Rovnice kuželoseček

Petr Rys a Tomáš Zdráhal

ABSTRACT: *The fact conic sections can be gained as an envelope of one-parametric system of lines in the plane is well known. The aim of this paper is to show that it is possible to prove this fact without derivatives. The effect of this access appears evident: We can properly acquaint with conic sections and their equations even students of the lower grades of high schools.*

Rovnici obalové křivky neboli obálky, která obaluje jednoparametrickou soustavu rovinných křivek o rovnici

$$F(x, y, u) = 0,$$

kde u značí proměnný parametr nezávislý na x a y, dostaneme eliminací u z rovnic

$$F(x,y,u) = 0, \frac{\partial F(x,y,u)}{\partial u} = 0$$

Přitom je tečna v bodě obálky zároveň tečnou právě jedné z křivek dané jednoparametrické soustavy křivek.

Bude-li se jednat o jednoparametrickou soustavu <u>přímek</u> může být obálkou (při vhodné volbě této soustavy) některá z kuželoseček. S kuželosečkami se žáci seznamují nejpozději v nižších ročnících středních škol, avšak diferenciální počet v tomto věku ještě zdaleka neznají.

Přesto si mohou (na základě učitelovy pomoci) sami dokázat, že obálka dané jednoparametrické soustavy přímek je opravdu dopředu výše zmíněná kuželosečka.

Stačí jim k tomu pouze dobře si uvědomit (viz výše), že tečna v bodě obálky (v našem případě <u>tečna v bodě kuželosečky</u>) je zároveň tečnou k jedné z křivek dané jednoparametrické soustavy křivek (v našem případě <u>přímkou této soustavy</u>, neboť zde se jedná o jednoparametrickou soustavu <u>přímek</u>).

To, že tečna ke kuželosečce je přímka, která s ní má společný právě jeden bod, spolu s faktem, že kvadratická rovnice má jeden (dvojnásobný) kořen právě tehdy, když její diskriminant je nulový, už postačí k tomu, aby byli žáci schopni dokázat, že obálka daného jednoparametrického systému přímek je avizovaná kuželosečka.

Předtím, než celý proces ukážeme, poznamenejme následující:

1) Vznik kuželoseček lze demonstrovat pouze skládáním listu papíru; pro znázornění paraboly nám stačí označit na tomto papíru pouze jeden bod, pro elipsu a hyperbolu potřebujeme navíc narýsovat jednu kružnici. Odtud je zřejmé, že tento přístup je možné praktikovat kdykoliv a kdekoliv.
2) Je vhodné demonstrovat proces v Cabri – geometrii, celá situace je pak ještě názornější než v bodě 1). Navíc lze např. pomocí příkazu „najít délku“ ukázat, že nalezené obálky mají vlastnost, že
$$KF = e \cdot KD$$
kde K je bod obálky (kuželosečky), F a D jsou vhodně zvolené body a e (tzv. excentricita) je reálné číslo (pro parabolu je $e = 1$, pro elipsu je $e < 1$ a pro hyberbolu je $e > 1$.

3) Sestavení kvadratické rovnice, jejímž řešením jsou např. x-ové souřadnice průsečíků kuželosečky s přímkou jednoparametrické soustavy, je poměrně pracné. Navíc je potřeba vhodně zvolit soustavu souřadnic, aby byl výpočet co nejjednodušší. Z tohoto důvodu již jen tato fáze procesu řešení celého problému může sloužit jako účelná (neboť k něčemu konkrétnímu vede, a sice, jak již bylo řečeno ukazuje, že obálka soustavy křivek je kuželosečkou, což je jev, který v žádném případě není na první pohled zřejmý) úprava algebraických výrazů.

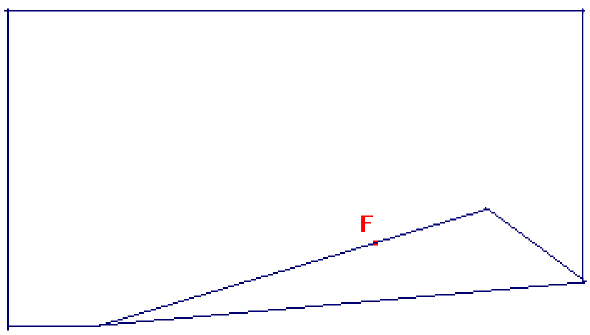
Parabola

Vezměme list papíru a vyznačme na něm libovolný bod F. (Pouze kvůli názornějšímu výsledku umístěme tento bod několik centimetrů nad spodní okrajem papíru.)

