

Magické štvorce a kocky - zdroj námetov na vyučovanie matematiky

Marián Trenkler

ABSTRACT: *We consider magic squares and cubes and we think about applications in education of mathematics.*

Magické štvorce fascinujú ľudí už mnoho storočí a nachádzajú si svoje miesto nielen v rôznych oblastiach vedy, ale aj v škole. Sú špeciálnym prípadom 2-rozmerných matíc (napr. jednotková, frekvenčná alebo bi-stochastická), ktoré majú rovnaké súčty prvkov vo všetkých riadkoch aj stĺpcoch. V posledných desaťročiach sa zintenzívnili výskum ich p -rozmerných analógií, špeciálne magických kociek. V tomto príspevku uvádzame ich históriu, niekoľko algoritmov na ich vytváranie a informácie o magických kockách. Príslušné definície, tvrdenia, ich dôkazy a mnoho rôznych informácií sú prístupné v prácach uvedených (v PDF-formáte) na [6]. Pretože základné tvrdenia o viac-rozmerných analógiách boli publikované len v posledných dvoch rokoch, uvedená problematika nebola spracovaná pre potreby vyučovania matematiky. Bohatá história, množstvo materiálov na Internete a jednoduchá formulácia úloh sú predpokladom, na vytvorenie zaujímavých úloh a učebných textov pre žiakov všetkých typov škôl. Podľa schopnosti žiakov, niektoré úlohy môžu byť venované experimentovaniu s použitím výpočtovej techniky a iné dôkazovým úlohám. Zo skúseností (s výukou rómskych žiakov na ZŠ Luník 9, Košice) vieme, že vhodnými úlohami je možné zaujať aj žiakov, o ktorých by sme to nepredpokladali.

Prvé magické štvorce nachádzame v starovekej Číne pred viac ako 4000 rokmi. V starých legendách sa stretávame s diagramom Lou Shu,

ktorý v dnešnej terminológii je magický štvorec rádu 3 a patrí najvýznamnejším symbolom, do ktorých Číňania vkladali svoje filozofické a prírodovedecké koncepcie. O tomto období máme málo informácií pretože v rokoch 1260-1368 bola Čína pod nadvládou Mongolov, ktorý zničili mnohé staroveké materiály. Naše informácie pochádzajú zo spisu Xu Gu Zhai Qi Suan-Fu, ktorý publikoval Yang Hui v roku 1275. Magické štvorce boli opradené rôznymi mystickými vlastnosťami. Stretávame sa s nimi v Japonsku, Indii, na Blízkom východe aj Egypte. Doposiaľ sa zachovali písomné materiály indického učenca Varáhimihora zo 6.storočia. Prvé písomné islamské práce sú od Jabir ibn Hayana z ro-ku 875. V 11.st. sa s magickými štvorcami stretávame u Džabira a Alga-zeta, ktorí žili v Bagdade a preslávili sa svojimi pokusmi o zjednotenie rôznych vetiev islamu. V 12.storočí vzniklo známe dielo Fatih 3439, ne-známeho autora, ktorý zozbieral rôzne metódy konštrukcií magických štvorcov. Zo spisu, ktorý sa našiel v Istambule vieme, že Alhazen al-Hajyham už v 11.st. poznal tzv. Indický algoritmus na vytváranie ma-gických štvorcov nepárneho rádu. S magickými štvorcami sa stretávame v židovskej kabale. Prvá známa zmienka o magických štvorcov v Európe je v diele byzanského učenca Manuela Manoschopoulou (okolo roku 1300). V rôznych súvislostiach o magických štvorcov písali L.Pacioli (asi 1445-1509), G.Cardano (1501-1576), A.Riese (asi 1489-1559), M. Stifel (1486-1567) a iní. V nasledujúcich dvoch storočiach o magických štvorcov písali C.Agrrippa (1486-1535) v *De Occulta Philosophia* (1510); B.de Mézariac (1581-1638) v *Problèmes plaisants et délesables qui se font par les Nombres*, 1612; B.F. de Bessy (1605-1675) v *Des Quarrez Magiques*, 1693; Blaise Pascal (1623-1662) v *Traité des nombres magi-quement magiques*, 1654; Ozonam v *Recreations Mathematiques*, 1697; Simon de La Loubère (1642-1729) v *Relation du Royaume de Siam*, 1693. O popularite magických štvorcov svedčí aj známa rytina Melan-chólia od A.Durera z roku 1514. S konštrukciou magického štvorca sa stretávame v tragédii Faust od J.W.Goetheho. S faustovskou tematikou sa stretávame prvý raz 16.st. a podľa niektorých autorov prototypom Fausta bol práve renesančný učenec a bohém Cornelius Agrippa.

