

# **Jak dziecko matematyzuje swoje otoczenie?**

Aleksandra Urbańska

*ABSTRACT: Mathematization is one of the components of a mathematical activity. Even several years old children are capable of doing it. This paper shows the examples of children's initial mathematization of situations from the real world as well as problems of arithmetic.*

## **Wstęp**

Czynność matematyzowania jest składową aktywności matematycznej na wszystkich poziomach uczenia się matematyki. "Matematyzacją w nauczaniu będziemy nazywać bądź 1. konstrukcję matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków, ujętego przez analizę rzeczywistej, wyobrażonej lub już abstrakcyjnej sytuacji, lub sprecyzowanego w innej dziedzinie pojęć np. w innej nauce, bądź 2. konstrukcję jeszcze na w pół pogładowego schematu myślowego, który w dalszym ciągu nauki mógłby być przekształcony i włączony do pełnego już schematu matematycznego. [...]"

Matematyzacją wstępną, prymitywną, pogładową nazywamy konstrukcję schematu myślowego jakiegoś układu rzeczywistych stosunków, którego nie można jeszcze uważać za schemat matematyczny włączony do pewnej teorii matematycznej, ale którego konstrukcja jest od początku ukierunkowana na właściwą późniejszą matematyzację. [...] Dla nauczania matematyki ta właśnie faza wstępna, prymitywna jest bardzo ważna. Błędy dydaktyczne tu popełnione mają bowiem konsekwencje bardzo głębokie i są przyczyną wielu trudności pojęciowych uczniów." [Krygowska, 1979, 48-49]

## **Spontaniczna matematyzacja pierwotna**

Już kilkuletnie dzieci są zdolne do spontanicznej prymitywnej matematyzacji własnych konkretnych doświadczeń i intuicji, próbują użyć świeżych ziarenek swej wiedzy matematycznej do schematyzowania i porządkowania rzeczywistości a potem także do modelowania układu stosunków zawartych w arytmetycznych zadaniach tekstowych.

Przykład 1. [obserwacja Marii Kisiel]

Marcin (4;06) uczęszcza do przedszkola. Jego rodzice są humanistami. Uważają, że okres przedszkolny jest okresem zabawy i spontanicznego rozwoju, wspierają dostrzeżone u syna zdolności artystyczne ( w domu słucha się muzyki klasycznej, jest

instrument muzyczny, są albumy o sztuce), nie zachęcają go natomiast do wysiłku intelektualnego. Opisana niżej rozmowa jest dla Marcina pierwszą indywidualną rozmową na temat liczenia. Okazuje się, że chłopiec wie, że u obu rąk ma 10 palców, potrafi przy ich pomocy obliczać, ile to jest: 5 palców dodać 3 palce, 10 palców odjąć 7 palców itp.

Badacz prosi: "Podaj mi 7 kredek!" Marcin odlicza 5 kredek, chwilę się zastanawia i dokłada następne kredki mówiąc: "szósta kredka, siódma kredka".

Badacz: "Przynieś mi o dwie kartki papieru więcej, niż mam kredek!" Marcin przelicza jeszcze raz podane kredki i pytając stwierdza: "Jest siedem, tak?" Następnie prostuje siedem palców bez ich odliczania, dodaje dwa palce i nic nie mówiąc odlicza kartki papieru. Podając je mówi: "Proszę, dziewięć kartek."

Marcin umie przeliczać kolejno palce, które traktuje jako jednostki, umie przy ich pomocy dodawać i odejmować. Nową sytuację "7 kredek i o dwie kartki więcej" potrafił poprawnie zastąpić znanym schematem "palcowym" i wykonać polecenie.

Przykład 2.

W tym samym dniu po południu Marcin pyta rodziców: "Kiedy będzie dobranocka?"

"Dopiero jest godzina szesnasta"- odpowiada tato.

"Szesnasta, czyli która po kolei do dziesięciu?"- pyta Marcin.

"Czwarta" - odpowiada tato.

"Bajka jest o siódmej" - przypomina Marcin i odlicza siedem palców. "Teraz jest czwarta godzina" - zgina cztery palce. "Zostały mi trzy palcowe godziny!"

