

# **Rozumowanie sprzyjające uogólnianiu i stosowaniu w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10-14 lat**

Lidia Zaręba

*ABSTRACT: The paper presents an extract from the wider research which concerned the types of generalisations employed by children aged 13-14, these children's capability of applying a letter symbol during the process of generalising, their methods of proceeding and difficulties they come across in the course of the process of solving problems designed to lead to generalising.*

*The study on which I focus my attention below was aimed at classifying typical methods of proceeding which represent the reasoning of tested pupils and at determining what influence a particular method of proceeding may have on the final outcome of these pupils' work.*

*After a very short introduction into the research issues, the organisation of the study and the method and tools applied are presented, followed by the summary of the results obtained by analysing the solutions of the problems of the test.*

*The results of the research suggest that the type of reasoning conducted by a pupil influences the final result of this pupil's work. Presumably, the geometrical type of reasoning produces a positive effect on the process of generalising and on ability to describe a regularity noticed by a pupil with the aid of a letter symbol.*

## **1. PROBLEMATYKA BADAWCZA**

Podstawy epistemologiczne kształtowania pojęć matematycznych a szczególnie poglądy na ich abstrakcyjny charakter są główną przyczyną reform programów oraz sposobów nauczania tego przedmiotu. Obecnie w nauczaniu matematyki główny nacisk przenosi się z opanowania wiedzy na opanowanie metody. Chodzi więc o aktywność twórczą, o czynny i świadomy udział ucznia w odkrywaniu pojęć, wzorów, twierdzeń, dowodów, w schematyzowaniu sytuacji, w ich matematyzowaniu czy **uogólnianiu** (Krygowska, 1981, s.13-14).

**Uogólnianie w matematyce** rozumiane jest jako aktywność a zarazem narzędzie do tworzenia pojęć i twierdzeń, **uogólnienie** to wynik

procesu uogólniania czyli pewne pojęcie, sąd, twierdzenie, dostrzeżona i sformułowana prawidłowość, hipoteza.

W literaturze dydaktyczno – matematycznej mówi się o **uogólnianiu pojęć i uogólnianiu twierdzeń**. W prezentowanych badaniach interesowałam się specyficznym rodzajem **uogólniania twierdzeń**, tj. **uogólnianiem typu indukcyjnego**. Badałam proces, w którym uczeń miał po wykonaniu ciągu prób matematycznych dostrzec pewną prawidłowość w rezultatach tych prób i sformułować hipotezę matematyczną.

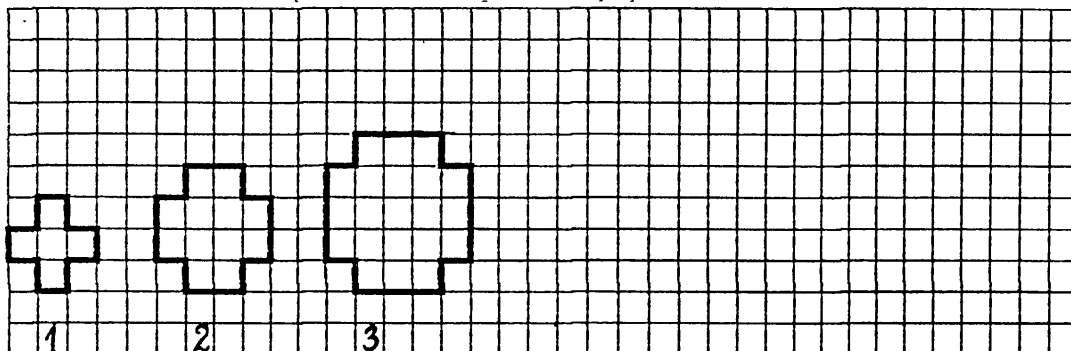
## 2. OPIS BADAŃ

W artykule przedstawiam fragment szerszych badań, których celem było między innymi wyróżnienie typowych sposobów postępowania obrazujących myślenie uczniów w wieku 13–14 lat podczas rozwiązywania zadań ukierunkowanych na uogólnianie oraz określenie wpływu danego postępowania na ostateczne efekty pracy tych uczniów.

Prezentowane badania opierają się na analizie rozwiązań specjalnie skonstruowanych ciągów zadań (testów). Narzędzie badawcze stanowił dwuczęściowy test „Krzyże” wymagający od ucznia obliczenia obwodów i pól figur w kształcie krzyża. Część 1. testu z zamierzenia nie sugerowała sposobu rozwiązania; w części 2. uczeń taką sugestię otrzymał w postaci dwóch „geometrycznych” sposobów rozwiązania zadania: sposobu Magdy i sposobu Przemka.

Test rozwiązywali w roku szkolnym 1996/97 i 1997/98 uczniowie w wieku 13-14 lat pochodzący ze szkół polskich i czeskich. Badaniu poddanych zostało 90 uczniów polskich i 114 uczniów czeskich. Z analizy wyeliminowane zostały prace, które w moim przeświadczeniu przemawiają za brakiem rozumienia przez ucznia pojęcia obwodu lub pola, bądź badany nie dostrzeża analogii w kształcie kolejnych krzyży, nie rozumie jak powstaje rysunek czwartego i piątego krzyża. Ostatecznie analizie poddanych zostało 87 prac polskich i 78 prac czeskich.

- 1) Dorysuj czwarty i piąty krzyż z tej serii.  
Oblicz obwód D i pole P każdego z krzyży.



D=..... D=..... D=.....  
P=..... P=..... P=.....

Wyniki zapisz w tabeli.

Numer krzyża	1	2	3	4	5	
Obwód - D						
Pole - P						

- 2) Bez rysowania odgadnij obwód i pole szóstego krzyża.  
Napisz słownie, w jaki sposób to odgadłeś.

.....  
.....  
.....

- 3) Uzupełnij tabelkę.

Numer krzyża	7	8	9	10	20	...	n
Obwód - D							
Pole - P							

Jak obliczałeś obwód krzyża o numerze n?

.....  
.....  
.....

Jak obliczałeś pole krzyża o numerze n?

.....  
.....  
.....

TEST „KRZYŻE” cz.1 – wersja polskojęzyczna

Magda i Przemek obliczali obwód  $D$  i pole  $P$  krzyży różnymi sposobami.

Oto co napisała Magda:

Obliczam obwód: mnożę długość wyróżnionych ramion krzyży przez 4.

Obliczam pole: do pola zamalowanego kwadratu dodaje pola czterech białych ramion krzyża.

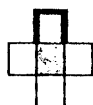
Oto co napisał Przemek:

Obwód krzyża liczę tak jak obwód kwadratu, w którym się on mieści, bo przecież długość jednego ramienia jest taka jak długość boku tego kwadratu.

Pole: Gdybym wyciął z dorysowanego kwadratu 4 narożne kwadraciki, to miałbym krzyż. Dlatego obliczę pole kwadratu i odejmę 4.

Uzupełnij notatki Magdy i Przemka.

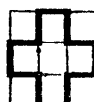
(1)



$$D = 4 \cdot 3 =$$

$$P = 1 + 4 =$$

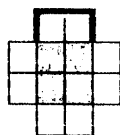
(1)



$$D = 4 \cdot 3 =$$

$$P = 3 \cdot 3 - 4 =$$

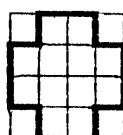
(2)



$$D = 4 \cdot \dots =$$

$$P = 2 \cdot 2 + 4 \cdot \dots =$$

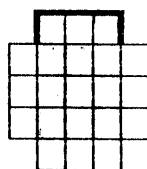
(2)



$$D = 4 \cdot \dots =$$

$$P = 4 \cdot \dots - 4 =$$

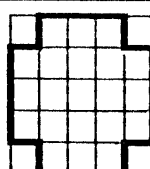
(3)



$$D = 4 \cdot \dots =$$

$$P = \dots \cdot \dots + 4 \cdot 3 =$$

(3)



$$D = \dots \cdot 5 =$$

$$P = \dots \cdot \dots - \dots =$$

Oblicz tymi sposobami obwód i pole dla krzyża o numerze: 4, 5, 10, ...,  $n$ .

(4)

(4)

(5)

(5)

(10)

(10)

(n)

(n)

Uzasadnij odpowiedzi z ostatniego przykładu (n).

TEST „KRZYŻE” cz.2 – wersja polskojęzyczna

### 3. WNIOSKI Z BADAŃ

W prezentowanych badaniach interesowało mnie jaką formę przyjmie uogólnienie dokonane przez ucznia i czy wyrazi je on stosując symbol literowy.

W oparciu o rozwiązania zadań wymagających od ucznia obliczeń w sytuacji ogólnej  $n$  wyróżniłam trzy rodzaje uogólnień stosowane przez uczniów badanej grupy: uogólnianie poprzez przykład polegające na rozwiązaniu zadania dla konkretnej, obranej przez ucznia liczby, uogólnianie werbalne opisujące czynności ucznia i uogólnianie symboliczne ujmujące zależności w postaci wzoru ze zmienną (terminologia własna na użytek przeprowadzonych badań). Prawdopodobnie uogólnianie poprzez przykład jak i uogólnianie werbalne są dla ucznia badanej grupy łatwiejsze niż uogólnianie werbalne, co oznacza, że uogólnienie dokonane przez niego ma w głównej mierze charakter przykładu paradygmatycznego bądź werbalnego opisu zależności.

