Programátor a počítač v konštrukčných úlohách

Viera Vodičková

ABSTRACT*: Problems of construction notation are treated with in the present paper. Author's experience with a game „Programmer and Computer" is described. The game was proposed to properly motivate students for the necessity of exact mathematical notation of their thoughts.*

Konštrukčné úlohy majú v školskej matematike významné postavenie. Väčšina žiakov si pod pojmom „konštrukčné úlohy" predstaví zdĺhavý (a často aj nudný) zápis celej konštrukčnej úlohy, ktorý obsahuje náčrt, rozbor, zápis konštrukcie, konštrukciu, diskusiu (záver) a niekedy aj skúšku. Moje skúsenosti z výuky konštrukčných úloh ukazajú, že klasický postup žiaka pri riešení je taký, že si na základe zadania (zápisu) načrtne obrázok, potom sa zamyslí, objaví potrebnú zákonitosť, potrebnú množinu bodov a pod. (teda urobí rozbor - aj keď ho nezapíše) a zostrojí konštrukciu. Potrebuje sa presvedčiť, či sa podľa objavenej zákonitosti dá konštrukcia naozaj uskutočniť. Niekedy sa pustí do konštrukcie, aj keď ešte nepozná zákonitosť, a experimentovanie s pravítkami a kružidlom mu dopomôže úlohu vyriešiť. A až potom spätne píše zápis postupu konštrukcie, najčastejšie preto, lebo to od neho vyžaduje učiteľ. Väčšina žiakov nevidí zmysel v zdĺhavom zapisovaní niečoho, čo je už jasné. Načo je nám potom potrebný zápis? Ako učiteľ chápem zápis postupu konštrukcie ako organickú súčasť riešenia. Jedným z jeho cieľov je naučiť žiakov dôsledne a presne používať formálnu geometrickú symboliku. To však nie je jediný význam zápisu. Zápis môže pomôcť aj žiakom. Umožňuje im zaznamenávať si svoje postupy, dôkladne premyslieť a upresniť každý krok konštrukcie. Zaoberať sa otázkami: *Nepoužil som niečo, čo som ešte nezostrojil?, Patrí tento bod skutočne tomuto geometrickému útvaru alebo len jednej jeho časti?, Dá sa táto rovnobežka jednoznačne zostrojiť?*

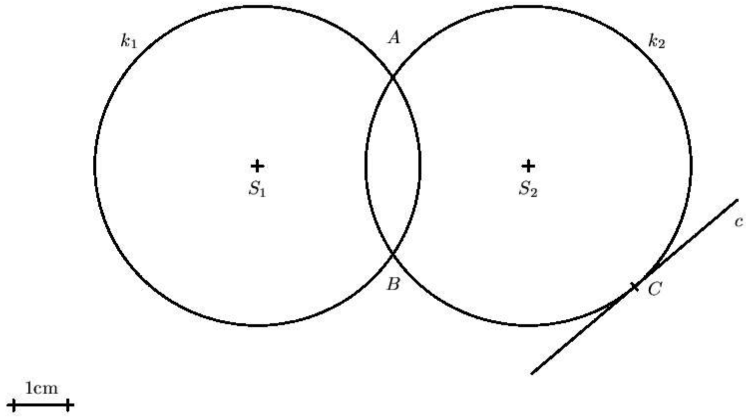
Keďže pri bežných úlohách postup konštrukcie aj samotnú konštrukciu robí ten istý žiak, chybný zápis postupu nemusí ovplyvniť výsledok konštrukcie. Pokúsila som sa netradičnou formou zvýšiť záujem žiakov o zápis v konštrukčných úlohách. Mojím cieľom bolo presvedčiť žiakov, že zápis konštrukcie nie je len jednou (zbytočnou) časťou konštrukčnej úlohy, ale je to postup, podľa ktorého sa konštrukcia naozaj zostrojiť dá, aj keď nebudeme poznať zadanie a rozbor úlohy.

Zaviedla som na vyučovaní súťaž POČÍTAČ A PROGRAMÁTOR. Žiakov rozdelíme do dvojíc (vhodné je posadiť ich za sebou, aby si nevideli do zošita). Jeden z nich je programátor a druhý počítač. Obaja majú k dispozícií rysovacie pomôcky (pravítka, ceruzku, kružidlo, uhlomer). Programátor dostane od učiteľa narysovaný obrázok a jeho úlohou je napísať postup konštrukcie, ktorý vedie k zostrojeniu zhodného obrázka. Za zhodný sa považuje obrázok v zmysle v škole definovanej zhodnosti: *Každé dva obrazce, ktoré možno premiestniť tak, že sa kryjú, nazývame zhodné.* [2]. (Pod pojmom premiestniť rozumieme posunúť, otočiť, príp.zrkadlovo posunúť.) Postup má byť napísaný v bodoch (tak ako je zvykom v konštrukčnej úlohe) a používať môže len známe geometrické symboly. Na určenie potrebných vzdialeností, prípadne uhlov, môže použiť pravítka, uhlomer a pod.. Tento postup potom odovzdá druhému žiakovi - počítaču, ktorý presne podľa vyhotoveného postupu narysuje obrázok. Ak počítač niektorý krok nevie vykonať (napr. zlé označenie, zle udaná veľkosť), skončí. Ak niektorý bod nie je jednoznačný, t.j. vedie k viacerým možnostiam, počítač si ľubovoľne vyberie jednu z nich. (Programátor by s tým však mal počítať!) Pri hre nie je dovolené vzájomné dorozumievanie sa medzi programátorom a počítačom. Programátor nemôže slovne upresňovať svoj zápis a počítač sa nemôže pýtať na objavené nezrovnalosti.

Keďže postup a konštrukciu robia dvaja ľudia, nie je možné navzájom si sledovať myšlienky. Preto záleží hlavne na programátorovi, aby jeho postup bol zrozumiteľný, jednoznačný a správny.

Hru som realizovala so žiakmi sekundy a tercie osemročného gymnázia. Uvádzam niekoľko typov aj so stručným komentárom. Úlohy nepatrili ku štandardným geometrickým konštrukciám, preto pri zostavovaní postupu museli žiaci využiť aj svoju nápaditosť a tvorivosť.

Od klasických školských konštrukcií s odlišovali aj tým, že neboli dané prvky, z ktorých sa mala konštrukcia uskutočniť. Žiak si ich zo zadaného obrázka musel zvoliť sám a meraním určiť ich veľkosť.



obr. 1

Prvá úloha bola zadaná podľa obr.1. Konštrukciu možno rozdeliť na dve časti. V prvej ide o zostrojenie dvoch pretínajúcich sa kružníc k_1, k_2 a označenie ich priesečníkov ako A, B. Túto časť zvládli všetci, napríklad týmto spôsobom:

1. $k_1(S_1, r = 3cm)$
2. $S_{2;} |S_1S_2| = 5cm$
3. $k_2; k_2(S_2, r = 3cm)$
4. $A, B; k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$

Programátor má aj inú možnosť: začať s úsečkou S_2S_1, $|S_2S_1|$= 5 cm a potom zostrojiť $k_{1,}$ k_2. Niektorí v snahe získať čo najvernejší obrázok, t.j., aby aj body boli na správnom mieste, rozšírili 4.bod takto:

$A, A \in k_1 \cap k_2(hore)$

$B, B \in k_1 \cap k_2(dole)$

Ak však počítač zostrojil úsečku S_1S_2 zvisle, pojmy „hore - dole“ preňho nemali zmysel.

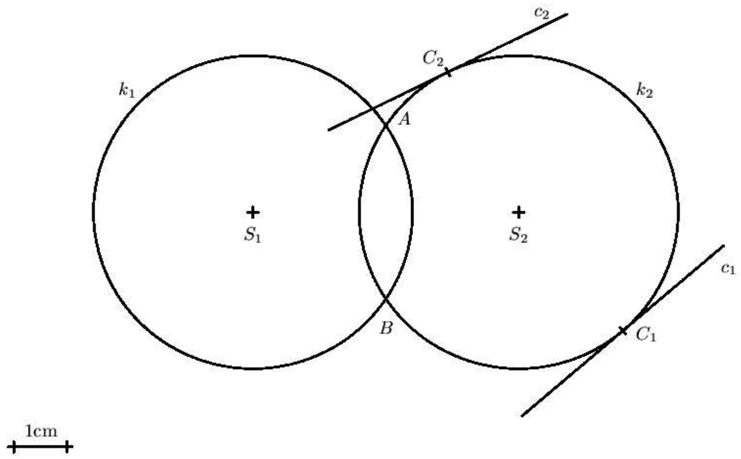
Druhá časť pozostávala z konštrukcie bodu C a dotyčnice c. Aby bol výsledný obrázok zhodný s pôvodným, treba uviesť presnú polohu bodu C. Nestačí len pokyn $C, C \in k_2$. V žiackych postupoch sa vyskytli viaceré možnosti:

a) $C; C \in k_2 \cap k_3; k_3(B; 4{,}5cm)$

b) $C; C \in k_2 \cap \overrightarrow{S_2X}; |\angle S_1S_2X| = 132°$

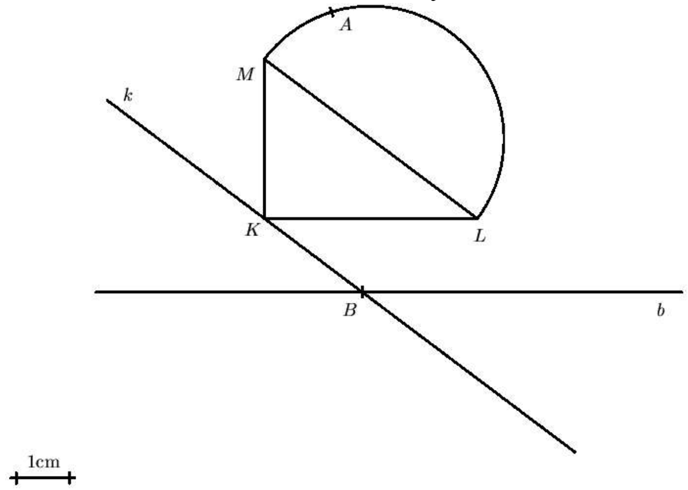
c) $C; C \in k_2 \cap k_4; k_4(S_1; 7{,}5cm)$

Každá z týchto možností vedie však k dvom rôznym bodom C (obr. 2), z ktorých vždy len bod C_1 vyhovuje zadaniu, t.j. dostaneme zhodný obrázok. Kým v prípadoch b) a c) je druhé riešenie symetrické, ale aj tak nie zhodné vzhľadom na polohu bodov A a B, v prípade a) je poloha bodu C_2 úplne nesprávna.



obr. 2

Vyriešiť túto situáciu možno použitím polroviny S_1S_2B alebo zlúčením podmienok a) a b) alebo a) a c). Na zostrojenie dotyčnice použili všetci len tento príkaz $C, C \in c -$ dotyčnica. Konštrukciu dotyčnice považovali za veľmi jednoduchú na to, aby ju museli rozpísať. Každý žiak v úlohe počítača ju aj ako samozrejmosť vykonal. Na zachovanie prísnej symboliky pritom stačilo nahradiť slovo „dotyčnica“ vzťahom $c \perp S_2C$.

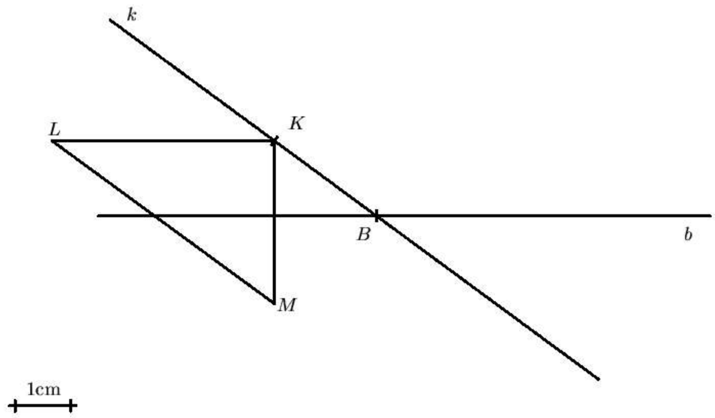


obr. 3

Zadanie druhej úlohy znázorňuje obr. 3. Výsledok konštrukcie závisel od voľby začiatočného kroku. Jednoduchšie bolo začať s trojuholníkom KLM a potom narysovať priamky k, b ako rovnobežky so stranou ML, prípadne KL. Napriek tomu väčšina žiakov začala s priamkami k, b, a až potom prešla k trojuholníku. Tým však úloha získala viacero riešení. Udanie polohy bodov nebolo jednoznačné. Napríklad podľa tohto postupu:

1. b
2. $B; B \in b$
3. $k; B \in k; |\angle k; b| = 143°$
4. $K; K \in k; |KB| = 2{,}3cm$
5. $KL; |KL| = 4cm; KL \| b$
6. $KM; |KM| = 3cm; KM \perp KL$
7. KLM

dostaneme 8 možností umiestnenia trojuholníka *KLM,* pričom len dva z nich majú správnu polohu vzhľadom na priamky *k*, *b* (t.j. obrázok je zhodný s pôvodným). Podľa pravidiel hry si počítač môže vybrať ľubovoľnú z možností a tak podľa tohto postupu môže dospieť napríklad aj ku konštrukcii podľa obr. 4.



obr. 4

Pri konštrukcii trojuholníka bolo možné sledovať niekoľko javov. Napriek tomu, že žiaci už ovládali základné konštrukcie trojuholníkov (sss, sus, usu), nepoužili získané vedomosti. Preto sa konštrukcie počítačov dostávali do mnohých problémov:

1. b
2. $k; |\angle k; b| = 143°$
3. $B; B \in b \cap k$
4. $K; |BK| = 23mm; K \in k$
5. $\angle BKL; |\angle BKL| = 37°$
6. $\angle BKM; |\angle BKM| = 127°$
7. $ML; |ML| = 5cm\ldots..$

Počítač pracujúci podľa tohto postupu v 7.bode skončí. Body *M*, *L* má už ľubovoľne zostrojené na ramenách uhlov podľa 5. a 6.bodu, a zrazu sa dozvie, že $ML;|ML| = 5cm\ldots$ Čo teraz? Spätná reakcia programátora bola: „Tak si ich teraz preznač!“ Počítač jednak nemôže sa vrátiť späť a jednak ostáva záhadou ako nájsť na ramenách uhlov dva body, ktorých vzdialenosť je 5 cm. (Takých možností je predsa nekonečne veľa!)

Problémy robilo aj zostrojenie polkružnice s bodom *A*. Pre polkružnicu nemáme zavedenú dohodnutú jednoduchú značku, preto každý si musel pomôcť ako vedel. Tu sú nápady žiakov:

- polkružnica, *S*=stred úsečky *ML, r*=|*MS*|
- polkružnica (*S, r*= *0,5*|*LM*|*)*
- $k_{0,5}, k_{0,5}(S, r = 2{,}5cm)$ (Index 0,5 má zrejme charakterizovať polkružnicu.)
- „V polke úsečky *LM* pichni kružidlo a urob polkružnicu s polomerom 2,5cm . Kraje kružnice sú *M a L*.“

Žiaci s úlohami pracovali so záujmom, netrpezlivo čakali na konfrontáciu konštrukcie s pôvodným obrázkom. Niektorí boli voči sebe dosť kritickí, aj keď mohli odhadnúť výsledok a domyslieť si, čo ich nepozorný spolužiak v úlohe programátora zabudol, správali sa striktne ako počítač - presne podľa postupu. Programátori boli často prekvapení, že ich postup sa nedá realizovať tak, ako si to predstavovali. Uvedomili si ako len nejaká „maličkosť“ dokáže zmeniť výsledok úlohy. Presnosť matematického zápisu je potrebná, podporuje aj logické a presné matematické vyjadrenie a v neposlednom rade zveľaďuje aj matematickú kultúru.

Literatúra:

1. M.Hejný a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN Bratislava 1990
1. J. Mullerová, J. Čižmár, J. Divíšek, V. Macháček, *Matematika pre 7.ročník základnej školy* , SPN Bratislava 1990