Systematicky sa magické štvorce začali študovať v 17.storočí, keď sa stali objektom matematických štúdií oprostených od mysticizmu predchádzajúceho obdobia. Philippe de La Hire (1642-1718) popísal konštrukciu magických štvorcov z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov (viď [1]). O magických štvorcov písali aj L.Euler (1707-1783), K.F.Gauss (1777-1855), E.Lucas (1842-1891) a mnohí iní. Dnes poznáme viacero algoritmov na vytváranie magických štvorcov rádu n . Naj-jednoduchšie sú algoritmy pre nepárne hodnoty parametra n a pre n deliteľný štyrmi. Náročnejšie sú algoritmy pre párne n , ktoré nie je deli-

teľné štyrmi. V tomto prípade prvé definitívne výsledky publikoval r.1892 W.W.Rouse-Ball v knihe Mathematical Recreations and Essays.

			5			
		4		10		
	3		9		15	
2		8		14		20
1		7		13		19
	6		12		18	
		11		17		23
			16		22	
				21		

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Obrázok 1

Na obrázku 1 je naznačený postup na vytváranie magických štvorcov nepárneho rádu, ktorý sa spája s menom Bachet de Méziriac. Konštrukcia vychádza zo štvorcovej tabuľky rádu n . Nad jej stranami vytvoríme štyri pyramídy so základňou dĺžky $n-2$ a postupne vpisujeme čísla $1, 2, \dots, n^2$ tak, ako je to naznačené na ľavom obrázku. Na záver posunieme čísla vpísané do pyramíd o n -políčok tak, aby boli vpísané do políčok, ktoré ostali po prvom kroku prázdne.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Obrázok 2

Už v 10.storočí sa stretávame s ideou vytvárania magických štvorcov rádu n , ktoré je deliteľné štyrmi. Na obrázku 2 je demonštrovaný tento algoritmus. Na ľavej strane je štvorcová tabuľka (hrubými čiarami sú nakreslené dve osi súmernosti, ktoré ju delia na štyri podtabuľky), ktorej políčka sú rozdelené na biela a čierne. Rozdelenie je urobené tak, aby v každom riadku a stĺpci podtabuľky bol rovnaký počet bielych a čiernych políčok a tieto sú súmerné podľa oboch nakreslených osí. Do tejto tabuľky postupne dávame čísla $1, 2, \dots, n^2$. Konštrukciu ukončíme nasledovne: ak do čierneho políčka bolo vložené číslo m , tak ho nahradíme číslom $n^2 - m + 1$.

V 19.st. sa začínajú študovať magické štvorce s ďalšími vlastnosťami a objavujú sa ich prvé aplikácie v rôznych matematických disciplínach. V literatúre sa stretávame s tabuľkami, v ktorých sú čísla netvoriace aritmetickú postupnosť s diferenciou 1, ale spĺňajúce iné podmienky. Angličan H.E.Dudeney (1857-1930) publikoval "magický štvorec" rádu 3, ktorý bol vytvorený z prvočísel.

8	15	19
24	1	17
10	26	6

12	25	5
7	14	21
23	3	16

22	2	18
11	27	4
9	13	20

Obrázok 3

Prirodzeným zovšeobecnením magických štvorcov sú magické kocky. Na obrázku 3 je uvedená magická kocka rádu 3. Skladá sa z čísel 1, 2,..., 27 tak, že súčet v každom riadku a každej diagonále je rovnaký. Pojmom riadok rozumieme trojicu prvkov rovnobežných s hranou kocky. Uvedená magická kocka má 27 riadkov, 4 diagonály a bola urobená použitím nasledujúceho vzorca

$$m(i, j, k) = (i - j + k - 1) \bmod n * n^2 + (i - j - k) \bmod n * n + (i + j + k - 2) \bmod n + 1$$

1	63	62	4
60	6	7	57
56	10	11	53
13	51	50	16

48	18	19	45
21	43	42	24
25	39	38	28
36	30	31	33

32	34	35	29
37	27	26	40
41	23	22	44
20	46	47	17

49	15	14	52
12	54	55	9
8	58	59	5
61	3	2	64

Obrázok 4

Na obrázku 4 je magická kocka rádu 4. Pozorný čitateľ si všimne súvislosť medzi konštrukciami uvedenými na obrázkoch 2 a 4. Obe kocky boli vytvorené použitím vzorcov uvedených v [4].

Pravdepodobne prvú magickú kocku zostrojil právnik a matematik-amatér Pierre de Fermat v roku 1640. V roku 1686 Poliak Adamas Kochansky inicioval systematické štúdium magických kociek. Výskum sa zintenzívnil v 19.storočí, keď boli publikované magické kocky rádu n pre nekonečne veľa hodnôt parametra n . Až v závere 20.st. boli uverejnené jednoduché konštrukcie magických kociek všetkých rádo.

