpriamka, priamka, polrovina, neohraničená časť roviny).

Nasleduje diskusia o grafickom znázornení účelovej funkcie a hľadani optimálneho riešenia. Účelovú funkciu vieme pre nejaké konkrétne zisky graficky znázorniť príslušnými priamkami. Chceme mať čo najväčší zisk, teda budeme zväčšovať pravú stranu rovnice $120x_1 + 150x_2 = Z$, ľavá strana ostáva nezmenená. Ak za Z budeme dosadzovať stále väčšie čísla, v grafe získame postupne navzájom rovnobežné priamky, ktoré sa vzdiaľujú od začiatku súradnicovej sústavy. Chceme dosiahnuť maximálny možný zisk, hľadáme teda priamku, ktorá je najviac vzdialená od začiatku súradnicovej sústavy a má aspoň jeden spoločný bod s množinou bodov znázorňujúcich prípustné riešenia. Prienikom takejto priamky a množiny prípustných riešení je množina optimálnych riešení. Vyzveme študentov k analýze všetkých možností, čo môže byť optimálnym riešením (bod, úsečka, polpriamka).

2.6. Riešenie matematického modelu pomocou počítača

Ako pomocník pri samotnom grafickom riešení matematického modelu úlohy lineárneho programovania posluží interaktívny výučbový program **GRULP II** (Grafické Riešenie Úloh Lineárneho Programovania), nachádzajúci sa na adrese <http://www.science.upjs.sk/diplom/grulp/> [1] (jeho podrobnejší popis čitateľ nájde v práci [2]). Tento program za používateľa úlohy nerieši, iba ho odbreňuje od niektorých mechanických a rutinných činností. Každé podstatné rozhodnutie musí urobiť užívateľ sám a program následne overí, či sa rozhodol správne, prípadne ho upozorní na možné chyby. Riešenie je sprevádzané podrobným popisom, preto veríme, že s používaním nebudú mať študenti problémy. Vstupom programu je matematický model a program následne s asistenciou užívateľa zobrazí množinu prípustných riešení a priamku účelovej funkcie, ktorú je možné posúvať a tým meniť hodnotu účelovej funkcie, čo pomôže študentom pri hľadaní optimálneho riešenia. Nakoniec po správnych reakciách na výzvy programu sa vypíše riešenie matematického modelu, v našom prípade: „*Účelová funkcia $f = 120x_1 + 150x_2$ nadobúda maximálnu hodnotu 2400 v bode so súradnicami [7.5, 10]*”.

2.7. Interpretácia riešenia matematického modelu do reálnej situácie

V tejto etape je vhodné venovať sa diskusii o interpretácii grafických riešení do reálnej situácie. Vedeíme študentov, aby si uvedomili, že riešením napríklad lineárnej nerovnice $0.4x_1 + 0.3x_2 \leq 6$ v prvom kvadrante súradnicovej sústavy je množina všetkých nezáporných čísel, teda takých množstiev šunkových a syrovo-šunkových šalátov, ktorých výrobou spotrebujeme nanajvýš 6 kilogramov šunky. Tiež zadáme úlohy, ktorými overíme, či študenti vedú z grafu vyčítať prípustné, neprípustné množstvá šalátov; zistiť, ktorých surovín majú prebytok, ktorých nedostatok. Podobným úlohám je možné venovať sa v časti „**Čo sa stane, ak...**“.

Interpretácia optimálneho riešenia matematického modelu do pôvodného problému je nasledovná:

Reštaurácia by teda mala denne vyrábať 7.5 kg šunkového, 10 kg syrovo-šunkového šalátu a tak dosiahne ich predajom maximálny zisk 2400 Sk.

2.8. „Čo sa stane, ak ...“ - riešenie úloh s pozmeneným pôvodným zadáním príkladu

V nasledujúcej časti riešime so študentmi úlohy, ktoré môžu vzniknúť pozmenením nejakej informácie z pôvodnej formulácie problému. Vyzveme študentov, aby navrhli možné zmeny v pôvodnom zadaní (zmena množstva surovín, zmena cien šalátov, zmena zloženia šalátov, pridanie novej suroviny, pridanie nového druhu šalátu). Môžeme tiež rozanalyzovať

nápady študentov, ktoré navrhovali počas riešenia problému. Tieto úlohy môžu poslúžiť ako samostatné úlohy, prípadné problémy alebo rôzne výsledky prediskutujeme. Aj v tomto prípade ako pomôcka môže poslúžiť program GRULP II.

3. ZÁVER

Heuristickým riešením navrhovaných problémov s využitím skúseností študentov pri formulácii problému, experimentovaním a počítačom podporovaným riešením problému chceme v mysliach študentov zopakovať historický vznik lineárnej optimalizácie a grafickej metódy riešenia, rozvíjať ich logické, hodnotiace a tvorivé myslenie a zefektívniť vyučovací proces použitím počítačov. Prebudiť týmto spôsobom kladný vzťah k matematike považujeme za dôležitejšie ako naučiť študentov teóriu lineárnej optimalizácie. Prostredníctvom takýchto a podobných úloh zasadených do situácií praktického života chceme motivovať študentov k používaniu matematického myslenia aj mimo školy.

Veríme, že výučbový program vďaka veľkej názornosti pomôže študentom komplexnejšie pochopiť grafické riešenie úloh lineárnej optimalizácie a umožní danú problematiku zvládnuť podstatne rýchlejšie ako klasickým spôsobom grafického riešenia napríklad na milimetrovom papieri. Podrobnejší popis scenára riešenia problému lineárnej optimalizácie môže čitateľ nájsť v práci [2], prípadne vo výučbovom hypertexte [1] – príklad Bagetéria. Ďalšie inšpirácie ponúka aj vysokoškolský učebný text [3].

Literatúra:

1. <http://www.science.upjs.sk/diplom/grulp>
2. Timková, D.: *Úlohy matematickej optimalizácie vo vyučovaní matematiky*, Písomná práca k dizertačnej skúške, UPJŠ, Košice 2002
3. Cechlárová, K., Semanišin, G.: *Lineárna optimalizácia*, PF UPJŠ, Košice 1999

RNDr. Danko Timková, Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Jesenná 5, 041 54 Košice, SR, E-mail: timkova@science.upjs.sk