

Dotyková rovina a normála k ploche $z=f(x,y)$ s Matlabom

Jana Schusterová

ABSTRACT: *The aim of this article is to explain how determine a tangent plane and a normal of the surface $z=f(x,y)$ using the programming system Matlab 5.2 . This commands can be utilized in pedagogical practice.*

1. ÚVOD

Pri klasickej výučbe matematiky využívame so študentmi aj prístup k výpočtovému systému Matlab. Študenti majú skúsenosti s Matlabom len z predmetu matematika v predchádzajúcom semestri. Ani vtedy sme nemali a ani teraz nemáme dosť času na hlbšie preniknutie do tajov Matlabu, ale to ani nie je predmetom základného kurzu vysokoškolskej matematiky. Na našich cvičeniach sa zoznamujeme s tými príkazmi, ktoré sú pre výuku ľahko použiteľné a zrozumiteľné. V tomto príspevku sú uvedené niektoré príkazy systému Matlab, ktoré sa môžu použiť pri precvičovaní učiva o dotykovvej rovine a normále k ploche $z=f(x,y)$. Naučíme sa vypočítať potrebné parciálne derivácie, graficky zobrazíť zadanú plochu, vypočítanú dotykovú rovinu a normálu v zadanom bode. Získavame skúsenosti s grafickým zobrazením v priestore.

2. TEORETICKÝ ZÁKLAD

Uvažujme funkciu dvoch premenných $z=f(x,y)$ a bod $A=[x_0,y_0]$. Ak funkcia f je v bode A diferencovateľná, potom rovnica dotykovvej roviny ku grafu funkcie f v bode $P=[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ je

$$f'_x(A)(x-x_0)+f'_y(A)(y-y_0)-(z-f(A))=0$$

a parametrické rovnice normálovej priamky ku grafu f v bode P sú

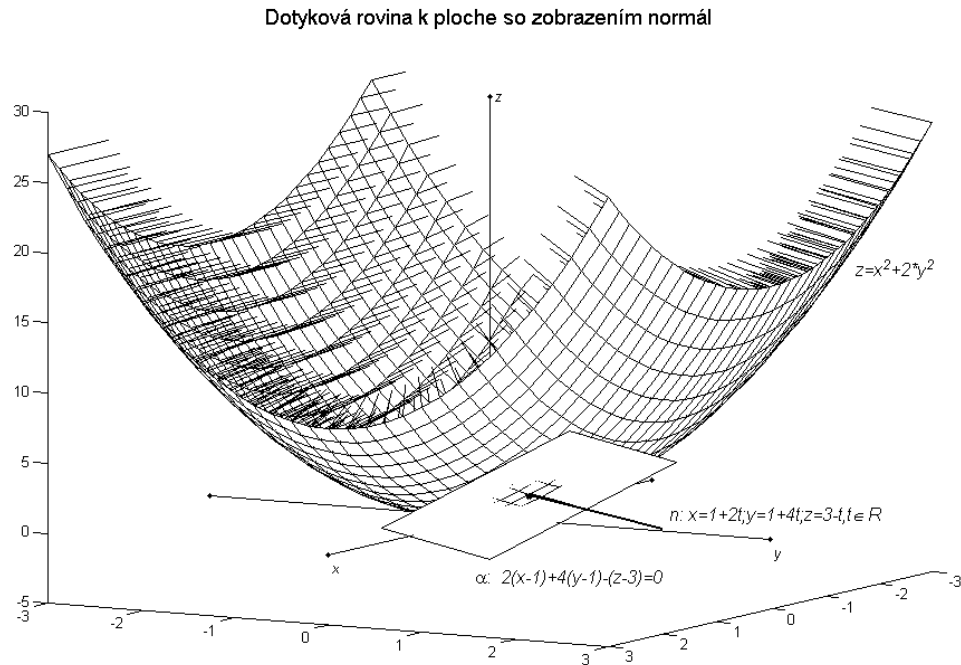
$$\begin{aligned}x &= x_0 + f'_x(A) \cdot t \\ y &= y_0 + f'_y(A) \cdot t \\ z &= z_0 - t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3. PRÍKAZY V MATLABE

Za znakom >> sú uvedené príkazy, ktoré treba zadať do príkazového okna Matlabu. Po stlačení klávesu <Enter> sa vykonajú. Ďalšou možnosťou je vytvoriť z týchto príkazov m-súbor a vykonať ich naraz všetky spustením tohto m-súboru. Za znakom % sú uvedené poznámky k jednotlivým príkazom (ako to umožňuje aj Matlab) a výsledky príkazov. Bližšie vysvetlenie príkazov nájdeme zadáním >>help príkaz .

Príklad: Nájdime rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $z = x^2 + 2y^2$ v bode $P = [1, 1, 3]$ ([4], str. 59). Zobrazme plochu, dotykovú rovinu a normálu k ploche.

