Použitie priemerných hodnôt pri riešení úloh z praxe

Mária Šúňová

ABSTRACT: *The paper deals with problems connected with the solution of pattern tasks in the teacher training study for the basic school and refers to incorrect application of the arithmetical mean as the mean value and the possibility of using of further mean values in concrete tasks from practice.*

1. ÚVOD

Na stredných školách, napríklad na osemročných gymnáziách a obchodných akadémiách, je štatistika súčasťou predmetu matematika, alebo sa vyučuje samostatne v predmete Hospodárske výpočty a štatistika. Cieľom predmetu je určiť hodnoty základných štatistických parametrov daného súboru, ovládať praktický význam charakteristík štatistického súboru a tiež určiť aritmetický, vážený, geometrický a harmonický priemer a vedieť ich vhodne použiť.

Skúsenosti však nasvedčujú k tomu, že študenti zvládajú tieto pojmy len formálne. Použitie priemerných hodnôt v konkrétnych úlohách im robí problémy. Napríklad v aritmetickom priemere vidia univerzálny nástroj pre získanie priemernej hodnoty.

Slovné úlohy, ktoré sú problematické sú úlohy na spoločnú prácu, rovnomerný pohyb a úlohy o zmesiach. Napríklad v úlohách na rovnomerný pohyb počítajú študenti priemernú rýchlosť ako aritmetický priemer nameraných hodnôt.

Úloha 1.
Auto prejde prvých 10 km rýchlosťou 50 km/hod, ďalších 10 km rýchlosťou 80 km/hod, potom rýchlosťou 90 km/hod, ďalších 10 km rýchlosťou 60 km/hod a posledných 10 km rýchlosťou 80 km/hod. Akou priemernou rýchlosťou auto išlo?
Riešenie.

Najčastejšie riešenie študentov je nasledovné

$$50 + 80 + 90 + 60 + 80 = 360, \quad 360 : 5 = 72$$

Priemerná rýchlosť auta je 72 km/hod. Riešenie je nesprávne a študenti sú spokojní. Úlohu riešili ako aritmetický priemer nameraných rýchlostí.

$$A_n(x) = \bar{x}_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

kde $\bar{x}_a$ je aritmetický priemer hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a n je počet hodnôt.
Aritmetický priemer je hodnota, ktorá dáva istú informáciu o hodnotách, z ktorých bol priemer vypočítaný, ale do značnej miery môže skresľovať skutočnosť.
Vráťme s k úlohe 1, ktorá nie je správne vyriešená. Cesta trvala čas t,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10}{50} + \frac{10}{80} + \frac{10}{90} + \frac{10}{60} + \frac{10}{80} = 0{,}727 \text{ hod} = 43{,}62 \text{ min}$$

Potom priemerná rýchlosť $v = \frac{s}{t} = \frac{50}{0{,}727} = 68{,}7$ km/hod a priemerná rýchlosť je teda nižšia ako 72 km/hod. Priemernú rýchlosť auta vypočítame ako harmonický priemer

$$v = \frac{50}{\frac{10}{50} + \frac{10}{80} + \frac{10}{90} + \frac{10}{60} + \frac{10}{80}} = 68{,}7 \text{ km/hod}$$

Vo všeobecnosti harmonický priemer počítame podľa vzorca

$$H_n(x) = \bar{x}_h = \frac{n}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_k}{x_n}}$$

kde n je počet hodnôt, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú hodnoty, pričom hodnota x_i sa vyskytuje n_i-krát $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Úloha 2.

Vypočítajte priemerný počet dní potrebný na vykonanie práce jedným robotníkom, keď prvý robotník by prácu urobil za 24 dní, druhý za 21 dní a tretí za 28 dní.

Riešenie.

Aritmetický priemer hodnôt je $\bar{x}_a = \frac{24 + 21 + 28}{3} = 24{,}33$.

V skutočnosti priemerný počet dní vypočítame ako harmonický priemer

$$x_h = \frac{3}{\frac{1}{24} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28}} = \frac{3.2^3.3.7}{3.7} = 3.2^3 = 24.$$

Priemerný počet dní potrebný na vykonanie práce jedným robotníkom je 24.

Úloha 3.

