Autokontrola, jako ważna umiejętność w rozwiązywaniu zadań matematycznych

Anna Katarzyna Żeromska

ABSTRAKT: *Numerous authors emphasise a great rank of the ability to control one's own proceeding in the course of the process of solving mathematical problems and the role it plays in making the final result either a success or a failure (Ciosek, 1992; Krygowska, 1989; Schoenfeld, 1992; Vienner, 1997; Geiger, Galbraight, 1998).*

The present research results confirm the significance of this competence. It was approached by me as one of the key phenomena which inform the observer of the type of an attitude towards problems displayed by students who are subject to an examination. Such an approach enabled dividing the group of students participating in the examination into certain categories with respect to the type of self-control they displayed as well as to the degree in which they mastered the ability to control their own actions within the realm of solving mathematical problems.

Some examples of the categories mentioned above will be presented.

Wnioski, które są przedmiotem poniższych rozważań pochodzą z szerszych moich badań, które dotyczyły zjawiska badanego i opisywanego w psychologii (a także coraz częściej będącego przedmiotem zainteresowań dydaktyki matematyki) nazywanego *postawą*. W badaniach, o których mowa, zajmowałam się *postawą ucznia wobec zadań matematycznych*. Badane przeze mnie zjawisko jest tak bogatej natury, że badania moje podzielić musiałam na dwie części, z czego jedna z nich dotyczyła poznawczo-behawioralnego aspektu *postawy ucznia wobec zadania matematycznego*, a druga jej komponentu emocjonalno-motywacyjnego. Rozważania przedstawiane w niniejszym artykule pochodzą z części badań odnoszących do sfery poznawczych zachowań badanych przeze mnie uczniów.

Przed przystąpieniem do prezentowania wniosków z moich badań dotyczących tematu tego artykułu, przytoczę słowa Z. Krygowskiej podnoszące problemy związane z autokontrolą do rangi problemów badawczych dydaktyki matematyki:

> *Nasi uczniowie popełniają wiele błędów z powodu nieuwagi i braku autokontroli. W jakim sensie można mówić o profilaktyce i terapii w stosunku do takich błędów? Oczywiście matematyczna aktywność wymaga stosowania różnych specyficznych zabiegów autokontroli. Te techniki zresztą są ściśle związane z wielostronnym rozumieniem matematycznej dziedziny tej aktywności. Czy w nauczaniu matematyki uczymy opanowania takich technik autokontroli? Czy problem ten jest rzeczywiście uwzględniany w dydaktycznej teorii? (Krygowska, 1989, s. 146)*

Również A. Schoenfeld (1985) i S. Vienner (1997) podkreślają rolę autokontroli, jako często nieuświadomionego, a nieodzownego komponentu procesu rozwiązywania zadań. Podkreślają oni potrzebę badań dotyczących roli, jaką spełnia kontrola w efektywnym zachowaniu się rozwiązującego. V. Geiger i P. Galbraith (1998), przedstawiając wyniki swoich badań (dotyczących rozwiązywania zadań przez „nowicjusza" i „eksperta"), stwierdzają, że umiejętności autokontroli są wręcz <u>kluczem</u> determinującym osiągnięcie sukcesu w rozwiązywaniu zadań.

W trakcie opisywanych tu badań obserwowałam uczniów podczas rozwiązywania przez nich 20. różnych zadań matematycznych. Jednym z elementów ich pracy, na jaki zwracałam szczególną uwagę, była właśnie umiejętność kontrolowania wykonywanych przez nich czynności matematycznych. O tym, czy uczeń rewiduje swoje postępowanie oraz jakie fragmenty swojego rozwiązania poddaje on kontroli, często możemy zorientować się z reakcji tego ucznia na błąd przez siebie popełniony (dostrzeżony samodzielnie bądź wskazany przez obserwatora). Wtedy dokładnie widać, jakie elementy swojej pracy poddaje uczeń kontroli.

Obserwacje prowadzone podczas opisywanych badań pokazują, że są tacy uczniowie, którzy spontanicznie stosują (bardziej lub mniej poprawnie) techniki autokontroli. Jednakże są również i tacy, którzy tego nie robią, nawet zmuszeni pewnymi okolicznościami (np. po odkryciu popełnionego przez siebie błędu).