Marcin chciał wiedzieć, kiedy będzie bajka w telewizji, a dokładniej, jak długo musi na nią czekać. Wiedział, że bajka nadawana jest o godzinie siódmej (taką godzinę wskazuje zegar, w programie TV podana jest godzina 19.). By uzupełnić potrzebne informacje, poprosił o podanie czasu w momencie rozmowy z ojcem w godzinach "zegarowych" ("która po kolei do dziesięciu?"), a następnie - wykorzystując świeże doświadczenia z tego dnia w obliczaniu na palcach - buduje nowy model "palcowy" przydatny nie tylko do przedstawiania aktualnej godziny, ale także do obliczenia upływu czasu. Marcin jest świadomy tego, że to jest model, dlatego mówi o "palcowych godzinach" w odróżnieniu od tych, które odczytuje na zegarze. Rodzice byli zaskoczeni arytmetycznymi umiejętnościami syna.

Przykład 3.

Ula (3;3) nie chodzi do przedszkola. Jej rodzice są matematykami i w obawie przed narzuceniem dziecku swych zainteresowań nie uczą jej (jak im się wydaje) celowo liczenia.

Ula wysypuje na kolana garść igieł sosnowych i proponuje mamie:

- Chcesz, będziemy liczyć? - Bierze do ręki pęczek igieł i odkładając po jednej na kolana liczy (z zachowaniem odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej) - 1,2,3,4,6,7.

Bierze nowy pęczek igieł i liczy podobnie - 1,2,3,4,5,6,8,10,20.

Podobne "liczenie" powtarza kilka razy.

Przykład 4.

Ula (3;3) bierze do ręki kominek żetonów i liczy odkładając je w rytm wymienianych liczebników - raz, dwa, trzy, cztery, dziewięć, sześć.

Mama - Liczy się: raz, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć,  
Ula bierze następną porcję zetonów, odkłada je i jednocześnie rytmicznie liczy - Raz, dwa, trzy, cztery, pięć. Nie powiedziała sześć, bo już nie było cekinów - pokazuje pustą rączkę.

Ula liczy, to znaczy - na razie - realizuje schemat procedury przeliczania w ten sposób, że rytmicznie wymienia liczebniki (myląc jeszcze ich kolejność) i jednocześnie rytmicznie odkłada liczone przedmioty, zachowując przy tym odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między liczebnikami i przedmiotami. Dziecko nie wie jeszcze, ile jest przedmiotów w przeliczanym zbiorze, procedura kończy się z chwilą ich wyczerpania.

Przykład 5.

Ula (3;8) ułożyła na łóżku lalkę Wojtka, pluszowego psa Reksia i położyła się sama. Do pokoju wchodzi tata.

U - Popatrz, ile dzidziusiów tu śpi. Cztery!

Tata - Cztery?

U - No popatrz! - wskazuje palcem na Wojtka - jeden dzidzius - wskazuje na Reksia - drugi dzidzius - na siebie - trz... czwarty dzidzius.

T - Trzeci dzidzius.

U - Trzeci dzidzius. Trzy (!) dzidziusie tu śpią.

Przykład 6.

Ula (3;9) opowiada - Trzy dziewczyny szalały, biegały po łące i ja też. Jak biegały trzy dziewczyny, mamusiu, i ja, to ile razem dziewczyn biegało?

M - Cztery.

U - Cztery dziewczyny szalały ... .

Ula liczy przedmioty wskazując je pod kontrolą wzroku. Gdy sama jest jednym z liczonych przez siebie elementów, nie dowierza stosowanej dotychczas procedurze, dla nowej sytuacji szuka nowego schematu poprzez zastosowanie liczb porządkowych lub dołączanie siebie do przeliczonego zbioru ("trzy dziewczyny i ja").

Przykład 7.

Ula (4;1) bardzo lubi spędzać czas w centrum Krakowa, w Rynku Głównym; właśnie jedzie tam z mamą tramwajem.

Ula - Ile godzin się jedzie do Warszawy?

Mama - 5. Ula pokazuje 5 palców.

U - Jak długo jedzie się do Kęt? (Ula jeździ tam do swojej babci).

M - 2 godziny. Ula prostuje 2 palce.

U - A powiedz mi, gdzie jedzie się cztery godziny? – prostuje 4 palce.

M - Do Radomia.

U - A trzy? - prostuje 3 palce.

M - Może do Kielc?

U - Dwie [godziny] do Kęt - wystawia 2 palce. - I jeszcze mi powiedz, gdzie jedzie się godzinę?

M - Do Rabki. (Ula była tam na wakacjach).

Ula ucieszona rozkłada 5 palców i wymienia kolejne miejscowości chowając po jednym palcu - Do Warszawy 5 godzin, do Radomia 4 godziny, do Kielc 3 godziny, do Kęt 2 godziny, do Rabki 1 godzinę. A my będziemy w Rynku 2 godziny.

Dotychczas Ula wiedziała, że na pytanie "Która godzina?" odpowiada

się liczbą. Teraz zaczyna również rozumieć, że czas jest odmierzany liczbą godzin. Dąży do utworzenia pewnego wzorca czasowego (modelu odcinka czasu: 1 godziny, 2, 3, 4, 5 godzin). Sama go świadomie i konsekwentnie konstruuje prosząc jedynie o potrzebne dane. Ponieważ dzieje się to w tramwaju, tworzony model dotyczy czasu przejazdu.

Przykład 8.

Ula (4;1) po wieczornej toalecie, w łóżeczku rozpoczęła rozmowę o ząbkach.

U - Jak byłem mała, to miałam tylko te (dotyka palcem dolnych jedynek) a potem mi urosły jeszcze te (dotyka palcem górnych jedynek) i potem jeszcze nowe i teraz mam dużo. Ile mam teraz ząbków?

Mama przelicza wzrokiem i odpowiada - 20.

U - To ile jest? - wyciąga rozłożone dłonie.

Mama też rozkłada swoje dłonie i mówi - Tyle, ile twoich i moich palców razem.

Ula - 5 i 5 i 5 i 5, tak? Dużo mam ząbków.

M - Policz, ile masz paluszków u nóżki.

Ula liczy dotykając każdy palec - 1,2,3,4,5. - (Po raz pierwszy sprawdza liczbę palców u stopy).

M - Jakby mnie tu nie było, to możesz sama pokazać wszystkie swoje paluszki u rąk i nóg. Razem jest ich 20, tyle, ile masz ząbków.

Ula przykrywa nogi kołdrą. Wchodzi tata. Ula podnosi ręce mamy, rozpościera swoje i mówi - Popatrz, tatusiu, tyle ważą (!) moje ząbki. Ząbki są małe i przyciśnięte do siebie i nie da się ich policzyć [paluszkami] i mama mi policzyła, że mam tyle - pokazuje ręce swoje i mamy.

Ula umie przeliczać przedmioty pod kontrolą wzroku, wskazując je palce. W opisanej sytuacji nie mogła tego uczynić, więc prosi mamę o przeliczenie swoich zębów. Jednocześnie buduje dla nich model palcowy i jest świadoma tego, że to jest tylko model, zastępnik zębów i reprezentant ich liczby, wyraża to słowami: "tyle ważą moje ząbki". Woli model z palców samych rąk, własnych i cudzych, ponieważ ręce w roli liczydła ma lepiej oswojone.

Zarówno Marcin i Ula stają przed jakimś problemem: jak długo będę czekał na bajkę w TV?; jak długo trwa godzina, dwie...?; ile mam zębów?. Atakują problem wykorzystując odrobiny swej wiedzy matematycznej, by skonstruować prymitywny schemat myślowy odpowiedni do sytuacji. Aktywnie zdobywają i przekształcają potrzebne im do tego informacje. Następnie dzieci rozwiązują w utworzonym modelu swój problem: będę czekał trzy palcowe godziny; dwie godziny, to tyle, ile trwa jazda z Krakowa do Kęt; 20 palców - tyle ważą moje ząbki. Marcin i Ula są spontaniczni i aktywni zarówno podczas zdobywania wiadomości i sprawności matematycznych, jak i schematyzowania rozważanych sytuacji rzeczywistych i rozwiązywania problemów, rodzice natomiast wychodzą na przeciw ich pytaniom.

## Matematyzacja pierwotna w szkole

Nieco inne warunki panują w szkole, gdzie panuje wiele szkolnych rytuałów i obowiązuje wiele konwencji. Głównym elementem procesu nauczania i uczenia się matematyki jest rozwiązywanie zadań, dlatego też stanowi ono główną działalność dziecka na lekcji matematyki. Arytmetyczne zadania tekstowe dotyczą zjawisk z życia codziennego, ale rozwiązuje się je z użyciem środków matematycznych. Konieczne jest wyraźne rozróżnianie tych dwóch światów: otaczającej nas rzeczywistości i matematycznego schematu. Zadanie tekstowe jest sztucznym tworem, opartym na pewnej niesprecyzowanej "konwencji zadań szkolnych". Pochodzi ze świata rzeczywistego, bo opowiada o sytuacjach z życia wziętych (o zakupach, planowanych wydatkach, podróżach ...) ale nie jest naturalnym opowiadaniem, bo zawiera dane liczbowe (często dalekie od rzeczywistych), pewne związki między nimi (często bardzo uproszczone) oraz polecenie obliczenia liczby (wielkości) szukanej. Wydawałoby się, że zawiera gotowy schemat matematyczny stosunków liczbowych czy wielkościowych, ale tak nie jest, trzeba wiele wysiłku, by te stosunki wyodrębnić i znaleźć odpowiadający im schemat arytmetyczny. Używana konwencja tekstowa niby w tym pomaga, ale często wprowadza w błąd, usztywnia myślenie, ponadto trzeba się tej konwencji nauczyć.

Przykład 9. [obserwacja Marzeny Legutko]

Zadanie: Na półce były 42 słoiki, a na drugiej półce 6 razy mniej. Ile słoików było na obu półkach?

Uczeń 1.

$42 - 6 = 36$     Odpowiedź: Na półce jest 36 słoików.

Uczeń 2.

$42 - 6 = 36$     Odpowiedź: Na drugiej półce jest 36 słoików.

Uczeń 3.

$42 - 6 = 36$     Odpowiedź: Na drugiej półce stoi 24 słoików.

Rozwiązanie zadania tekstowego powinno być poprzedzone skonstruowaniem schematu myślowego zależności występujących w zadaniu. Uczeń 1. do budowy swego schematu wziął pod uwagę następujące informacje: Były 42 słoiki, 6 mniej. Ile było/jest?. Następnie dobrał do niego model arytmetyczny  $42 - 6 = 36$  i wynik umieścił w odpowiedzi nie zwracając uwagi na treść pytania. Podobnie postąpił Uczeń 2., ale był świadom, że informacja - wprawdzie źle zinterpretowana - dotyczy drugiej półki. Uczeń 3. też zauważył jedynie "6 mniej" i wykonał odejmowanie, ale w odpowiedzi – niezgodnej z pytaniem - umieścił informację z pierwszego zdania zadania, popełnił przy tym błąd przedstawiając cyfry.

Przykład 10.[obserwacja Marzeny Legutko]

Zadanie: W skrzynce było 7 kilogramów jabłek, a w drugiej 4 razy więcej. Ile kilogramów jabłek było w obu skrzynkach?

Uczeń 1.

$7 + 4 = 11$     Odpowiedź: W skrzynce było 11 jabłek.

Uczeń 2.

$7\text{kg} * 4 = 28$     Odpowiedź: W skrzynce było 28 kg.

Uczeń 3.

$7 * 4 = 28$     Odpowiedź: W skrzynce było 28 kg.

W schematach myślowych tego zadania wystąpiły różne błędy: Uczeń 1. znów dostrzegł jedynie “4 więcej” i dodał 4, zapominając przy tym, że w zadaniu jest mowa o kilogramach jabłek a nie o sztukach. Uczniowie 2. i 3. dobrze zinterpretowali “4 razy więcej” jako mnożenie przez 4, ale udzielili odpowiedzi niezgodnych z pytaniem.

Badani uczniowie utworzyli do obu zadań - przecież złożonych - schemat zadania prostego, nie sprawdzili nawet, czy odpowiedzieli na zadane pytanie. Zadania te sprawiły im wiele trudności: uczniowie nie potrafią zmatematyzować sytuacji zadaniowej, prawdopodobnie nie rozumieją konwencji zadania tekstowego, nie umieją znaleźć “kluczowych” słów dotyczących stosunków wielkości występujących w zadaniu i przełożyć ich na odpowiednie działania, samo wykonywanie działań i pisanie stanowi jeszcze dla nich trudność (błędy ortograficzne pominięto w cytatach).

“Na poziomie zerowym zdobywanie środków matematycznych i ich opanowywanie odbywa się równolegle z rozwojem aktywności, którą nazwalismy matematyzacją pierwotną, prymitywną.” [Krygowska, 1979, 79] W opisanych przykładach wyraźnie się to ujawnia. Opisane przedszkolaki różni od uczniów poziom motywacji i aktywności własnej.

#### *Literatura:*

Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, band 2, E. Klett, Stuttgart, 1973, s. 49.

Krygowska, Z.: *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*. W: *Dydaktyka Matematyki*, tom 6, PWN, Warszawa, 1986, s. 25-41.

Krygowska, Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, WSiP, Warszawa, 1979, s. 48-80.

Urbańska, A.: *O aktywności matematycznej dziecka przedszkolnego - na przykładzie kształtowania pojęcia liczby*. W: *Problemy Studiów Nauczycielskich*, red. Bogdan J. Nowecki, Zeszyt 6, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 1996, s. 90-101.

dr Aleksandra Urbańska, e-mail: alurb@wsp.krakow.pl