Chlapec išiel rýchlosťou 13,2 km/hod z mesta *A* do mesta *B*. Späť išiel pešo rýchlosťou 4,8 km/hod. Cesta tam a späť mu trvala 2 ½ hod. Urči vzdialenosť miest *A* a *B*.

Riešenie.

Situáciu si môžeme znázorniť graficky nasledovne

A $v_1 = 13{,}2$ $\longrightarrow t_1$ B

$t_2 \longleftarrow$ $v_2 = 4{,}8$

Z textu úlohy vyplýva, že $t_1 + t_2 = 2{,}5$ hod.

Študenti ďalej vypočítajú priemernú rýchlosť $v = \dfrac{13{,}2 + 4{,}8}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$ a zapíšu vzťahy

$$2s = 2{,}5.9\,,\ s = 11{,}25\,,$$

čo nie je správny ani výsledok ani riešenie. Ak priemernú rýchlosť vypočítame ako harmonický priemer

$$\bar{x}_h = \frac{2}{\dfrac{1}{13{,}2} + \dfrac{1}{4{,}8}} = \frac{2.13{,}2.4{,}8}{18} = 7{,}04\,,$$

dostaneme $2s = 2{,}5.7{,}04$, $s = 8{,}8$.

Teda vzdialenosť mesta *A* a *B* je 8,8 km, čo je správne riešenie.

Iné možné riešenie je nasledovné

$$t_1 + t_2 = 2{,}5$$

$$\frac{s}{13{,}2} + \frac{s}{4{,}8} = 2{,}5\,,$$

po úprave

$$4{,}8s + 13{,}2s = 2{,}5.13{,}2.4{,}8\,,$$

$$s = \frac{2{,}5.13{,}2.4{,}8}{18}\,,\quad s = 8{,}8.$$

Ak rovnosť

$$s = \frac{2{,}5.13{,}2.4{,}8}{18}$$

vynásobíme číslom 2, dostaneme

$$2s = 2.\frac{2{,}5.13{,}2.4{,}8}{18} \text{ alebo } 2s = 2{,}5.\frac{2.13{,}2.4{,}8}{18}\,,$$

čo znamená, že sme dostali $2s = 2{,}5.\bar{x}_h$.

Ak potrebujeme vypočítať priemerné hodnoty, ktoré narastajú geometricky, napríklad počet buniek, ktorí vznikli delením bunky, zložené úrokovanie, prírastok obyvateľstva, použijeme priemernú hodnotu, ktorá sa nazýva geometrický priemer.

Geometrický priemer z hodnôt $x_1, x_2, \dots, x_n$ vo všeobecnosti počítame

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\ ,$$

kde n – počet hodnôt.

Úloha 4.
V roku 1990 v meste X žilo 550000 obyvateľov a v roku 2000 už 650000 obyvateľov. Vypočítajte, koľko obyvateľov žilo v meste X v roku 1995.
Riešenie.
Vypočítame geometrický priemer

$$\overline{x_g} = \sqrt{550000.650000} = 597913{,}0\,.$$

V roku 1995 žilo v meste X asi 597913 obyvateľov, čo je menej ako je aritmetický priemer $\overline{x_a} = 600000$.

Úloha 5.
V prvej minúte pozorovania máme 2 bunky. V 35. minúte pozorovania je počet buniek 2048. Aký bol počet buniek v 18. minúte pozorovania?
Riešenie.
Pomocou geometrického priemeru dostaneme

$$\overline{x_g} = \sqrt{2.2048} = \sqrt{4.1024} = 2.32 = 64\,.$$

Čo je opäť menej ako $\overline{x_a} = 1025$, ale viac ako $\overline{x_h} = 3{,}99$.

Ďalšou ukážkou možnosti použitia geometrického priemeru sú úlohy, kde na základe časového radu bázických indexov charakterizujeme celkový trend vývoja ekonomickej premennej vzhľadom na základné obdobie. Najjednoduchší spôsob analýzy vývoja ekonomických časových radov sú časové rady bázických a reťazových indexov.
Časový rad bázických indexov určíme ako

$$IBt = \left(\frac{y_t}{y_0}\right).100\%$$

kde $t = 1,2,3,\cdots,N$, y_t – hodnota časového radu, y_o – bázická hodnota.

