Sonda do kombinatorického myslenia žiakov základnej školy

Iveta Scholtzová

ABSTRAKT: *Solving combinatory tasks is the best method leading to developing a combinatory thinking of the pupils. Analyzing pupils' solutions, we obtain a new knowledge for the efficient teaching of combinatory analysis.*

V súčasnej škole nie je jediným cieľom v priebehu edukačného procesu sprostredkovať žiakom množstvo informácií a formálnych vedomostí. Hlavným cieľom, na vyučovacích hodinách matematiky zvlášť, by malo byť rozvíjanie schopnosti myslieť, t.j. formovanie kognitívnej kultúry žiakov. Dôležitým faktorom rozvoja žiakovej osobnosti je jeho aktívna činnosť. V matematike je to jednoznačne riešenie rôznorodých úloh. Z hľadiska rozvíjania tvorivosti žiakov nie je dôležité, koľko úloh sa vyrieši, ale aké sú to úlohy a ako sa riešia. Do kategórie úloh, ktoré prispievajú k rozvíjaniu tvorivého myslenia, patrí aj väčšina kombinatorických úloh. Tieto učia matematizovať reálne situácie, vyžadujú nerutinný, tvorivý postup pri riešení, umožňujú rozvíjanie individuálnych schopností žiakov.

Budeme analyzovať niekoľko žiackych riešení kombinatorických úloh. „Zavedieme sondu" do kombinatorického myslenia žiakov 6. a 7. ročníka základnej školy. Nadväzujeme na príspevky *Scholtzová(2000)* a *Scholtzová (2001)*, prezentované na predchádzajúcich konferenciách v Ružomberku.

Podľa *Hejného – Michalcovej (2001)* sa pri riešení kombinatorických úloh procesuálny prístup výrazne líši od prístupu konceptuálneho. Pri procesuálnom prístupe sa začína náhľadom do kombinatorickej situácie a ďalej sa pokračuje jeho postupným organizovaním. Konceptuálny prístup spočíva v pochopení známych vzorcov pre jednotlivé typy kombinatorických skupín.

V minulosti bol prístup k vyučovaniu kombinatoriky v prevažnej miere konceptuálny. Väčšina učiteľov ho preferovala. V učebniciach bol volený tiež konceptuálny prístup, nakoľko sa kombinatorika v písomnej podobe predkladala oveľa lepšie konceptuálne ako procesuálne. Takto prezentovaná kombinatorika bola náročná na porozumenie. V tom zrejme spočívala hlavná príčina neobľúbenosti kombinatoriky tak u učiteľov matematiky ako aj u ich žiakov. Väčšina žiakov však chápe kombinatorické situácie procesuálne. Sme presvedčení, že práve tento prístup k vyučovaniu kombinatoriky je vhodný. Využívajú ho aj súčasné alternatívne učebnice matematiky pre základnú školu.

V našich experimentoch žiaci 6. a 7. ročníka ZŠ riešili kombinatorické úlohy nie len v čase, kedy sa preberal tematický celok *kombinatorika* (v 6. aj 7. ročníku je zaradený ako posledný), ale v priebehu celého školského roka. Úlohy s kombinatorickou situáciou boli organicky zaradzované k jednotlivým tematickým celkom. Niektoré v sebe obsahovali elementy práve preberaného učiva, iné nie. Žiaci neboli upozornení, že riešia práve kombinatorické úlohy.

Zamerali sme sa na analýzu písomných žiackych riešení, sledovali sme elementy kombinatorického myslenia žiakov.

<u>Zadanie úlohy:</u>

6.ročník: Máme k dispozícii tri desatinné čísla **2,34**; **5,7**; **13,56** (resp. **3,14**; **8,5**; **12,37**) a štyri znamienka: +; -; .; :. Vytvorte rôzne úlohy, v ktorých použijete dané desatinné čísla a dané znamienka (každé číslo a každé znamienko môžete v jednej úlohe použiť najviac raz). Vypočítajte.