Riešenie:



Obr. 1

Použité príkazy:

% (1) – výpočet potrebných derivácií

```
>>syms x y
    % vytvára symbolické premenné x a y, potrebné pre symbolické
    % derivovanie
>>z=x^2+2*y^2
    % definícia eliptického paraboloidu
>>P=[1,1,3]
    % bod dotyku
>>dzx=diff(z,x)
    % do premennej dzx uloží parciálnu deriváciu z podľa x ( $dzx=2*x$ )
>>dzx0=subs(dzx,{x,y},{P(1),P(2)})
    % do symbolickej premennej dzx0 uloží  $z'_x(P)$  ( $dzx0=2$ )
>>dzy=diff(z,y)
    % vypočíta  $z'_y$  ( $dzy=4*y$ )
>>dzy0=subs(dzy,{x,y},{P(1),P(2)})
    % dosadí bod P ( $dzy0=4$ )
```

% (2) – znázornenie zadanej plochy

```
>>xx=-3:0.2:3;
>>yy=xx;
>>[x,y]=meshgrid(xx,yy);
    % nadefinovaná mriežka bodov (x,y) pre zobrazenie paraboloidu
>>z=x.^2+2*y.^2;
    % pre grafické zobrazenie musíme plochu opätovne definovať – ako
    % maticu
    % poznámka: vo vyššej verzii Matlab umožňuje vykresliť plochy aj
    % v symbolickej matematike (ezcontour, ezmesh, ezgraph3)
>>surfnorm(x,y,z)
    % príkaz zobrazí plochu spolu s normálovými vektormi v každom jej
    % vyznačenom bode
>>hold on
    % zachová aktuálny graf pre ďalšie kreslenie
>>osx=xlim;osy=ylim;osz=zlim;
    % zistí hraničné hodnoty súradníc na osiach
>>plot3([osx(1),osx(2)],[0 0],[0 0],'k.-')
    % zobrazí os x čiernou plnou čiarou s ukončením bodkou
>>text(osx(2),0,-1,'fontsize{10}\it x')
    % na zadanej pozícii popíše os x (zmena veľkosti a typu písma)
>>plot3([0,0],[osy(1),osy(2)],[0 0],'k.-')
>>text(0,osy(2),-1,'fontsize{10}\it y')
```

```

    % zobrazí a popíše os y
>>plot3([0,0],[0 0],[osz(1),osz(2)],'k.-')
>>text(0,0,osz(2),'fontsize{10}{\it z}')
    % zobrazí a popíše os z
>>view([120,10])
    % nastavenie uhla pohľadu na graf
>>plot3(P(1),P(2),P(3),'kx','LineWidth',4);
    % znázorní bod P znakom x čiernou farbou s nastavenou šírkou znaku
>>grid on
    % zobrazí súradnicovú mriežku

```

% (3) – znázornenie dotykovej roviny

```

>>xx=0:2:2;
>>yy=0:2:2;
>>[x,y]=meshgrid(xx,yy);
    % zmenšenie množiny a hustoty zobrazovaných bodov
>>n1=double(dzx0);
    % do premennej n1 uloží hodnotu symbolickej premennej dzx0
>>n2=double(dzy0);
    % do premennej n2 uloží hodnotu symbolickej premennej dzy0
>>zz=n1*(x-P(1))+n2*(y-P(2))+P(3);
    % rovnica dotykovej roviny k ploche z v bode P
>>surf(x,y,zz);
    % zobrazuje povrch dotykovej roviny zatienením
>>colormap(white);
    % nastavuje farebnú škálu zobrazenia na bielu

```

% (4) – znázornenie normály k ploche

```

>>t=0:0.1:0.5;
    % parameter t je vektor od 0 po 0.5 s krokom 0.1
>>plot3(P(1)+n1*t,P(2)+n2*t,P(3)-t,'-', 'LineWidth',2)
    % zobrazenie úsečky v parametrickom tvare – u nás normály k ploche
    % so zadaným typom a šírkou čiary
>>title('fontsize{14}Dotyková rovina k ploche so zobrazením normál');
    % nadpis obrázku s nastavenou veľkosťou písma
>>text(-1.5,3,18,'fontsize{12} \it z=x^2+2*y^2')
>>text(2,1,-2,'fontsize{12} \alpha: \it 2(x-1)+4(y-1)-(z-3)=0')
>>text(-1,1.3,0,'fontsize{12} \it n: x=1+2t;y=1+4t;z=3-t,t\in R')
    % popis zobrazených útvarov
>>rotate3d on
    % povolené natáčanie grafu pohybom myši

```

>>*hold off;grid off*

% uvoľnenie nastavenia aktuálneho obrazu a mriežky

Poznámka: Uvedené príkazy sú použiteľné vo väčšine úloh podobného typu. Treba len prihliadnuť na definičný obor zadanej plochy a prispôbiť mu parametre grafického zobrazenia (veľkosť zobrazovanej oblasti, uhol pohľadu, súradnice sprievodného textu). To už je dobrý námet pre samostatnú prácu študentov na vlastných zadaniach príkladov.

4. ZÁVER

Symbolické derivovanie v Matlabe nám urýchlí prácu na cvičeniach z matematiky. Predpokladom je samozrejme ovládanie derivácií a parciálnych derivácií bez použitia počítača.

Rozsiahle grafické možnosti Matlabu sa dajú dobre využiť pri vizualizácii riešených problémov. A naopak, pri riešení matematických úloh sa postupne zoznamujeme s príkazmi výpočtového systému Matlab.

Literatúra:

1. Knežo, D., Kimáková, Z., Švidroňová, E.: *Zbierka úloh z matematiky II*, TU Košice 1999, ISBN: 80-7099-468-1.
2. Kozák, Š., Kajan, S.: *Matlab – Simulink*, STU Bratislava 1999, ISBN: 80-227-1213-2.
3. Polcerová, M.: *Doprovodný text k počítačovým cvičením – Matematika I*, Brno 2001.
4. Šoltés, V., Švidroňová, E.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky II*, TU Košice 1992, ISBN: 80-7099-155-0.
5. Schusterová, J.: *Matematika II s Matlabom*, v zborníku z konferencie Aplimat 2002 v Bratislave, str. 359-364, ISBN: 80-227-1654-5.

Adresa:

Mgr. Jana Schusterová, KAMA Sjf TU, Letná 9, 041 87 Košice

e-mail: Jana.Schusterova@tuke.sk

web: <http://www.tuke.sk/schuster>