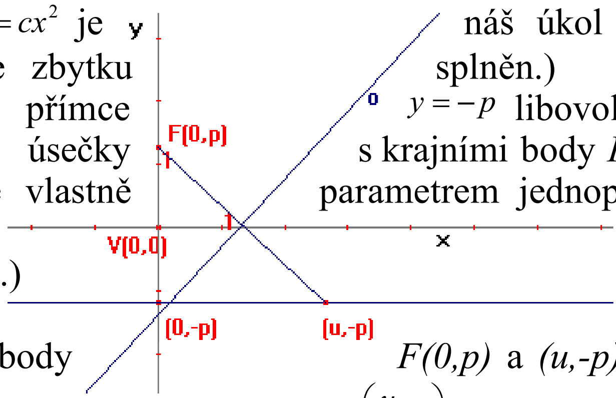
Nyní přehněme kterýkoliv ze spodních rohů papíru tak, aby se spodní okraj papíru dotýkal našeho bodu F. Ohyb několikrát „zvýrazněme" tlakem prstů a papír znovu narovnejme.

Předchozí aktivitu opakujme ještě mnohokrát s tím, že pokaždé se dotkne bodu F jiný bod spodního okraje papíru. Zjistíme, že ohyby narovnaného papíru vytvářejí křivku, která nám připomíná parabolu. Je tomu skutečně tak?

Než přistoupíme k řešení tohoto problému, uveďme, že mají-li naši žáci k dispozici na nějakém počítači program Cabri-geometrie mohou celou situaci (po opravdu jen velice krátkém seznámení se s tímto programem) sami velice rychle znázornit. (viz. [1]):



Zvolme nyní vhodně pravoúhlou soustavu souřadnic. A sice tak, že spodní okraj papíru bude mít rovnici $y=-p$ a bod, který jsme na papíře vyznačili (označme jej *F*) bude mít souřadnice *(0, p)*. Z předchozích aktivit (ohýbání papíru či kreslení příslušných os) se zdá být rozumná úvaha, že bod *F (0, p)* asi bude ohniskem obálky těchto ohybů či os, tedy ohniskem takto vzniklé paraboly. Je-li toto pravda, musí mít parabola rovnici $y=\dfrac{x^2}{4p}$. (Není-li tato skutečnost našim žákům známa, nemění to nic na faktu, že dokázáním, že obálka má rovnici tvaru $y=cx^2$ je náš úkol (ukázat, že obálka je parabola) beze zbytku splněn.)



Zvolme nyní na přímce $y=-p$ libovolný bod *(u,-p)* a sestrojme osu úsečky s krajními body *F(0,p)* a *(u,-p)*. (Reálné číslo *u* bude vlastně parametrem jednoparametrické soustavy os úseček s uvedenými krajními body.)

Odvoďme nyní rovnici osy *o*: Úsečka s krajními body *F(0,p)* a *(u,-p)* má zřejmě směrnici $-\dfrac{2p}{u}$ a její střed má souřadnice $\left(\dfrac{u}{2},0\right)$. Proto osa této úsečky má rovnici

$$y=\frac{u}{2p}x-\frac{u^2}{4p}.$$

Ověřme nyní, že tato osa je tečnou k parabole o rovnici

$$y=\frac{x^2}{4p}.$$

Tím ukážeme, jak bylo výše řečeno, že obálka jednoparametrické soustavy přímek tvaru $y=\dfrac{u}{2p}x-\dfrac{u^2}{4p}$ (reálné číslo *u* je parametr, kladné číslo *p* je polovina čísla udávajícího vzdálenost zvoleného bodu *F* od okraje papíru) je opravdu parabolou.

Hledejme nejprve průsečík osy *o* a paraboly:

$$\frac{u}{2p}x-\frac{u^2}{4p}=\frac{x^2}{4p}.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou přepíšeme do tvaru

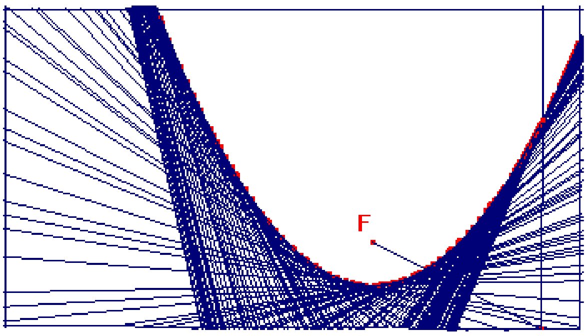
$$x^2-2ux+u^2=0.$$

Protože determinant této rovnice má hodnotu $4u^2-4u^2=0$, je zřejmé, že osa *o* a parabola mají společný právě jeden bod, a tudíž, že osa *o* je tečnou této paraboly – celý problém je tedy vyřešen.