7.ročník: Môžeš použiť jednočleny: $\mathbf{-9}\boldsymbol{a}$; $\mathbf{6}\boldsymbol{b}$; **-3** (resp. $\mathbf{-8}\boldsymbol{x}$; $\mathbf{4}\boldsymbol{y}$; **-2**), dvojčleny: $\mathbf{18}\boldsymbol{b}\ \mathbf{-}\ \mathbf{12}\boldsymbol{a}$; $\mathbf{-15}\boldsymbol{a}\ \mathbf{+}\ \mathbf{9}$ (resp. $\mathbf{16}\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{-12x}$; $\mathbf{-24}\boldsymbol{x}\ \mathbf{+6}$), symboly: +; -; .; :; **( )**. Vytvor z nich čo najviac rôznych výrazov. Ak vieš, uprav ich (napr. sčítaj, odčítaj, vynásob, vydeľ, vynímaj pred zátvorku a pod.).

<u>Analýza riešení:</u>

Úloha vhodná na zaradenie pri téme *operácie s desatinnými číslami* (6.ročník), resp. pri téme *výraz a jeho úprava* (7.ročník). Je to divergentná úloha s elementami kombinatoriky. Podľa taxonómie tvorivých úloh od *Zelinu (1990)* je možné, podľa nášho názoru, začleniť ju do kategórie úloh na tvorivosť tretieho stupňa, typ RP – OP – OP (uzavreté zadanie úlohy – otvorený proces – otvorený produkt**)**. Úloha poskytuje dostatok priestoru pre uplatnenie divergentného a kombinatorického myslenia.

Šiestaci pri vytváraní príkladov zostavovali zadania, vo väčšine prípadov, z dvoch aj troch čísel. Len v jedinom riešení začínalo zadanie použitím znamienka mínus. Žiaci, v niekoľkých prípadoch, použili aj zátvorky, ktoré však v zadaní neboli. Vo viacerých riešeniach bola evidentná snaha o systematický prístup pri vytváraní príkladov. Pri takomto postupe bolo zostavených viac príkladov ako v riešeniach, kde bol postup náhodný. Žiaci 6.ročníka preukázali, že dokážu riešiť aj takto netradične zadanú úlohu. K riešeniu pristupovali tvorivo, preukázali dobré kombinatorické aj divergentné myslenie.

Siedmaci sa dopúšťali pri zostavovaní príkladov niekoľkých chýb:

- nerešpektovali dvojčlen pri jeho vstupe do nového výrazu;
- nerešpektovali znamienko mínus, ktoré mal v zadaní niektorý z jednočlenov.

Tieto chyby však poukazujú na nedostatky dôležité z pohľadu úpravy výrazov. Z hľadiska kombinatorického žiaci postupovali, vo väčšine prípadov, maximálne tvorivo, vytvorili veľký počet rôznorodých výrazov. Najväčší počet príkladov bol v tých žiackych riešeniach, v ktorých bol zvolený systematický postup pri zostavovaní výrazov.

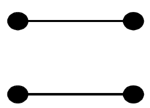
<u>Zadanie úlohy:</u>

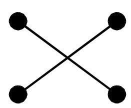
A. Štyria bývalí spolužiaci (označme ich *A, B, C, D*) sa dohodli, že si budú písať. Znázornite graficky (pomocou bodov a úsečiek) nasledujúce situácie: a) každý si písal práve s jedným;
b) každý si písal práve s dvoma;
c) každý si písal práve s troma.

B. Štyri kamarátky boli na jednej diskotéke (označme ich *K*, *L*, *M*, *N*), neprišli však spolu. Znázornite graficky (pomocou bodov a úsečiek) nasledujúce situácie: a) každá sa pozdravila práve s jednou;
b) každá sa pozdravila práve s dvoma;
c) každá sa pozdravila práve s troma.

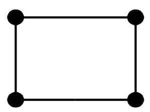
<u>Analýza riešení:</u>

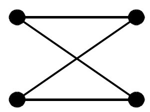
Úlohu kombinatorického typu riešili žiaci 6.ročníka (19 žiakov) aj 7.ročníka (23). Bolo potrebné matematizovať reálnu situáciu prostredníctvom grafického znázornenia. Úloha propedeuticky smeruje do teórie grafov. Počet hrán (úsečiek) grafu je riešením úlohy. Situáciu a) správne znázornilo v 6.ročníku 77% žiakov a v 7.ročníku 96%. Najčastejšie nasledovne: resp.