Postupné zmeny vo vývoji ekonomickej premennej v časovom rade $y_1, y_2, \dots, y_N$ charakterizujú reťazové indexy, ktoré vypočítame ako

$$IRt = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right).100\%\,,\quad \text{pre } t = 2,3,\cdots,N\,.$$

Priemerný koeficient radu za celé sledované obdobie $t = 2,3,\cdots,N$ určíme podľa vzťahu

$$\overline{KR} = \sqrt[N-1]{\frac{y_2}{y_1}.\frac{y_3}{y_2}.\cdots.\frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[N-1]{k_2.k_3.\cdots.k_N} = \sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}}\ ,$$

kde $k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}$ pre $t = 2,3,4,\ \ ,N$ sú koeficienty rastu.

Úloha 6.
Na základe tabuľky o počte obyvateľov v meste Vranov nad Topľou v rokoch 1990-1996 vypočítajte bázické a reťazové indexy a priemerný koeficient rastu stredného stavu obyvateľstva.
Tabuľka.

rok	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
počet obyvateľov	23060	22640	23105	23440	23737	24024	24157

Riešenie.
Vytvoríme si prehľadnú tabuľku, do ktorej budeme postupne zapisovať vyrátané hodnoty.
Tabuľka.

t	rok	počet obyvateľov	IB_t	IR_t
0	1990	23060	100	-
1	1991	22640	98,179	98,179
2	1992	23105	100,195	102,054
3	1993	23440	101,648	101,450
4	1994	23737	102,936	101,267
5	1995	24024	104,180	101,209
6	1996	24157	104,757	100,554

Bázické a reťazové indexy pre jednotlivé roky sú uvedené v tabuľke. Hodnota IR_o je základom výpočtu ďalších hodnôt. Priemerný koeficient rastu *KR* za predpokladu, že hodnoty časového radu rastú rovnomerne, je 1,007775856. Na základe uvedených výsledkov možno hovoriť o dosť pomalom, ale predsa rastúcom trende počtu obyvateľov do budúcnosti oproti roku 1990. Priemerný koeficient rastu je väčší ako 1, takže z demografického hľadiska možno hovoriť o perspektívnom vývoji v počte obyvateľov mesta.

Označme teraz postupne $A_n(x)$ aritmetický priemer, $H_n(x)$ harmonický priemer a $G_n(x)$ geometrický priemer. Všimnime si aké vzťahy platia medzi $A_n(x), H_n(x)$ a $G_n(x)$.

Zo vzťahov pre jednotlivé priemery pre $x>0$ platí

(i) $$H_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{A_n(x)}$$

(ii) $$H_n\left(\frac{1}{x}\right) . A_n(x) = H_n(x) . A_n\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

(iii) $$H_n(x) \le G_n(x) \le A_n(x)$$

Po vyriešení niekoľkých takýchto úloh študenti prestanú vidieť v aritmetickom priemere univerzálny nástroj pre získanie priemernej hodnoty a naučia sa správne a neformálne pristupovať k riešeniu úlohy. Súčasne môžeme študentov v prípade záujmu informovať, kde môžu nájsť dôkazy uvedených vzťahov (i) – (iii). Tieto dôkazy sa nachádzajú napríklad v [1] a [4].

Literatúra

1. Anděl, J.: *Statistické metódy*, MATFYZPRESS, Praha, 1998.
2. Beka, J., Tóth, J.: *Postupnosti definované pomocou známych priemerov*, MEDACTA 99, Zborník 1, Nitra 1999, s. 131-135.
3. Hruša, K. a kol.: *Aritmetika pre pedagogické inštitúty*, SPN, Praha, 1963.
4. Kufner, A.: *Nerovnosti a odkazy*, Nakladateľství Mladá Fronta, Praha, 1975.
5. Potocký, R.: *Finančná matematika*, UK Bratislava, 1997.
6. Vrábelová, M., Markechová, D.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Edícia Prírodovedec, FPV UKF Nitra, 2001.

Adresa:

Mária Šúňová, RNDr., CSc.
Univerzita Konštantína Filozofa
Fakulta prírodných vied
Katedra algebry a teórie čísel
Tr. A. Hlinku č. 1
949 74 Nitra
Tel./Fax. 00421376503324
e-mail: msunova@ukf.sk