Objavovanie čara magických štvorcov

Ingrid Semanišinová

ABSTRACT: *Maths and magic have been partners for a long time. One of the most ancient curiosities is the so-called magic square. Magic squares can play various roles in the mathematics classroom: as a motivational device, as a problem-solving venture, and as an alternative way to review content. In this paper we formulate several problems, which enable pupils to uncover connections between Latin squares, magic squares and multiplicative magic squares.*

1. ÚVOD

Matematika a mágia boli stáročia partnermi. V časoch *Pytagora* boli čísla spojené s mysticizmom a objav pravouhlého trojuholníka so stranami 3, 4, 5 stačil ľuďom k tomu, aby uverili, že niektoré čísla majú magickú silu. Nemecký filozof a teológ *Cornelius Agrippa*, jeden z najvýznamnejších predstaviteľov renesančnej mystiky, vo svojej knihe *Okultistická filozofia (1510)* pripisoval magickú silu magickým štvorcom. O magické štvorce sa ľudia zaujímajú už tisícročia. Svedčí o tom aj mystická legenda starovekej Číny známa ako *Luo Shu* (pozri [4]), o ktorej prvú písomnú zmienku nájdeme v knihe od *Yang Hui (1275).* Magické štvorce boli odjakživa spájané s niečím nadprirodzeným, magickým (pozri [2]). Systematické štúdium magických štvorcov sa datuje od 17. storočia a táto problematika stále obsahuje mnoho otvorených problémov.

Vo vyučovaní matematiky môžu byť magické štvorce a témy s nimi súvisiace vhodným motivačným materiálom, ktorý umožňuje poukázať na prepojenie rozvoja matematiky a historického a kultúrneho rozvoja ľudstva. Tento príspevok obsahuje úlohy, pri riešení ktorých sa žiaci postupne oboznamujú s pojmami latinský štvorec, ortogonálne latinské štvorce a s metódou vytvárania magických a súčinových magických štvorcov z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov. Konštrukciu magických štvorcov z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov ako prvý navrhol *Philippe de La Hire (1642 - 1718)*.

2. LATINSKÉ ŠTVORCE

Príklad 2.1 V bowlingovom klube majú 3 dráhy. Traja kamaráti sa rozhodli, že si zahrajú 3 kolá bowlingu, pričom každý bude hrať každé kolo na inej dráhe. Navrhnite im spôsob, ako majú hrať.

Riešenie: Nakreslíme si tabuľku 3 x 3. V tejto tabuľke bude každý riadok reprezentovať jedno kolo bowlingu a každý stĺpec jednu dráhu. Kamarátom priraďme čísla – prvému číslo 1, druhému 2 a tretiemu 3.
Ak teda do druhého políčka v prvom riadku vpíšeme číslo 1, bude to

	1	

znamenať, že prvý kamarát bude hrať v prvom kole na druhej dráhe.

Jeden z možných spôsobov hry je:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Nájdite ďalšie možnosti hry.

Príklad 2.2 Predstavte si, že chcete vyskúšať kvalitu pneumatík od štyroch rôznych firiem. Mohli by ste každý týždeň skúšať pneumatiky od inej firmy, ale výsledok by nemusel zodpovedať realite. Opotrebovanie sa totiž môže líšiť podľa počasia v danom týždni a podľa toho, na ktorom kolese je pneumatika. Lepšie by bolo meniť štyri pozície pneumatík z týždňa na týždeň. Navrhnite spôsob, ako ich vymieňať.

Riešenie: Úloha má viacero riešení, uvedieme tri z nich:

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

Prvý riadok v každom štvorci reprezentuje prvý týždeň testovania, druhý riadok druhý týždeň, atď. Stĺpce reprezentujú jednotlivé kolesá na aute (ľavé predné, pravé predné, ľavé zadné, pravé zadné) a čísla v políčkach jednotlivé firmy – 1 prvú firmu, 2 druhú, 3 tretiu a 4 štvrtú firmu.

Latinským štvorcom rádu n nazývame štvorcovú tabuľku, ktorá má n riadkov a n stĺpcov. Do jednotlivých políčok tabuľky sú vpísané čísla (prvky latinského štvorca) z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, pričom platí: V každom riadku aj stĺpci sú navzájom rôzne čísla. (Pozri [1].) Číselné tabuľky v riešeniach príkladov 2.1 a 2.2 sú latinské štvorce rádu 3 a 4.

Poznámka: Niekedy je do tabuľky výhodnejšie vpísať čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$ - pozri riešenia príkladov 3.2 a 4.2.

Úloha 2.3 Vytvorte všetky latinské štvorce rádu 2 a 3.

Úloha 2.4 Skúmajte a vypíšte vlastnosti vytvorených latinských štvorcov.

Poznámka: Žiaci môžu objaviť niektoré z nasledujúcich vlastností: Súčet čísel v každom riadku a v každom stĺpci je rovnaký. Ak vymeníme v latinskom štvorci medzi sebou dva riadky resp. dva stĺpce, tak dostaneme latinský štvorec, atď.

Úloha 2.5 Zavedieme nasledujúce operácie s latinskými štvorcami:

- pripočítanie konštanty a – každý prvok x latinského štvorca nahradíme číslom $x + a$,
- vynásobenie konštantou a – každý prvok x latinského štvorca nahradíme číslom $x * a$,
- sčítanie dvoch latinských štvorcov rovnakého rádu – sčítame prvky v prislúchajúcich si políčkach,
- vynásobenie dvoch latinských štvorcov rovnakého rádu – vynásobíme prvky v prislúchajúcich si políčkach,
- umocnenie konštanty a na prvky latinského štvorca – každý prvok x latinského štvorca nahradíme číslom a^x.

Kombinujte tieto operácie a skúmajte vlastnosti takto vytvorených štvorcových tabuliek.

Poznámka: Žiaci môžu objaviť niektoré s nasledujúcich vlastností: Ak pripočítame konštantu k latinskému štvorcu, tak podmienka o rovnakých súčtoch zostane splnená. Ak sčítame latinské štvorce toho istého rádu, tak vznikne štvorcová tabuľka, v ktorej je zachovaná podmienka o rovnakých súčtoch, atď.

Úloha 2.6 Do prázdnej štvorcovej tabuľky doplňte minimálny počet čísel, aby bol latinský štvorec rádu 3 jednoznačne určený.

Latinský štvorec nazývame **diagonálny**, ak v políčkach na diagonále (uhlopriečke) sú navzájom rôzne čísla.

Úloha 2.7 Vytvorte diagonálny latinský štvorec rádu 3 a rádu 4.

Príklad 2.8 Vrátime sa k príkladu 2.1. Tentoraz sa však k trom kamarátom pridali tri kamarátky. Dohodli sa, že budú hrať vo dvojiciach (chlapec - dievča) takto: Každý bude hrať každé kolo na inej dráhe a s iným partnerom. Je to možné? Navrhnite ako majú hrať.

Riešenie: Ak by hrali najprv samí chlapci a potom samé dievčatá, tak by bol riešením napríklad aj latinský štvorec z riešenia príkladu 2.1.

Pre chlapcov , pre dievčatá .

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Keďže však majú hrať vo dvojiciach spojme tieto latinské štvorce do jednej tabuľky takto:

11	22	33
22	33	11
33	11	22

To znamená, že v prvom kole bude hrať na prvej dráhe chlapec s číslom 1 a dievča s číslom 1, na druhej dráhe chlapec s číslom 2 a dievča s číslom 2, atď. Toto riešenie však nevyhovuje požiadavkám úlohy, pretože chlapec s číslom 1 hrá v každom kole s tým istým dievčaťom, podobne chlapec s číslom 2 resp. 3.
Skúsime to teraz naplánovať inak:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Pre chlapcov , pre dievčatá .

3	1	2
2	3	1
1	2	3

Pre dvojice chlapec – dievča dostaneme:

13	21	32
22	33	11
31	12	23

Vidíme, že tentoraz bude hrať každý každé kolo na inej dráhe a s iným partnerom.

Všimnime si, že v každom políčku poslednej štvorcovej tabuľky je iná usporiadaná dvojica z čísel 1, 2, 3. Dvojicu latinských štvorcov rádu n nazývame **ortogonálnou** ak každé dve usporiadané dvojice, vytvorené z prislúchajúcich si políčok sú rôzne. Latinské štvorce vytvorené pri riešení príkladu 2.8 sú ortogonálne latinské štvorce rádu 3.

Úloha 2.9 Zostrojte dvojice ortogonálnych latinských štvorcov.

V súvislosti s ortogonálnymi latinskými štvorcami je známy príbeh *O 36 oficieroch, ktorí nesplnili rozkaz*. Táto úloha zaujala aj *Leonarda Eulera*, ktorý vyslovil hypotézu o jej neriešiteľnosti. Dokázaná bola až v roku 1900 *G. Tarrym* (pozri [1]).

Úloha 2.10 Medzi latinskými štvorcami vytvorenými v úlohe 2.9 navrhnite operácie, pomocou ktorých dostanete štvorcovú tabuľku, v ktorej sú: **a)** všetky čísla navzájom rôzne,
b) všetky prirodzené čísla od 1 do 9.
Skúmajte vlastnosti takto vytvorených štvorcových tabuliek.

3. MAGICKÉ ŠTVORCE

Úloha 3.1 Metódou uvedenou v úlohe 2.10b vytvorte, čo najviac štvorcových tabuliek rádu 3 x 3.

Magickým štvorcom rádu n nazývame štvorcovú tabuľku, v ktorej sú umiestnené čísla 1, 2, ..., n^2 tak, aby súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach bol rovnaký (pozri [4]).

Príklad 3.2 Koľko magických štvorcov ste vytvorili pri riešení úlohy 3.1? Popíšte algoritmus, ako môžeme získať magický štvorec rádu 3 z latinských štvorcov rádu 3. (Aké vlastnosti majú použité latinské štvorce?) Pokúste sa podobným spôsobom vytvoriť magický štvorec rádu 4.

Riešenie: Napríklad:

3*

1	0	2
2	1	0
0	2	1

\+

0	2	1
2	1	0
1	0	2

\+ 1 =

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4*

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

\+

0	3	1	2
2	1	3	0
3	0	2	1
1	2	0	3

\+ 1 =

1	8	10	15
11	14	4	5
16	9	7	2
6	3	13	12

Úloha 3.3 Nájdite všetky magické štvorce rádu 3 x 3.

4. SÚČINOVÉ MAGICKÉ ŠTVORCE

Súčinovým magickým štvorcom nazývame štvorcovú tabuľku, v ktorej sú umiestnené navzájom rôzne čísla tak, aby súčin čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach bol rovný konštante - **magickému číslu**.

Úloha 4.1 Do každej tabuľky doplňte čísla tak, aby vznikol súčinový magický štvorec, ktorého magické číslo je minimálne možné.

	24	14	15
21			6
	7		
12		5	28

1		42		
	32		33	
	6	10	28	
20			54	
	18	4		21

1			
	20		2
28		12	
	6		21

	54	12	
		27	
216	4	18	
6			108

Príklad 4.2 Navrhnite operácie, ktorými z latinských štvorcov dostanete súčinový magický štvorec. Aké vlastnosti majú použité latinské štvorce?

Riešenie: **Napríklad:**

$$2\ \wedge \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline 2&3&0&1\\\hline 3&2&1&0\\\hline 1&0&3&2\\\hline\end{array} * 3\ \wedge \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&3&1&2\\\hline 2&1&3&0\\\hline 3&0&2&1\\\hline 1&2&0&3\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2^0 3^0&2^1 3^3&2^2 3^1&2^3 3^2\\\hline 2^2 3^2&2^3 3^1&2^0 3^3&2^1 3^0\\\hline 2^3 3^3&2^2 3^0&2^1 3^2&2^0 3^1\\\hline 2^1 3^1&2^0 3^2&2^3 3^0&2^2 3^3\\\hline\end{array},$$

kde *a* ^ označuje operáciu umocnenia konštanty *a*

na prvky latinského štvorca navrhnutú v znení úlohy 2.5.

Úloha 4.3 Pri riešení úlohy 3.3 sme zistili, koľko existuje magických štvorcov rádu 3. Koľko existuje súčinových magických štvorcov rádu 3?

Metódy vytvárania magických štvorcov a súčinových magických štvorcov z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov sa dajú zovšeobecniť pre magické štvorce a kocky a pre súčinové magické štvorce a kocky vyšších rádov (pozri [5] a [7]). Ďalšie úlohy a námety k téme magické štvorce nájdete v [3], [4], [6]. Mnoho zaujímavých informácií je na internetových stránkach (pozri [8]).

Literatúra:

[1] Bosák, J. : *Latinské štvorce*, ŠMM, Praha 1976

[2] Karpenko, V. : *Tajemství magických čtverců*, Půdorys, Praha 1997

[3] Pavlíková, K. : *Magické štvorce a kocky v škole*, Diplomová práca, PF UPJŠ, Košice 2001 (*http://magic.webpark.sk*)

[4] Semanišinová, I. ; Trenkler, M. : *O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 4/2000(29), 21-34

[5] Trenkler, M. : *Súčinové magické štvorce a kocky*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 1/2002(31), 1-8
[6] Trenkler, M. : *Magic rectangles*, The Mathematical Gazette 83 (1999), 102-105
[7] Trenkler, M. : *A Construction of Magic Cubes,* The Mathematical Gazette 84 (2000), 36-41
[8] *http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html*