W wyniku analizy rozwiązań zadań pierwszej części testu „Krzyże” wyróżniłam cztery charakterystyczne sposoby postępowania obrazujące myślenie badanych uczniów a sprzyjające próbom symbolicznego zapisu tkwiącej w zadaniach prawidłowości:

1. **rozumowanie numeryczne** oparte na prawie rekurencji - uczeń zauważa, że obwód każdej kolejnej figury zwiększa się o 4 jednostki,
2. **rozumowanie geometryczne** polegające na zauważeniu regularności w toku obserwacji figur geometrycznych, przykładowo badany sprowadza obwód krzyża do obwodu najmniejszego kwadratu, w którym krzyż ten się mieści.
3. **rozumowanie numeryczne i geometryczne** (występujące równolegle w pracy ucznia).
4. **trafianie, przeliczanie lub brak określenia toku swego rozumowania** przez ucznia.

Pierwsza część testu „Krzyże” stawiała ucznia w sytuacji otwartej ze względu na sposób postępowania prowadzący do rozwiązania zadań. W sytuacji tej bliższe uczniom było rozumowanie numeryczne. Przykładowo w przypadku zadań dotyczących obwodu samą rekurencję dostrzegło 69 spośród 87 badanych uczniów polskich, jedynie drogę geometryczną – 4 osoby, obie drogi – 6 osób.

Analiza rozwiązań zadań części 1. testu sugeruje wpływ sposobu rozumowania prowadzonego przez ucznia na efekt końcowy jego pracy. Dla badanej próbki uczniów zarysowała się następująca prawidłowość: największą zdolność do uogólnienia symbolicznego lub werbalnego zaprezentowali w swoich pracach ci, którzy dostrzegli obie drogi

rozumowania: numeryczną i geometryczną, mniej wydajne okazało się stosowanie wyłącznie rozumowania geometrycznego; dostrzeżenie jedynie drogi wykorzystującej rekurencję dało wyniki jeszcze niższe.

Możliwość obserwacji wpływu sposobu rozumowania na ostateczne efekty pracy uczniów daje także analiza rozwiązań zadań drugiej części testu „Krzyże”. W części tej zasugerowano badanym geometryczną drogę postępowania. Dla obu części testu zestawiałam liczby uczniów, którzy dokonali odpowiedniego rodzaju uogólnienia. W przypadku drugiej części testu zestawienie odnoszę osobno do zadań rozwiązywanych sposobem Magdy, osobno do zadań rozwiązywanych sposobem Przemka. Przykładowe zestawienie w obrębie zadań dotyczących pola krzyża nr  $n$  podaję w tabeli 1.

Test	Uogólnienie			
	Poprzez przykład	Wербalne	Symboliczne	Brak
cz.1	2	5	14	66
cz.2- sposób Magdy	0	2	44	41
cz.2- sposób Przemka	1	1	27	58

TABELA 1. Liczbowy rozkład odpowiedzi w przypadku pola figury o numerze  $n$  (na podstawie próbki uczniów polskich)

W wyniku ukierunkowania badanych na rozumowanie geometryczne (co zrobiono w części 2. testu) wzrosła liczba uczniów, którzy osiągnęli uogólnienie symboliczne. Taką samą zależność stwierdziłam analizując zadania dotyczące obwodu.

Analiza pisemnych rozwiązań zadań testów sugeruje, iż sposób rozumowania prowadzony przez badanego ma wpływ na efekt końcowy jego pracy. Prawdopodobnie rozumowanie geometryczne szybciej niż wyłącznie rozumowanie numeryczne prowadzi do uogólnienia symbolicznego czy werbalnego. Na tym etapie badań wniosek ten może mieć jedynie hipotetyczny charakter. Badając uogólnianie jako proces, nie wystarczy oprzeć się wyłącznie na analizie rozwiązań zadań testu. Taka metoda pozwala jedynie postawić hipotezę wstępną. Nasuwa się potrzeba uzupełnienia jej i weryfikacji w wyniku obserwacji indywidualnych.

*Literatura cytowana:*

1. Krygowska, Z.: Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki, W: Dydaktyka Matematyki 1, 1981.