Pokračujme však dále. Řešením předchozí kvadratické rovnice dostáváme

$$x=u,$$

což nám říká, že bod dotyku osy *o* a paraboly má souřadnice $\left(u, \frac{u^2}{4p}\right)$. To znamená, že bod dotyku, dostaneme jako průsečík osy *o* a přímky o rovnici $x = u$. Nebo-li, naší parabolu dostaneme také tak, že kreslíme stopu bodu $\left(u, \frac{u^2}{4p}\right)$ vznikající měnícím se parametrem *p:*

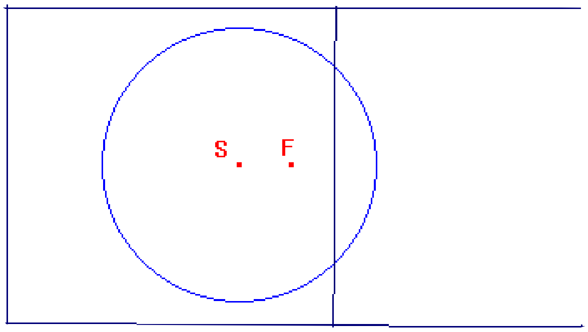


Elipsa

Nakresleme na list papíru kružnici se středem *S* a dále libovolný bod *F* ležící v jejím vnitřku. (Opět pouze kvůli názornějšímu výsledku narýsujme kružnici někam doprostřed papíru a bod *F* zvolme tak, aby nebyl totožný s jejím středem a aby ležel několik centimetrů od kružnice.)

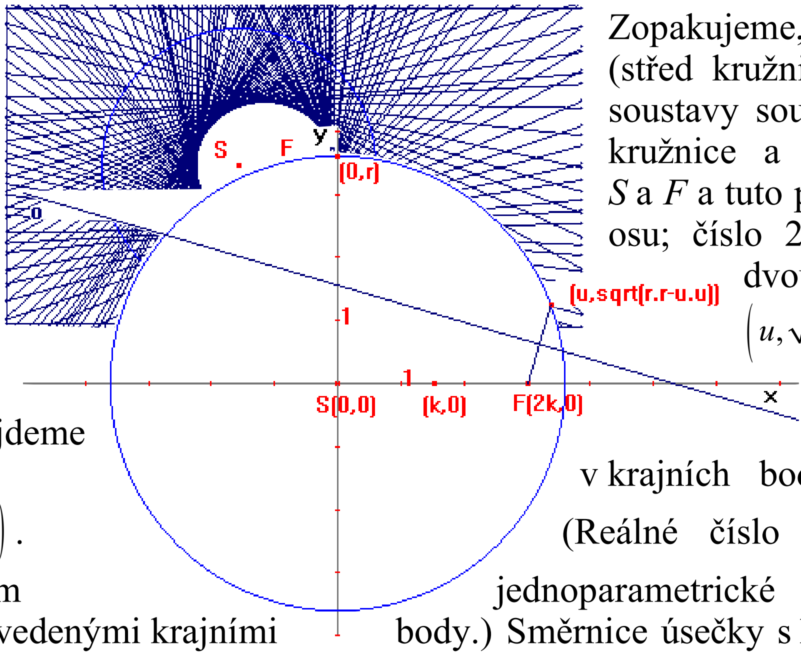
Nyní přehněme kterýkoliv ze spodních rohů papíru tak, aby se libovolný bod kružnice dotýkal bodu *F*. Ohyb zase několikrát „zvýrazníme“ tlakem prstů a papír znovu narovnáme. (Srovnej s postupem u paraboly.)

Opakujme předchozí aktivitu opět vícekrát s tím, že pokaždé dotkne našeho bodu *F* jiný bod kružnice. Zjistíme, že ohyby narovnaného papíru vytvářejí křivku, která nám připomíná elipsu. Ptejme se tedy, je-li to pravda. Ukažme si nejprve, jak vypadá celá situace znázorněná v Cabri-geometrii (viz [1]):



Z předchozích aktivit (ohýbání papíru či kreslení příslušných os) opět (zvláště tehdy uděláme-li předchozí „pokusy“ pro různě dané body *F*) dojdeme k názoru, že body *S* a *F* budou zřejmě ohniska vzniklé elipsy. Vhodným zvolením pravoúhlé soustavy souřadnic pak důkaz toho, že obálka je opravdu elipsa s těmito dvěma ohnisky vyplyne z následujícího:

Zopakujeme, že je dáno S (0,0) (střed kružnice umístěný do počátku soustavy souřadnic, poloměr r této kružnice a $F(2k,0)$ (spojili jsme bod S a F a tuto přímku zvolili za x-ovou osu; číslo $2k$ je vzdálenost těchto dvou bodů. Bod $\left(u,\sqrt{r^2-u^2}\right)$ je libovolný bod kružnice, a my najdeme rovnici osy o úsečky v krajních bodech $F(2k,0)$ a $\left(u,\sqrt{r^2-u^2}\right)$. (Reálné číslo $u\in\langle -r,r\rangle$ bude parametrem jednoparametrické soustavy os úseček s uvedenými krajními body.)



Směrnice úsečky s krajními body F $(2k,0)$ a $\left(u,\sqrt{r^2-u^2}\right)$ je zřejmě $\frac{\sqrt{r^2-u^2}}{u-2k}$ a její střed má souřadnice $\left(2k+\frac{u-2k}{2},\frac{\sqrt{r^2-u^2}}{2}\right)=\left(\frac{2k+u}{2},\frac{\sqrt{r^2-u^2}}{2}\right)$. Odtud už po dosazení do rovnice přímky dostaneme rovnici osy o ve tvaru

$$y=\frac{2k-u}{\sqrt{r^2-u^2}}x+\frac{r^2-4k^2}{2\sqrt{r^2-u^2}}.$$

Chceme dokázat, že tato osa je tečnou k elipse, o středu v bodě $(k,0)$, ohnisky S $(0,0)$ a $F(2k,0)$ a hlavní poloose $a=k+\frac{r-2k}{2}=\frac{r}{2}$. (Skutečně, délka hlavní poloosy vzniklé elipsy nezávisí na čísle $2k$, neboť i bod $(r,0)$ se musí dotknout bodu $F(2k,0)$ a přímka o rovnici $x=k+\frac{r}{2}$ je kolmá na hlavní osu elipsy a má s elipsou o hlavní poloose $\frac{r}{2}$ společný právě jeden bod, čili je jednou z těch, jejichž obálkou tato elipsa je.) Shora popsaná elipsa má rovnici (pro vedlejší poloosu b platí $b^2=a^2-k^2$):

$$\frac{(x-k)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2-k^2}=1.$$

Odtud postupně dostáváme

$$y^2=\frac{r^4-4k^2r^2-4\left(r^2-4k^2\right)(x-k)^2}{4r^2}$$

a po dalších úpravách

$$y^2 = \frac{4k^2 - r^2}{r^2} x^2 + \frac{2r^2 k - 8k^3}{r^2} x + \frac{\left(r^2 - 4k^2\right)^2}{4r^2}.$$

Umocněním rovnice osy dostáváme

$$y^2 = \frac{4k^2 - 4ku + u^2}{r^2 - u^2} x^2 + \frac{2kr^2 - r^2 u - 8k^3 + 4k^2 u}{r^2 - u^2} x + \frac{\left(r^2 - 4k^2\right)^2}{4\left(r^2 - u^2\right)}.$$

Společné body osy o a elipsy najdeme tak, že řešíme kvadratickou rovnici vzniklou porovnáním dvou předchozích rovnic:

$$\frac{4kr^2 u - 4k^2 u^2 - r^4}{r^2\left(r^2 - u^2\right)} x^2 + \frac{r^4 u - 2kr^2 u^2 - 4k^2 r^2 u + 8k^3 u^2}{r^2\left(r^2 - u^2\right)} x - \frac{u^2\left(r^2 - 4k^2\right)^2}{4r^2\left(r^2 - u^2\right)} = 0.$$

Spočítejme diskriminant této kvadratické rovnice. Vyjde nám, že je roven 0 a je tedy elipsa opravdu obálkou našich os a problém je vyřešen.

Literatura:

1. Rys, P., Zdráhal, T.: Kuželosečky a Cabri Geometrie, Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy, sborník z konference. Olomouc, 2002, 158-162