

Sposoby liczenia elementów układów ilustrujących iloczyn liczb naturalnych.

Bożena Rożek
Akademia Pedagogiczna Kraków

ABSTRACT: In school teaching the notion of the product is introduced on the basis of concrete situations of the 'the same quantity taken many times' type. The geometrical model of such a situation is represented by an 'm×n' row-column arrangement of figures, which consists of m columns and n rows (for example, an arrangement of unit squares in a given rectangle).

The results of the research show that the fact of finding the number of elements in this type of arrangements with the aid of multiplication does not always mean that the child is capable of noticing an arrangement of several rows of the same number of elements. Moreover, in non-standard situations multiplication is employed by children only sporadically. One may therefore suppose that to a typical arrangement of several rows of the same number of elements some children automatically apply the school pattern: they recognize the situation of a rectangular arrangement and then they know that the number of the elements of the first column should be multiplied by the number of the elements of the first row.

1. Wstęp

Celem prezentowanych tu badań¹ było poszukiwanie odpowiedzi na pytania:

- Jakie naturalne sposoby liczenia elementów takich układów stosują dzieci wieku od 7 do 9 lat?
- Czy w geometrycznym modelu *m* kolumn i *n* szeregów dzieci dostrzegają układ *kilku rzędów po tyle samo w każdym* i czy wykorzystują mnożenie do obliczenia liczby elementów tego układu?

¹ Przeprowadzone badania były częściowo finansowane z grantu KBN nr 2 1221 9101 oraz nr 2 P03A 024 18.

Z analizy podręczników wynika, że przy wprowadzaniu w szkole wielu pojęć matematycznych, a także ich własności wykorzystuje się, często w ukryty sposób, wieloaspektowe rozumienie szeregowo-kolumnowego układu figur² (SKUF). Zagadnienia matematyczne, oparte na tego typu układach, występują na różnych etapach nauczania matematyki. W klasach początkowych rozumienie SKUF jest istotne w związku z kształtowaniem m. in. pojęcia iloczynu, prawa przemienności mnożenia oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania, w algorytmach działań pisemnych, pewnych sytuacjach geometrycznych a także w różnego rodzaju tabelach. W klasach wyższych SKUF odgrywa rolę np. przy kształtowaniu pojęcia pola, układu współrzędnych, iloczynu kartezyjskiego, macierzy; w tabelach statystycznych, wykresach, niektórych diagramach.

Pojęcie iloczynu w nauczaniu szkolnym wprowadza się w oparciu o konkretne sytuacje typu: „wiele razy po tyle samo”. Geometrycznym modelem takiej sytuacji jest szeregowo-kolumnowy układ figur typu $n \times k$, w którym występuje n kolumn i k szeregów (na przykład układ jednostkowych kwadratów w danym prostokącie). Taki model wykorzystuje się także do wprowadzenia prawa przemienności mnożenia. Widzenie w tym samym układzie raz n szeregów po k elementów w każdym szeregu, a potem k kolumn po n elementów w każdej kolumnie umożliwia zastosowanie dwóch sposobów liczenia elementów tego układu: $n \cdot k$ oraz $k \cdot n$. Ta podwójna interpretacja ułożenia wymaga umiejętności szybkiego i łatwego przechodzenia od jednego postrzegania układu do drugiego.

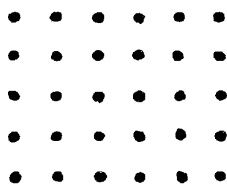
2. Opis badań

W badaniach uczestniczyło 149 dzieci (38 dziewięciolatków, 54 ośmiolatków, 57 siedmiolatków). W obecności badacza każde dziecko indywidualnie obliczało elementy przedstawionych na rysunku układów. Oto wybrane dwa zadania, które prezentowano dzieciom.

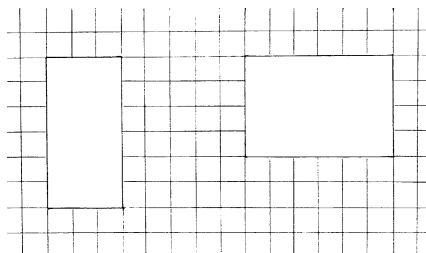
Zadanie 1. *Policz narysowane kropki (rys. 1).*

Zadanie 2. *Ile potrzeba takich kwadratów (dzieciom pokazywano pojedynczy kwadrat sieci) do pokrycia tych prostokątów (rys. 2)?*

² W latach 1992-1996 prowadzono badania nad rozumieniem SKUF przez dzieci w wieku od 6 do 9 lat. Wyniki tych badań były prezentowane w artykułach (Rożek, 1994; Rożek, 1997). Pełny opis badań został zaprezentowany w mojej rozprawie doktorskiej (Rożek, 1998).



rys. 1



rys. 2

Zadanie pierwsze związane było z typową sytuacją. Był to układ 5 rzędów po 6 kropek w każdym rzędzie. Zadanie drugie to ukazanie SKUF w sytuacji nietypowej. Był to także układ *kilku rzędów po tyle samo*, ale elementy tego układu nie były bezpośrednio wyróżnione na rysunku. Należało policzyć ile kwadratów potrzeba do zapełnienia dwóch prostokątów o bokach 6 na 3 oraz 4 na 6 umieszczonych na sieci kwadratowej.

3. Liczenie elementów SKUF w sytuacji typowej

Prezentowany w zadaniu pierwszym układ kropek mógł być znany z nauki szkolnej i przez większość dzieci wizualnie kojarzony z sytuacją, do której pasuje mnożenie. Niemniej jednak sposoby liczenia kropek pozwoliły wyróżnić kilka sposobów liczenia elementów prostokątnego SKUF (kursywą przedstawiono przykładowe wypowiedzi dzieci):

1. Liczenie pojedynczych elementów
 - a) niepoprawne (np. z powodu pomyłek w wymienianiu liczebników albo braku organizacji liczenia, albo wskazywania dwa razy tego samego elementu)
 - b) poprawne (najczęściej zorganizowane wzdłuż szeregów lub wzdłuż kolumn);
2. Liczenie po dwa elementy: *2, 4, 6, 8...* ;
3. Dodawanie jednakowych składników:
 - a) dodawanie jednakowych liczb i tworzenie sum częściowych: *6 i 6 to 12, 18, 24, 30;*
 - b) dodawanie kilku jednakowych składników i obliczanie całej sumy: *tu 6 i 6 i 6 i 6 i 6 i 6 i dodałam, 30;*
3. Mnożenie:
 - a) mnożenie liczby elementów pierwszego szeregu przez liczbę elementów pierwszej kolumny;

- b) mnożenie liczby rzędów przez liczbę elementów w jednym rzędzie: 6 kuleczek w 5 rzędach to 6×5 ;
- c) mnożenie na dwa sposoby: 5×6 , bo po 5 kropek w 6 rzędach, ale może być 6×5 , bo po 6 kropek w 5 rzędach.

Większość dzieci siedmioletnich przeliczała elementy wskazując pojedyncze kropki. Nic w tym dziwnego, gdyż dzieci te nie miały jeszcze wprowadzonego mnożenia na lekcjach matematyki. U dzieci starszych stopniowo pojawia się grupowanie elementów po 2 (2, 4, 6, ...) albo dodawanie związane z liczbą kropek w szeregu (6 i 6 to 12 i 6 to 18 i 6) lub w kolumnie (5, 10, 15....). Następną strategią to mnożenie, które wyraźnie pojawia się u dzieci w wieku 9 lat i sięga 39% badanych uczniów.

Niektóre sposoby liczenia (punkty 2a, 2b, 3b) świadczą o widzeniu przez dziecko układu szeregów (kolumn) lub podwójnego układu szeregowo-kolumnowego (punkt 3c). Dostrzeżenie w SKUF tych układów ułatwia organizację liczenia. Jest jednak bardzo prawdopodobne, że część dzieci licząca sposobem 3a wykonuje mnożenie automatycznie, bez zauważenia w układzie kropek kilku rzędów, w każdym po tyle samo. Nie jesteśmy w stanie stwierdzić, bez dodatkowych pytań, czy badany, wskazując elementy pierwszej kolumny, ma świadomość, że właśnie w ten sposób policzył szeregi. Być może, uczniowie rozpoznają w SKUF jedynie sytuację, w której zawsze należało pomnożyć liczby wyznaczone przez „brzegową” kolumnę i szereg. Potrafią więc uzyskać prawidłowy wynik bez uświadomienia sobie zależności między liczbą szeregów a liczbą elementów w kolumnie. O takim instrumentalnym opanowaniu tego typu zadań „na mnożenie” może świadczyć przypadek chłopca, który błędnie liczył kwadraty w innym zadaniu.

- Chłopiec w pokratkowanym prostokącie typu 5×5 liczy 5 kwadratów w pierwszej kolumnie oraz 4 elementy w pierwszym szeregu (opuścił górny lewy kwadrat). Następnie mnoży te liczby i bez wahania stwierdza, że potrzeba 20 kwadratów. Zapytany, dlaczego opuścił górny lewy kwadrat, odpowiedział zdumiony: *przecież raz go już liczyłem*.

4. Liczenie elementów SKUF w nietypowej sytuacji

W zadaniu drugim chodziło o wykluczenie bezmyślnego, automatycznego stosowania mnożenia przez przeliczenie elementów w pierwszym szeregu i w pierwszej kolumnie. Liczenie niewidocznych kwadratów nie było dla dzieci typowym zadaniem, dlatego też tylko sporadycznie liczbę tych kwadratów znajdowały za pomocą mnożenia.