Badanych przeze mnie uczniów podzieliłam (w rezultacie analizy porównawczej), na następujące grupy:

1) ***uczniowie***, którzy w sposób obserwowalny, ***spontanicznie stosują techniki autokontroli;***

2) ***uczniowie, którzy nie czynią tego spontanicznie***, ale zmuszeni okolicznościami ***potrafią*** samodzielnie kontrolować swoje poczynania;

3) ***uczniowie, którzy nie stosują technik*** *autokontroli* (nie odczuwają potrzeby lub nie potrafią).

Wymienione powyżej grupy uczniów można w dalszym ciągu różnicować, np. biorąc pod uwagę to, czego rozważana autokontrola mogłaby dotyczyć[1].

Na potrzeby swoich badań rozważyłam następujące rodzaje autokontroli:

AW) ***autokontrola wyniku***;
AC) ***autokontrola czynności***;
AP) ***autokontrola planowania***.

W kontekście obserwowalnych zachowań ucznia przyjmuję, że przejawami *autokontroli wyniku* są np. czynności służące rachunkowemu sprawdzeniu poprawności zarówno wyników częściowych (otrzymywanych podczas rozwiązywania), jak i rezultatu końcowego, a także interpretacja wyniku w warunkach danych w zadaniu. Zdaję sobie jednak sprawę z tego, że te przykładowo wymienione czynności, będące przejawami autokontroli wyniku, są zróżnicowane. Interpretacja wyniku w warunkach zadania jest czynnością bardziej skomplikowaną i wymagającą większej świadomości rozwiązującego niż „zwykłe", rachunkowe sprawdzanie takiego wyniku. Uczeń może sprawdzać poprawność swoich rachunków np. podstawiając wyliczoną wartość zmiennej do równania - taką czynność nazwiemy *rachunkowym sprawdzeniem wartości wyniku.* W innej sytuacji uczeń będzie również sprawdzał wynik, ale sprawdzenie to dotyczyć będzie warunków określonych w zadaniu (np. wyliczona przez niego wartość niewiadomej w równaniu jest ułamkiem, a w poleceniu zadania była mowa o liczbach całkowitych) - refleksja tego typu to *interpretacja wyniku w warunkach zadania.*

O *autokontroli czynności* powiemy wówczas, gdy w zachowaniu ucznia można dostrzec symptomy tego, że „panuje" on nad czynnością wykonywaną w danym momencie (np. strategią lokalną). Na przykład: uczeń wymnaża przez siebie dwa wyrażenia algebraiczne znajdujące się w nawiasach i nie pomija składników tych wyrażeń - możemy powiedzieć, że kontroluje on wykonywaną przez siebie czynność. Autokontrola czynności może dotyczyć również bardziej skomplikowanych zamierzeń, np. rozważenia wszystkich możliwych przypadków (gdy układ warunków zadania może mieć kilka możliwości).

---

[1] Przykładowe rodzaje czynności brane pod uwagę podczas opisywanych badań to m.in.: kontrolowanie wykonywanych rachunków (sprawdzanie przez ucznia własnych obliczeń rachunkowych), sprawdzanie poprawności wyniku otrzymanego w zadaniu, kontrolowanie pojedynczych sekwencji rozwiązania, poszczególnych myśli, „podstrategii", realizowanie tzw. strategii zarządzającej (Schoenfeld, 1982), tzw. „rzut oka wstecz" (uświadomienie sobie skuteczności lub nieskuteczności obranej strategii, interpretacja końcowego wyniku w odniesieniu do warunków danych w zadaniu itp.) itd.

Autokontrola planowania to chyba rodzaj autokontroli najbardziej skomplikowany i wymagający wysokiej świadomości rozwiązującego. Jego przejawami mogą być m.in. zmiany rodzaju stosowanej w zadaniu strategii globalnej lub wyciąganie z własnych rozważań wniosków typu: taki sposób nie da mi wszystkich wyników. Ten rodzaj autokontroli A. Schoenfeld nazywa posiadaniem *strategii zarządzającej* (1982).

Podczas badań zaobserwowałam występowanie wszystkich trzech kategorii: AW, AC i AP. Komentarza wymaga jednak fakt, iż kategoria nazwana przeze mnie AP, jest rodzajem autokontroli najrzadziej występującym w pracy obserwowanych uczniów.
Najczęściej dzieci stosowały autokontrolę wyniku (AW) i to w jej najprostszej postaci, np. potrafiły (i często robiły to spontanicznie) sprawdzić, czy otrzymana liczba spełnia równanie, czy para liczb spełnia układ równań lub czy dana liczba jest podzielna zgodnie z warunkami zadania. Można wysunąć wniosek, iż ten rodzaj autokontroli jest chyba najlepiej kształcony w nauczaniu szkolnym.