S prvými 4-rozmernými magickými kockami sa stretávame v knihe W.S.Andrews: Magic squares and cubes, Dover 1960. V [2] je nakreslených 9 vrstiev 4-rozmernej kocky rádu 3 v tvare magického štvorca so špeciálnymi vlastnosťami. Od polovice 20.storočia bolo publikovaných viacero prác o p -rozmerných magických kockách. Mnoho informácií o tejto problematike je uvedených v práci A.Adlera (viď [2]), ktorý uviedol všeobecnú metódu na vytváranie magických p -rozmerných kociek a konštatuje, že doposiaľ nepoznáme konštrukcie magických kociek rádu n pre všetky p a n rôzne od 2. Štúdiu viac-rozmerných magických kociek sa venovalo mnoho autorov. Zoznam významných prác z danej problematiky je uvedený na stránke [7]. Získané poznatky o magických p -rozmerných kockách nachádzajú uplatnenie nielen v školskej matematike, ale aj v mnohých oblastiach matematiky, fyziky a ekonomike.

Intenzívne štúdium existencie viac-rozmerných magických kociek bolo završené v práci [2], ktorej je dokázané nasledujúce tvrdenie:

Magická p -rozmerná kocka rádu n existuje práve vtedy,
keď $p > 1$ a n je rôzne od 2 alebo $p = 1$.

Táto veta bola dokázaná popisom konštrukcií magických kociek, ktoré sú založené na existencii latinských p -rozmerných kociek a sú zovšeobecnením uvedených algoritmov. Čitateľ si môže položiť otázku, prečo nájdenie jednoduchého algoritmov na konštrukciu magických p -rozmerných kociek trvalo tak dlho. V [1] je ukázaná idea konštrukcia magických štvorcov z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov. Definitívna odpoveď na otázku existencie takejto dvojice ortogonálnych latinských štvorcov bola publikovaná až v roku 1960. Konštrukcie magických p -rozmerných kociek je založená na existencii p ortogonálnych p -rozmerných latinských kociek. Doposiaľ však nebola publikovaná práca o ortogonálnych latinských p -rozmerných kockách rádu n pre všetky p, n .

Ak podmienku rovnakých súčtov nahradíme podmienkou rovnakých súčínov, tak dostaneme zaujímavé tabuľky čísel, o ktorých máme pomerne málo informácií. Na obrázku 5 je 3-rozmerná tabuľka rádu 3, v ktorej sú navzájom rôzne prirodzené čísla umiestnené tak, že súčin čísel v každom riadku a diagonále je rovnaký. O takýchto tabuľkách čísel, ktoré nazývame súčinové magické kocky, čitateľ sa dozvie viac v [5].

18	20	75	a	b	c
300	9	10			
5	150	36			

60	225	2	b
1	30	900	
450	4	15	

25	6	180	c
90	100	3	
12	45	50	

Obrázok 5

V tomto príspevku sme v krátkosti opísali publikované výsledky o magických kockách. V minulosti boli študované magické štvorce s rôznymi špeciálnymi vlastnosťami (prvočíselné, pandiagonálne, písmenkové, koncentrické, asociované a iné magické štvorce.) Analogické podmienky môžeme klásť aj na magické p -rozmerné kocky a dostaneme mnoho zaujímavých otázok, na ktoré doposiaľ nepoznáme odpoveď. Vzniká takto priestor pre prácu mladých nádejných matematikov. Veríme, že publikované tvrdenia budú námetom pre diplomové, rigorózne a iné typy prác.

Na záver uvedieme jednu úlohu: Na tlačidlovej telefónnej klávesnici je súčet trojice čísel v strednom riadku a stĺpci a oboch diagonálach rovnaký. Aký je najmenší počet tlačidiel taký, že ich zámenou dostaneme "magickú" klávesnicu, v ktorej súčet čísel vo všetkých riadkoch, slúpcoch a diagonálach bude rovnaký?

Literatúra:

1. Semanišinová, I.: *Objavovanie čara magických štvorcov* (preprint)
2. Trenkler, M.: *Konštrukcia magických p -rozmerných kociek*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 2/2000, 19-29
3. Trenkler, M.: *Magic cubes*, The Mathematical Gazette 82(1998), 56-61
4. Trenkler, M.: *A construction of magic cubes*, The Mathematical Gazette 84(2002), 36-41
5. Trenkler, M.: *Súčinové magické štvorce a kocky*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 1(2002) (v tlači)
6. <http://kosice.upjs.sk/~trenkler/papers.htm>
7. <http://kosice.upjs.sk/~trenkler/CubeRef.html>

Adresa autora:

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice