;KOMBINATORIKA V 6. ROČNÍKU ZÁKLADNEJ ŠKOLY Z HĽADISKA POZNÁVACIEHO PROCESU

Gabriela Pringerová

ABSTRACT : The article deals with teaching of combinatorics at the sixth class (11 – 12 years old children) at the grammar school of the view of the cognitive process.

Cieľom tohto príspevku je urobiť rozbor učiva kombinatoriky v 6. ročníku na základnej škole z hľadiska poznávacieho procesu, ktorý tu chápeme v zmysle teórie opísanej v [3]. Podľa tejto teórie kostru poznávacieho procesu tvorí trojica :

→ ***motivácia*** ***skúsenosti*** ***poznanie***

Kombinatorika podporuje rozvoj pozornosti, flexibility, tvorivosti, divergentného, logického a kombinatorického myslenia. Mnohé kombinatorické úlohy majú niekoľko riešení, teda rozvíjajú divergentné rozumové operácie, ktoré súvisia s tvorivou činnosťou. Úlohy z kombinatoriky majú veľkú motivačnú hodnotu a približujú matematiku k životu. Kombinatorika poskytuje možnosť žiakom ukázať, že aj matematika môže byť hrou. Skúsenosti detí získané pri „ kombinatorickej hre “ zaiste obohatia ich vnútorný svet a snáď aj prispejú k zlepšeniu ich vzťahu k matematike.

Obsahom vyučovania kombinatoriky v 6. ročníku na základnej škole sú primerané úlohy s kombinatorickou motiváciou a ich riešenie rôznymi spôsobmi. Cieľom vyučovania je naučiť žiakov vypisovať všetky možnosti podľa určitého systému. Kombinatorike v 6. ročníku je podľa učebných osnov venovaných 10 vyučovacích hodín v závere školského roka.

1. *ETAPA MOTIVÁCIE*

Žiak šiestak slovo kombinatorika počuje pravdepodobne prvýkrát. Zdá sa mu trochu zvláštne a vôbec si nevie predstaviť, čo sa asi budeme učiť. Pod pojmom ***kombinatorika*** rozumieme určitú oblasť matematiky, ktorá je nielen zaujímavá ale má aj rozsiahle použitie. Zaoberá sa organizovaním – kombinovaním prvkov určitej množiny do prehľadných tabuliek, grafov, schém a zoznamov. Ukážeme si to neskôr na príkladoch. Rozličné kombinatorické úlohy riešili už starogrécki matematici, neskôr indickí a arabskí matematici. Ako vedná oblasť sa začala kombinatorika formovať v 16. storočí, keď sa kombinatorické úlohy riešili najmä v súvislosti s hazardnými hrami.

Na začiatku vyučovania základov kombinatoriky mali by sme nadviazať na predchádzajúce poznatky žiakov, ktoré najviac súvisia s touto oblasťou matematiky. Ktoré a aké sú to poznatky?

Ide o poznatky žiakov o čísle a jeho zápise. Stretli sa s tým v úlohách, v ktorých bolo treba z daných cifier zostaviť čo najviac dvoj -, troj -, resp. štvorciferných čísel bez nároku na vymenovanie všetkých takýchto čísel.

Väčšinou sú tieto poznatky izolované, nesystematické a najmä minimálne. Tieto úlohy sa uvádzali v dvojakom znení a to : ako úlohy, v ktorých sa číslice opakovali, resp. úlohy, v ktorých sa číslice neopakovali.

Môžeme začať motivačnými príkladmi.

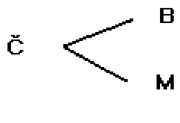
Príklad 1

Máme tri šálky : červenú, bielu a modrú. Koľkými spôsobmi ich môžeme uložiť na poličku vedľa seba do radu ? Nakreslite všetky možné usporiadania.

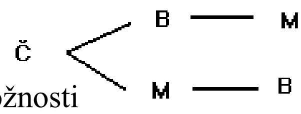
Riešenie :

Necháme žiakov najprv samostatne kresliť uloženie šálok. Bolo by vhodné, aby žiaci mali k dispozícií konkrétne šálky na ktorých by mohli situáciu modelovať. Ak žiak vie zostaviť aspoň jedno požadované usporiadanie tak to znamená, že pochopil zadanie príkladu. Úlohou učiteľa je aby viedol žiakov k nájdeniu všetkých možných usporiadaní. V závere riešenia tejto úlohy uskutočníme pomocou žiakov systematizáciu riešenia príkladu :

Označme šálky takto : červená – Č, biela – B, modrá – M. Ako prvú môžeme na poličku položiť červenú šálku, na druhé miesto môžeme položiť bielu alebo modrú šálku. Znázornime si to graficky takto :



Na treťom mieste môže stáť šálka, ktorá zostala; teda v prípade prvej dvojice zostala modrá a v prípade druhej dvojice biela šálka. Názorne :



Z obrázka vidíme dve možnosti usporiadania šálok a to **ČBM** a **ČMB**. Podobne to bude, keď na prvé miesto postavíme bielu alebo modrú šálku. Názorne :

Odpoveď : Červenú, bielu a modrú šálku možno na poličku vedľa seba uložiť šiestimi spôsobmi a to : ČBM, ČMB, BMČ, BČM, MČB, MBČ.

Grafické znázornenie ktoré sme použili v príklade sa nazýva ***stromový graf***.

Príklad 2

Traja priatelia Adam, Bohuš a Cyril prechádzali cez úzku lávku a išli za sebou. V koľkých rôznych poradiach mohli prejsť cez lávku? Zakreslite alebo zapíšte všetky možné poradia.

Riešenie :

Na začiatku necháme žiakov na úlohe voľne pracovať. Ak žiak našiel aspoň jedno požadované poradie, znamená to, že pochopil zadanie príkladu. Úlohou učiteľa je aby viedol žiakov k nájdeniu všetkých možných poradí. Na záver zosumarizujeme počet všetkých riešení podobnou úvahou ako v príklade 1.

V motivačnej časti môžeme uviesť aj ďalšie typy úloh, ktorými sa neskôr budeme zaoberať aby žiaci mali predstavu o tom, čo budeme ďalej robiť a vzbudili sme v nich záujem.

2. ETAPA SKÚSENOSTÍ

Po úvodnej časti a motivácii nasleduje etapa nadobúdania skúseností. Pri riešení rôznych primeraných úloh, používaním rôznych spôsobov riešenia a postupov a samozrejme aj na vlastných chybách žiaci získavajú skúsenosti s riešením kombinatorických úloh.

Cieľom vyučovania základov kombinatoriky na základných školách nie je pojmové objasnenie klasických kombinatorických problémov ani odvodenie a použitie príslušných vzorcov. Riešením konkrétnych úloh, ich rôznymi spôsobmi zápisu (znázornenia) žiaci nadobúdajú skúsenosti, ktoré sú dobrým predpokladom pre systematický kurz kombinatoriky na stredných školách. Pri preberaní tohto učiva by sme mali využiť ochotu žiakov 6. ročníka modelovať, znázorňovať a vypisovať situácie vyskytujúce sa v kombinatorických úlohách a ich riešeniach.

Úloha 1

Pomocou cifier 8 a 3 napíšte všetky dvojciferné čísla, pričom cifry sa môžu opakovať. Koľko je takých cifier?

Úloha 2

Z písmen O, D napíšte všetky dvojpísmenkové slová bez opakovania písmen. Koľko je takýchto slov?

Úlohy 1 a 2 žiaci bez väčších problémov zvládnu. Teraz postúpime k riešeniu podobných ale náročnejších úloh.

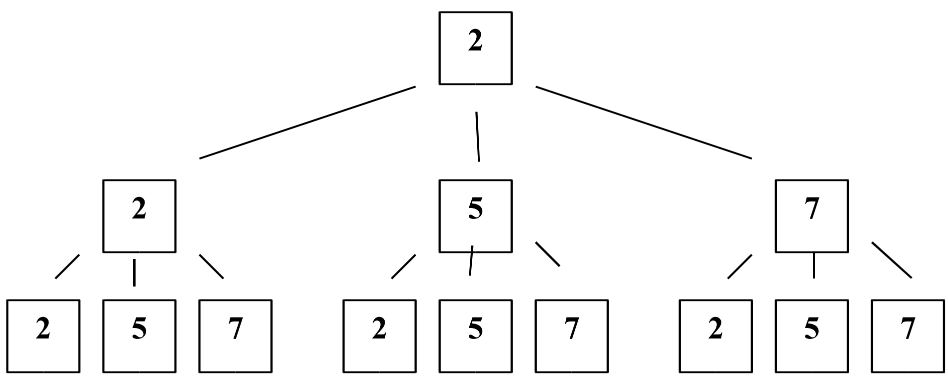
Príklad 3

Pomocou cifier 2, 5, 7 napíšte všetky trojciferné čísla, pričom cifry sa môžu opakovať. Koľko je takýchto čísel?

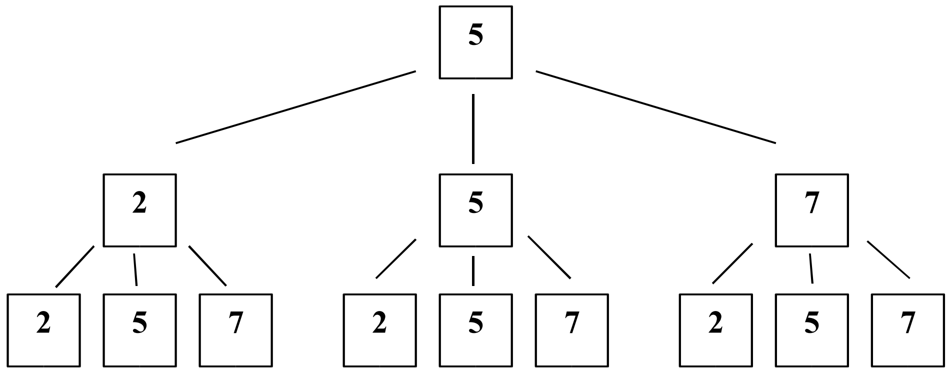
Riešenie :

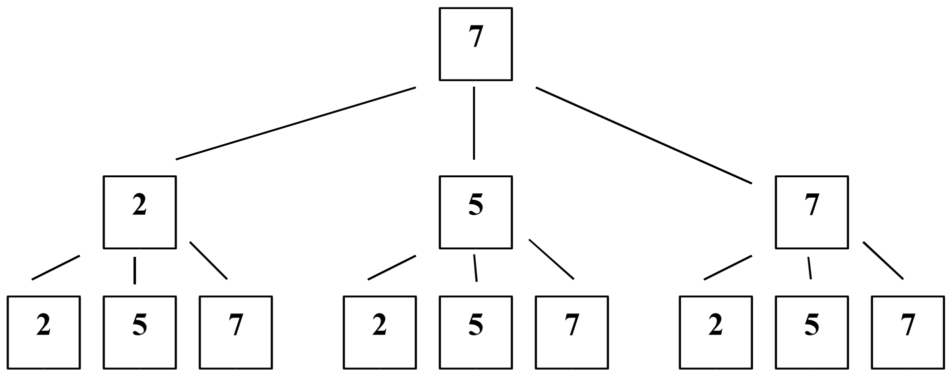
Tušíme, že v tomto prípade bude viac riešení ako v úlohách 1 a 2. Aby sme na niektoré riešenie nezabudli, mali by sme postupovať systematicky t.j. nájsť taký systém, ktorý nám zaručí, že žiadne riešenie nevynecháme.

Použijeme opäť stromový graf. Na prvé miesto – rad stoviek napíšeme číslicu 2. Potom na druhé miesto – rad desiatok napíšeme číslice 2, 5, 7. Číslicu 2 môžeme použiť aj na druhé miesto, pretože je dovolené opakovanie cifier. Na tretie miesto – rád jednotiek môžeme napísať, ktorúkoľvek z číslic 2, 5, 7, pretože sa môžu opakovať. Názorne :



Podobná situácia nastane ak na prvé miesto položíme číslice 5 a 7. Názorne :





Odpoveď : Všetkých trojciferných čísel vytvorených z cifier 2, 5, 7, pričom sa cifry môžu opakovať je 27. Sú to čísla : 222, 225, 227, 252, 255, 257, 272, 275, 277, 522, 525, 527, 552, 555, 557, 572, 575, 577, 722, 725, 727, 752, 755, 757, 772, 775, 777.

Pripomenieme žiakom, že pomocou stromového grafu možno systematicky zapisovať a hľadať nielen trojciferné ale aj štvorciferné a viacciferné čísla. Využitím stromového grafu možno riešiť úlohy v ktorých ide o nájdenie všetkých možných usporiadaní daného počtu prvkov.

Príklad 4

Koľkými spôsobmi si môže Marienka vložiť do peračníka vedľa seba štyri rôznofarebné pastelky?

Riešenie :

Nech má Marienka tieto štyri pastelky, ktoré si označíme : biela – B, modrá – M, zelená – Z, ružová – R. Úlohu môžeme riešiť buď stromovým grafom alebo tabuľkovou metódou, ktorú ukážeme na tejto úlohe:

Do tabuľky prehľadne vpisujeme všetky možné usporiadania štyroch rôznofarebných pasteliek, pričom postupujeme systematicky. Začneme napr. bielou pastelkou na prvom mieste a nájdeme všetky možnosti.

1.	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**M**	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**
2.	**M**	**M**	**Z**	**Z**	**R**	**R**	**B**	**B**	**Z**	**Z**	**R**	**R**	**B**	**B**	**M**	**M**	**R**	**R**	**B**	**B**	**Z**	**Z**	**M**	**M**
3.	**Z**	**R**	**M**	**R**	**M**	**Z**	**Z**	**R**	**B**	**R**	**B**	**Z**	**M**	**R**	**B**	**R**	**B**	**M**	**Z**	**M**	**B**	**M**	**B**	**Z**
4.	**R**	**Z**	**R**	**M**	**Z**	**M**	**R**	**Z**	**R**	**B**	**Z**	**B**	**R**	**M**	**R**	**B**	**M**	**B**	**M**	**Z**	**M**	**B**	**Z**	**B**

Odpoveď : Jednotlivé stĺpce tabuľky predstavujú všetky možné usporiadanie štyroch rôznofarebných pasteliek v peračník. Ich počet je 24.

V šiestom ročníku sa ďalej riešia úlohy na vytváranie skupín prvkov s menším počtom ako je daný počet, napríklad :

- pomocou cifier 2, 4, 6, 8 napíšte všetky trojciferné čísla s opakovaním cifier,
- napíšte všetky možné výsledky hodov dvoma hracími kockami,
- z písmen K, L, M, O, P vytvorte všetky dvojpísmenové monogramy.

Pri riešení úloh z kombinatoriky dbáme na to, aby žiaci hľadali riešenia systematicky, či už použitím stromového grafu alebo tabuľky.

3. ETAPA FORMOVANIA POZNATKU

Zrejme potrvá dlho, dokiaľ žiak za pomoci učiteľa pochopí, že úlohy typu :

- *nakresliť tromi rôznofarebnými ceruzkami všetky možné trojpásové zástavy,*
- *napísať pomocou troch cifier všetky možné trojciferné čísla bez opakovania,*
- *napísať všetky možné slová pomocou písmen A, T, K tak, že každé písmeno sa môže vyskytnúť v slove len raz,*

majú rovnakú štruktúru a vedú k rovnakým matematickým modelom. Pre mnohých žiakov bude obtiažne pochopiť aj to, že z matematického hľadiska úlohy typu *napísať všetky trojciferné čísla z cifier 2, 6, 9 alebo z cifier 1, 3, 5 bez opakovania* sú úplne rovnocenné. Ak žiak toto pochopí, stáva sa táto skúsenosť pre neho univerzálnym modelom všetkých možných usporiadaní *k*-prvkovej množiny.

Často nepotrebujeme vypísať všetky možnosti, stačí nám vedieť, koľko ich je. Po vyriešení niekoľkých úloh si žiaci všimnú, že keď ide o všetky usporiadania trojprvkovej množiny bez opakovania prvkov, možností je vždy 6, pri štvorprvkovej množine je ich vždy 24. S narastaním počtu prvkov množiny neúmerne narastá počet všetkých možných usporiadaní danej množiny.

Ako by sme zistili počet všetkých možných usporiadaní danej množiny bez toho, aby sme vypisovali všetky možnosti. Aby na to žiaci prišli sami, môžeme im pomôcť nasledujúcou úvahou.

Pozrime sa na ***príklad 4***. Na prvé miesto v peračníku má Marienka uložiť hociktorú zo štyroch pasteliek, má teda štyri možnosti. Na druhé miesto už môže položiť len jednu zo zvyšných troch pasteliek, pre tento výber má tri možnosti. Na tretie miesto môže položiť len jednu zo zostávajúcich dvoch pasteliek. Teda má dve možnosti. Pri poslednom mieste už nemá na výber, pretože ostala len jedna pastelka. Spolu je to teda **4. 3. 2. 1 = 24** možností.

Aj keď na základnej škole nezavádzame pojem faktoriál, môžeme na spestrenie učiva uviesť, že čísla s ktorými sme sa tu stretli označujeme s výkričníkom a nazývame ich ***faktoriál čísla***. Napr. **4!** čítame „ faktoriál čísla 4 „„ resp. „ štyri faktoriál „ a znamená to : **4! = 4. 3. 2. 1**. Analogický význam má **3!**, t.j. **3! = 3. 2. 1**.

Podobnými úvahami ako v príklade 1, resp. v úlohe 1 vedieme žiakov k zisteniu, že všetky možných usporiadaní dvojprvkovej množiny s opakovaním je 4 = 2. 2 a pre trojprvkovú množinu s tým istým zadaním úlohy prichádzame k výsledku 27 = 3. 3. 3 .

Na záver tematického celku v učive kombinatoriky v 6. ročníku ZŠ sú zaradené úlohy na výber a usporiadanie menšieho počtu ako je daný počet. V týchto úlohách tak ako v predchádzajúcich sa vyskytujú dve možnosti ich usporiadania : s opakovaním prvkov, resp. bez opakovania prvkov. Aj pri tomto type úloh sa osvedčilo zohľadniť uvedené etapy poznávacieho procesu, avšak úloha sa žiakom nejaví ako úplne nová, nakoľko môžu využiť postupy, zručnosti a skúsenosti nadobudnuté riešením predchádzajúcich typov úloh. Je vhodné začať výberom dvojprvkovej množiny z trojprvkovej, resp. štvorprvkovej a potom pokračovať úlohami na výber trojprvkovej množiny zo 4, 5 – prvkovej množiny a tieto potom usporadúvať požadovaným spôsobom.

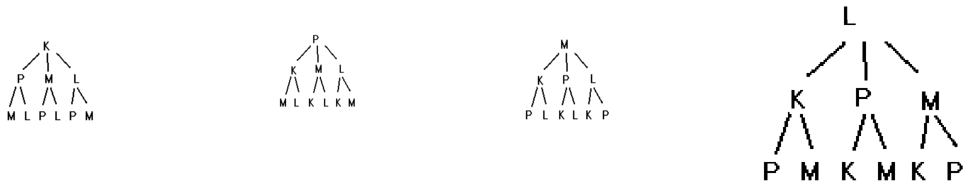
Príklad 5

Na tréningu trénovali štyria cyklisti : Karol, Peter, Marián, Ladislav. Koľkými rôznymi poradiami mohli prísť prví traja do cieľa ? Napíšte všetky možnosti a určite ich počet.