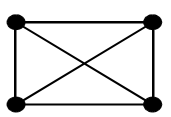


Situáciu b) v 6.ročníku 53%, v 7.ročníku 70% nasledovne:
resp.



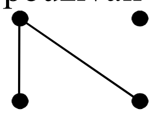


Situáciu c) v 6.ročníku 47%, v 7.ročníku 78% nasledovne:

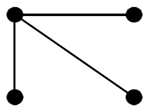


Najčastejšia chyba, ktorej sa žiaci dopúšťali:

- v situácii b) používali znázornenie:



- v situácii c) používali znázornenie:



Žiaci si neuvedomili, že tieto vyššie uvedené grafické interpretácie nezodpovedajú zadaniu úlohy, t.j. každá osoba nemá spojenie s ďalšími dvoma resp. troma.
Siedmaci (v 6.ročníku už preberali tematický celok *Kombinatorika*) sa v niekoľkých prípadoch snažili pred grafickým znázornením vypísať možnosti, ktoré môžu nastať. To šiestaci neurobili ani v jednom prípade, t.j. pri svojich riešeniach uplatnili prirodzenú cestu chápania a grafického znázornenia kombinatorickej situácie.
V niektorých žiackych riešeniach sa v situáciách a), b) vyskytli viaceré verzie znázornenia, t.j. ako rôzne môžu byť osoby prepojené.
Táto úloha ukazuje žiakom použitie kombinatorického aparátu na demonštráciu reálnej situácie, znázornenie medziľudských vzťahov (aplikácia v sociológii, teda „mimo“ matematiky).

Zadanie úlohy:

6.ročník: Dĺžky strán rovnoramenného trojuholníka sú vyjadrené celými číslami. Jeho obvod je 24 cm (resp. 21 cm).Určte dĺžky strán všetkých rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vyhovujú daným podmienkam. Odôvodnite svoj postup riešenia.

7.ročník: Máme zostrojiť trojuholník. Jeho obvod je 24 cm (resp. 21 cm) a veľkosti strán sú celé čísla. Koľko rôznych trojuholníkov môžeme zostrojiť? Nájdite všetky možnosti. Odôvodnite svoj postup riešenia.

Analýza riešení:

Kombinatorická úloha vhodná na zaradenie v 6. aj 7.ročníku pri preberaní témy *trojuholník*. Z hľadiska stupňa tvorivosti úloh patrí, podľa nášho názoru, medzi úlohy druhého stupňa tvorivosti typu RP – RP – OP (uzavreté zadanie úlohy – uzavretý proces – otvorený produkt).
V 6.ročníku (19 žiakov) nebolo ani jedno riešenie úplné. Najbližšie boli riešenia, v ktorých chýbal iba rovnostranný trojuholník, t.j. žiaci rovnostranný trojuholník nepovažujú za rovnoramenný. V niekoľkých riešeniach nebola rešpektovaná trojuholníková nerovnosť. Z pohľadu

kombinatoriky je dôležité, že sa vyskytli riešenia, v ktorých boli uvedené ako rôzne zhodné trojuholníky (rovnaké veľkosti strán zapísané v inom poradí). Žiaci nedostatočne pri riešení kombinatorických úloh rozlišujú, čo je, vzhľadom na zadanie, rovnaké a čo je rôzne. Chýba systematický postup pri riešení. V prípadoch, kde bola snaha o takýto postup, riešenia boli takmer úplné. Iba polovica žiakov sa snažila odôvodniť svoj postup riešenia, pravdepodobne nie sú zvyknutí na takýto druh činnosti.
Siedmaci (22 žiakov) boli úspešnejší pri riešení svojej úlohy. Ich prístup bol vo viacerých prípadoch systematický, mnohí zapisovali riešenia do tabuľky. Opäť sa vyskytli zhodné trojuholníky, teda nedokonalé rozlíšenie, čo je rovnaké a čo je rôzne. Až na jedno riešenie, všetci sa pokúsili odôvodniť svoj postup riešenia.
Riešenia tejto, z kombinatorického hľadiska elementárnej úlohy, ukázali, že v tomto prípade najväčšou prekážkou úspešnosti je absencia systematického postupu.

<u>Zadanie úlohy:</u>
Chceme vysadiť kvetinový záhon s výmerou 90 m^2 (resp. 100 m^2). Ty si záhradný architekt a máš navrhnúť jeho tvar. Skús načrtnúť, ako by mohol kvetinový záhon vyzerať, nezabudni na jeho výmeru. Do obrázka vpíš rozmery. Vymysli čo najviac vhodných návrhov.
<u>Analýza riešení:</u>
Úloha pre 6.ročník, vhodná na zaradenie pri téme *Obsah rovinných útvarov***.** Geometrická divergentná úloha s elementami kombinatoriky. Podľa nášho názoru, je možné zaradiť ju do kategórie úloh na tvorivosť tretieho stupňa, typ RP – OP – OP (uzavreté zadanie úlohy – otvorený proces – otvorený produkt)**.** Pri riešení je potrebné skĺbiť teoretické vedomosti o obsahoch rovinných útvarov, rovinnú predstavivosť, divergentné a kombinatorické myslenie.
Žiacke riešenia ukázali, že vo väčšine prípadov spojenie vyššie spomínaných faktorov určite nastalo. Znázornený bol veľký počet rôznorodých rovinných útvarov. Okrem tradičných obdĺžnikov s rôznymi rozmermi sa často vyskytovali rovnoramenné trojuholníky, lichobežníky a rovnobežníky. Ďalej to boli zložené útvary z obdĺžnikov, štvorcov, trojuholníkov a osobitne také, ktoré boli určite inšpirované sieťami kocky. V jednom riešení sa objavil pravidelný osemuholník.
Dôležitým krokom v niektorých riešeniach bola sebakontrola. Ak bol vytvorený útvar zložitejší, a teda jeho obsah nebol zrejmý na prvý pohľad, žiaci robili kontrolu svojho návrhu dôsledným výpočtom obsahu daného útvaru.
Množstvo rovinných útvarov, ktoré žiaci znázornili, jednoznačne ukázalo, že ich kombinatorické myslenie je na primeranej úrovni a jeho ďalšie rozvíjanie môže stavať na dobrých základoch.

Analýza žiackych písomných prejavov umožňuje pochopiť myšlienkové pochody pri riešení kombinatorických úloh. Odhaľuje podstatné kroky v riešení. Dáva možnosť porozumieť mechanizmu žiakovho kombinatorického myslenia. Všetky získané poznatky pomôžu prekonať prekážky a problémy pri vyučovaní kombinatoriky.

V edukačnom procese je veľmi dôležité, aby žiak rozumel svojmu učiteľovi. Nemenej dôležité je však aj to, aby učiteľ rozumel matematickej činnosti žiaka, teda aby chápal aj jeho kombinatorické myslenie.

Literatúra:

1. Hejný, M. – Michalcová, A. (2001): *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava: Metodické centrum v Bratislave, 2001. ISBN 80-8052-085-2
2. Scholtzová, I. (2000): *Kombinatorika na základnej škole.* In: Zborník príspevkov z konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra“ na Pedagogickej fakulte Katolíckej Univerzity v Ružomberku 6. až 8. septembra 2000. Katolícka Univerzita v Ružomberku. s. 126 – 129.
3. Scholtzová, I. (2001): *Kombinatorické úlohy v prijímacích testoch na stredné školy.* In: Zborník príspevkov z konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra“ na Pedagogickej fakulte Katolíckej Univerzity v Ružomberku 5. až 7. septembra 2001. Katolícka Univerzita v Ružomberku. s. 157 – 162.
4. Zelina, M. (1990): *Tvorivosť v matematike.* Bratislava: Krajský pedagogický ústav v Bratislave, 1990. ISBN 80-85185-34-2

Adresa autorky:
RNDr. Iveta Scholtzová
Katedra matematiky PF PU
Ul. 17. novembra 1, 081 16 Prešov
e-mail: scholtzi@unipo.sk