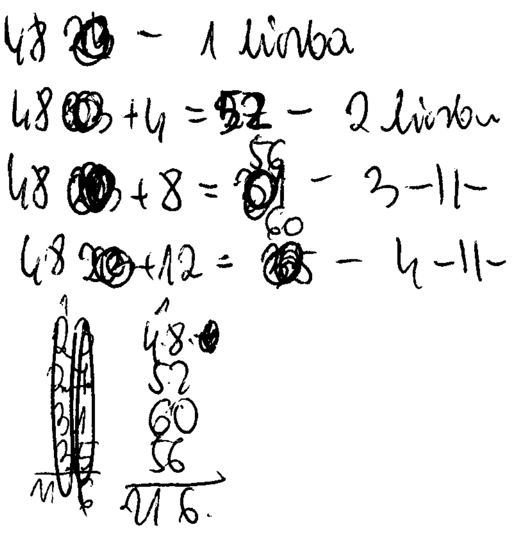
Jeśli rozważymy wcześniej wyróżnione grupy uczniów (1, 2 i 3), to możemy (analizując kategorie AW, AC i AP) dokonać następującej kategoryzacji zachowań uczniowskich, które wystąpiły podczas opisywanych badań:

U obserwowanych uczniów możemy wyróżnić następujące **rodzaje autokontroli**:								
autokontrola wyniku (AW)			**autokontrola czynności (AC)**			**autokontrola planowania (AP)**		
sponta-niczna (AW.1)	**wymu-szona (AW.2)**	**brak (AW.3)**	**sponta-niczna (AC.1)**	**wymu-szona (AC.2)**	**brak (AC.3)**	**sponta-niczna (AP.1)**	**wymu-szona (AP.2)**	**brak (AP.3)**

Rozważmy teraz niektóre przykłady poszczególnych zachowań w określonych powyżej kategoriach.

<u>Przykład zachowania zaliczonego do kategorii (AW.1)</u>

Przykładem dla tej kategorii (ucznia stosującego spontaniczną autokontrolę otrzymanego przez siebie wyniku) będzie następujący fragment rozwiązania zadania: *Suma czterech liczb nieparzystych jest równa 216. Znajdź te liczby.*



Widzimy, że w wyniku obliczeń uczeń otrzymał pewne rezultaty. Widać również, iż samo otrzymanie jakiegoś wyniku nie zadawala go w tej sytuacji. Odczuwa potrzebę sprawdzenia, czy uzyskane rozwiązania spełniają warunek zadania. Sumuje zatem otrzymane (niewłaściwe, bo parzyste) liczby i sprawdza czy ta suma równa się 216.

Przykład zachowania zaliczonego do kategorii (AW.2)

Przykładem takiego zachowania jest sytuacja zaistniała podczas rozwiązywania zadania, w którym należało podać liczbę kwadratów na rysunku (kwadrat o boku 4 jednostki został podzielony na kwadraty jednostkowe). Uczennica szybko i pobieżnie przelicza, następnie podaje odpowiedź *„jest ich 21”* potem pyta obserwatora *„tyle ma być?”*. Obserwator odpowiada: *„sprawdź”*. Uczennica dopiero wtedy rozpoczyna kontrolę dokonanego wcześniej zliczania kwadratów i mówi: *„no bo tak, tych pojedynczych jest 16, podwójnych 4, nie, zaraz, więcej!”* W tym momencie dziewczynka rozpoczyna nowe liczenie, tym razem już z użyciem kartki i ołówka. Potrafi więc skontrolować, czy otrzymany wynik jest dobry, ale następuje to dopiero po zachęceniu jej ze strony obserwatora.

Przykład zachowania zaliczonego do kategorii (AW.3)

Przykładem tu może być zachowanie zaobserwowane również przy okazji wspomnianego zadania o kwadratach. Uczeń podaje wynik: *„jest 17, jeden duży i 16 małych”* i uważa, że zakończył już rozwiązywanie zadania. Nawet wezwany przez obserwatora: *„sprawdź, czy to wszystkie”* uczeń odpowiada natychmiast: *„tak mi się wydaje”* i nie próbuje wykonać powtórnego przeliczania.