Stosowane w zadaniu 2 sposoby liczenia można podzielić na kilka grup, w których badany:

1. nie podejmuje próby liczenia lub zgaduje liczbę;
2. liczy wewnątrz pustego prostokąta wyobrażone w myśli (poprawnie bądź nie) kwadraty bądź wzdłuż szeregów, bądź wzdłuż kolumn, bądź spiralnie wokół ramki;
3. liczy kwadraty sieci odbijając w myśli symetrycznie prostokąt względem jednego boku albo wskazując kwadraty na zewnątrz wokół brzegu prostokąta;
4. oblicza liczbę kwadratów za pomocą mnożenia.

Oto przykład rozwiązania zadania drugiego, który ilustruje opisany powyżej 3 typ liczenia elementów (na rysunkach pokazano kolejność liczenia kwadratów):

- **Ela** — lat 7 — o swojej pracy mówi: *Ja sobie tak przełożyłam ten prostokąt* (wykonuje gest odbicia na drugą stronę). Dziewczynka wykonuje w wyobraźni odbicie symetryczne pustego prostokąta na siatkę z kwadratami względem lewego boku tego prostokąta. Liczy wówczas istniejące obok prostokąta kwadraty (rys. 3) podając dobry wynik. Podobnie postępuje z drugim prostokątem, odbijając go symetrycznie względem dolnego boku.

	1	2	3									
	4	5	6									
	7	8	9									
	10	11	12									
	13	14	15				1	2	3	4	5	6
	16	17	18				7	8	9	10	11	12
							13	14	15	16	17	18
							19	20	21	22	23	24

rys. 3

5. Zakończenie

Dzieci obliczają elementy konkretnego SKUF na różne sposoby. Częstość występowania poszczególnych sposobów zależy od wieku dziecka. Dodawanie kilku jednakowych składników świadczy o dostrzeżeniu przez dziecko układu szeregowy bądź układu kolumnowy, zależnie od tego, co dodaje. Jednak znajdowanie liczby elementów za pomocą mnożenia nie zawsze oznacza umiejętność widzenia przez dziecko układu kilku rzędów po tyle samo w każdym. Z samej obserwacji zastosowania mnożenia nie można jednak stwierdzić, czy dzieci uświadamiały sobie, że elementy ułożone były w kilku rzędach po tyle

samo w każdym, czy też stosowały tę strategię mechanicznie, rozpoznając znany z nauki szkolnej geometryczny układ, do którego „pasuje” mnożenie. Zastosowana przez dzieci strategia mnożenia w zadaniu 1 nie poparta słownym komentarzem nie daje wyczerpujących informacji na temat postrzegania przez dziecko w SKUF kilku rzędów po tyle samo w każdym. Ponadto w sytuacji nietypowej, związanej z liczbą jednostkowych kwadratów mieszczących się w prostokątach umieszczonych na sieci kwadratowej dzieci stosowały mnożenie sporadycznie. Można więc przypuszczać, że w typowym układzie kilku rzędów po tyle samo część dzieci automatycznie stosuje wyuczony w szkole schemat: rozpoznaje sytuację prostokątnego układu i wie, że należy pomnożyć liczbę elementów pierwszej kolumny przez liczbę elementów pierwszego szeregu.

Literatura

1. Gruszczyk–Kolczyńska E.: *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, 1992, Warszawa
2. Outhred L.: *it The array: convention or confusion*, referat wygłoszony na ICME-7 (VII Międzynarodowy Kongres Nauczania Matematyki), 1992, Quebec (tekst rozdany uczestnikom)
3. Piaget J., Inhelder B.: *Psychologia dziecka*, Wydawnictwo Siedmioróg, 1993, Wrocław
4. Rożek B.: *Rozwój świadomości struktury rzędów poziomych i pionowych w szyku szeregowo-kolumnowym u dzieci w wieku od 6 do 9 lat*, *Dydaktyka Matematyki* 16, 1994, s. 39-72
5. Rożek B.: *O trudnościach związanych z rozumieniem pojęcia pola przez dzieci w wieku od 6 do 9 lat*, *Wyż. Szkoła Ped. Kraków, Rocznik Nauk.-Dydakt.* 172, *Prace Pedagogiczne* 17, 1995, s. 83-92
6. Rożek B.: *Struktury szeregowo-kolumnowe u dzieci w wieku od 6 do 8 lat*, *Dydaktyka Matematyki* 19, 1997, s. 29-46
7. Rożek B., Urbańska E., *Children's understanding of the row-column arrangement of figures*, *Proceedings of the CIEAEM 50*, Neuchâtel
8. Rożek B.: *Schemat myślowy szeregowo-kolumnowego układu figur u dzieci w wieku od 6 do 9 lat*, 1998, praca doktorska
9. Urbańska A.: *O zjawisku konserwacji u dzieci kończących naukę w „klasie zerowej”*, *Dydaktyka Matematyki* 10, 1989, s. 69-98