Przykład zachowania zaliczonego do kategorii (AC.1)

W tym miejscu pojawić się powinien przykład takiego postępowania, podczas którego można zauważyć kontrolowanie całej wykonywanej właśnie czynności. Najprostszym przykładem będzie tu następująca redukcja wyrazów podobnych (w trakcie rozwiązywania równania):

$x (x - 2) - y^2 - 2x = -9$

$x^2 - 2x - y^2 - 2x + 9 = 0$

$x^2 - 4x - y^2 + 9 = 0$

Widać, że w pierwszym i drugim z zapisanych wyrażeń występują jeszcze niezredukowane wyrazy zawierające zmienną x i uczeń (ponieważ kontroluje wykonywaną przez siebie czynność) zapisuje w końcu ostateczną wersję równania, którego bardziej zredukować już się nie da.

Przykład zachowania zaliczonego do kategorii (AC.3)

Przykładem dobrze ilustrującym tę kategorię zachowania jest postępowanie ucznia, który stanąwszy przed koniecznością rozważania w zadaniu wielu przypadków, nie kontroluje czynności wyliczania wszystkich możliwości dotyczących wyniku. Zapytany: *„więc nie będziesz mógł tego zadania zrobić?* odpowiedział: *„musiałbym długo siedzieć i wypisywać te wszystkie możliwości, a i tak nie wiem, czy wypisałbym wszystkie”*. Widzimy, że uczeń nie umie (bądź nie chce) skontrolować czynności wykonanej przez siebie.

Przykład zaliczony do kategorii (AP.1)

Na wstępie opisu powyższej kategorii zauważyć należy, iż jest to jeden z bardziej pożądanych rodzajów zachowań rozwiązujących zadania matematyczne na wszystkich poziomach zajmowania się matematyką. Mamy tu przecież do czynienia z sytuacją, kiedy rozwiązujący w pełni kontroluje nie tylko pojedyncze wykonywane przez siebie czynności, ale również konsekwentnie realizuje plan całego rozwiązania. Odnosząc się do terminologii G. Polya (1964) można by powiedzieć, iż w sposób istotny wystąpił tu etap „planowania rozwiązania” zadania. Przykładów zachowania uczniów, w których w sposób obserwowalny widoczne było planowanie i realizowanie „strategii zarządzającej” było (w skali mojego badania) niewiele i tylko u wybranych uczniów. Przedstawię jeden z ładniejszych przykładów takiego postępowania w pracy ucznia Tadeusza podczas rozwiązywania zadania: *Wyobraź sobie, że jesteś organizatorem konkursu. Na nagrody pocieszenia możesz przeznaczyć 105 czekoladek i chcesz, aby wszyscy uczestnicy konkursu takie nagrody otrzymali. Nagroda dla chłopca to 4 czekoladki, a dla dziewczynki 5 czekoladek. Ilu uczestników możesz zaprosić do udziału w konkursie?*

Popatrzmy na zapis, który powstał w trakcie rozwiązywania zadania przez Tadeusza:

x - ilość chłopców
y - ilość dziewczynek

$$4x+5y=105$$

1	• 4	101
2	• 8/97	
3	12	93
4	16	89
5	20	85
6	24	
10	40	65
15	60	45
20	80	25
25	5	
30		
0		

		21
5 ch	17 dziewczyn	22
10 ch	13 dziewczyn	23
15 ch	9 dziewczyn	24
20 ch	5 dziewczyn	25
25 ch	1 dziewczyna	26
0 ch	21 dziewczyn	21

Interpretując postępowanie Tadeusza można zauważyć, że uczeń ten (podobnie jak większość rozwiązujących omawiane zadanie), po przeczytaniu jego tekstu, przyporządkował sobie rozwiązywane zadanie do grupy zadań o znanym, typowym przebiegu rozwiązania. W momencie, kiedy chłopiec zorientował się, że schematyczna droga postępowania nie skutkuje, wypowiada znamienne słowa: *„teraz pomyślmy”*. Te słowa i pewne ożywienie w zachowaniu pozwalają przypuszczać, że chłopiec w tym momencie zainteresował się nową, nietypową sytuacją. Tadeusz powraca do tematu zadania i zaczyna niestandardowe badanie zależności wynikającej z tego tematu. Jego strategia postępowania od tego momentu polega *indukcyjnym badaniu* równania. Chłopiec bierze więc pod uwagę kolejne liczby naturalne i bada odpowiednie krotności liczby 4. W momencie zapisania warunku dla 6. krotności obrana przez ucznia strategia znowu ulega zmianie. Tadeusz nie bada teraz wszystkich kolejnych wielokrotności, a jedynie 10-krotność, 15-krotność, 20-krotność itd. Chłopiec rozpatruje zatem te przypadki, kiedy różnica liczby 105 i odpowiedniej krotności liczby 4 będzie miała w pozycji jedności 0 lub 5. Ostatnią możliwością wziętą przez ucznia pod uwagę jest liczba 30 i po jej wyeliminowaniu Tadeusz, podsumowując swoje dotychczasowe rozważania, powraca do tematu zadania i mówi: *Ale zaraz, jakie było pytanie?*. Następnie sprawnie, spośród wszystkich rozpatrywanych możliwości, wybiera te, które stanowią odpowiedź do pytania zawartego w rozwiązywanym zadaniu.

W przebiegu opisanego rozumowania widać, iż uczeń podczas drugiego podejścia do rozwiązania ma jasno skrystalizowaną koncepcję swojej pracy – badanie odpowiednich podzielności. Pomysł badawczy realizowany jest przez niego z pełną konsekwencją, a końcowa interpretacja wyników w warunkach zadania dowodzi, iż jest to od początku do końca planowe i kontrolowane postępowanie.

Przedstawione w niniejszym artykule rezultaty badań są fragmentaryczne i niepełne (ze względu na objętość artykułu). Chciałabym podkreślić, iż jedne z ważniejszych wniosków, jakie nasuwają się po analizie prac i zachowań dzieci odnośnie ich samokontrolowania się w trakcie rozwiązywania przez nie zadań matematycznych, są następujące:

- Wielu uczniów nie odczuwa potrzeby kontrolowania wykonywanych przez siebie czynności matematycznych oczekując od nauczyciela ciągłego sprawdzania ich poprawności.
- Umiejętność autokontroli nie jest (w większości przypadków) umiejętnością naturalnie „wrodzoną” człowiekowi. Wymaga ona planowego nauczania. Jednak pamiętać należy, iż występują takie sytuacje, że dzieci uczone jednakowo, w różnym stopniu stosują (i z wyraźnie różną spontanicznością) techniki autokontroli. Zatem być może jest to umiejętność w pewnym sensie jednak „zadana przez naturę człowieka”.
- Bardzo ważnym zadaniem badawczym, zarówno dla praktyki, jak i teorii nauczania, jest odpowiedź na pytania: co robić, aby nauczanie matematyki wyposażało uczniów w tak ważną dla nich umiejętność? Czy da się jej uczyć „mimochodem”, czy też musi to być świadomy i planowy proces? A jeśli tak, to jak go organizować?

Te i inne pytania w większości nie doczekały się wciąż jeszcze całkowicie satysfakcjonujących odpowiedzi. Nadal zatem aktualne jest stwierdzenie A. Shoenfelda, który badając skuteczność metod świadomego uczenia heurystyki rozwiązywania zadań, stwierdza:

> *Przed nami dużo pasjonującej pracy, a w miarę postępów pytania (badawcze) stają się coraz ciekawsze (Schoenfeld, 1982, s. 172).*

Literatura:

1. Geiger, V., Galbraith, P.: 1998, *Developing a Diagnostic Framework for Evaluation Student Approaches to Applied Mathematics Problems,*

International Journal of Mathematics Education, Science and Technology, 29, 533-559.
2. Krygowska, A. Z.: 1989, *Zrozumieć błąd w matematyce*, Dydaktyka Matematyki 10, 141-147.
3. Polya, G.: 1964, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.
4. Schoenfeld, A. H.: 1982, *Strategia rozwiązywania zadań w uniwersyteckim nauczaniu matematyki*, w: Góralski, A. (red.), Zadanie, metoda, rozwiązanie, Zeszyt 4, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
5. Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical problem solving*, Academic Press, INC.
6. Vinner, S.: 1997, *The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought process in mathematics learning*, Educational Studies in Mathematics, 34, 97-129.
7. Żeromska, A. K. 2000, *Wybrane cele nauczania matematyki a proces rozwiązywania zadań*, niepublikowana rozprawa doktorska, Kraków.