Riešenie :

Prvé miesto mohol obsadiť hociktorý z nich. Teda máme štyri možnosti na obsadenie prvého miesta. Druhé miesto mohli obsadiť len zvyšní traja a tretie miesto len tí dvaja ktorí neobsadili ani prvé, ani druhé miesto. Spolu je to teda **4. 3. 2 = 24** možností. Riešenie pomocou stromového grafu bude :

1. miesto :
2. miesto :
3. miesto:



Nezabudnime zdôrazniť, že možnosti KPM a KMP považujeme za rôzne. Zatiaľ, čo KPM znamená, že na 1. mieste sa umiestnil Karol, na 2. mieste Peter a na 3. mieste Marián, možnosť KMP znamená takého umiestnenie : 1.miesto – Karol, 2. miesto – Marián, 3. miesto – Peter. Teda záleží na poradí víťazov.

Odpoveď : Do cieľa mohli prísť prví traja 24 rôznymi poradiami, tieto poradia sú: KPM, KPL, KMP, KML, KLP, KLM, PKM, PKL, PMK, PML, PLK, PLM, MKP, MKL, MPK, MPL, MLK, MLP, LKP, LKM, LPK, LPM, LMK, LMP, kde K, L, M, P sú začiatočné písmená mien cyklistov.

Záverečná etapa poznávacieho procesu by mala byť venovaná dôkladnému utvrdeniu a precvičeniu učiva na rôznych typoch úloh a príkladov tak, aby všetci žiaci (aj slabší) získali zručnosť, pohotovosť a istotu pri riešení úloh. Učiteľ môže postupovať tak, že lepším žiakom zadá samostatnú prácu a venuje sa slabším žiakom, ktorým pri riešení úloh pomáha, prípadne individuálne vysvetľuje učivo, ktoré nedostatočne pochopili. Zdatnejším žiakom môžeme zadať náročnejšie alebo netradičné úlohy, ktoré môžu riešiť viac-menej samostatne a potom riešenie demonštrovať na tabuli aj pre ostatných žiakov.

Uvedieme niekoľko typov úloh na precvičenie:

Úloha 3

Moja banková karta má identifikačné číslo, v ktorom sa nachádzajú cifry 0,2,5,8. Ak by som identifikačné číslo zabudla, aký najväčší počet číselných kombinácií musím preskúšať, ak viem, že každá číslica sa v mojom identifikačnom čísle nachádza len raz.

Úloha 4

Pred záverečným kolom 1. futbalovej ligy je známe, že na prvých troch miestach v tabuľke sa umiestnia: Slovan Bratislava, 1.FC Košice, Spartak Trnava. Napíšte všetky možné poradia týchto družstiev.

Úloha 5

Milan mal vo vrecku tri žuvačky, a to červenú, zelenú a žltú. Siahol do vrecka a vybral postupne tri kusy. Zapíšte všetky možné poradia, v akých mohol vybrať tri žuvačky.

Úloha 6

Detektív zistil o telefónnom čísle podozrivej osoby, že je 5-cifernné, obsahuje práve tri rôzne číslice, všetky jeho číslice sú nepárne, nie je medzi nimi číslica 7. Zisti všetky telefónne čísla, ktoré prichádzajú do úvahy.

***Úloha** 7*

Morseova abeceda pozostáva zo zoskupenia týchto dvoch znakov: • (bodka), - (čiarka). Koľko dvojprvkových a koľko trojprvkových znakov možno vytvoriť:

- *bez opakovania znakov,*
- *s opakovaním znakov ?*

Záverom poznamenajme, že podľa vzdelávacieho štandardu z matematiky, ktorý vydal Štátny pedagogický ústav v Bratislave roku 1998, požiadavky na vedomosti a zručnosti žiakov 6. ročníkov základných škôl z kombinatoriky sú:

- vedieť systematicky usporiadať daný počet (menší ako 6) prvkov (cifier, písmen, atď.) všetkými možnými spôsobmi a určiť počet všetkých usporiadaní
- vedieť z daného počtu (menej ako 6) prvkov vybrať menší počet prvkov ako je daný počet, tieto vybrané prvky usporiadať a určiť počet takto vybraných a usporiadaných prvkov.

Očakávaná úroveň zvládnutia učiva kombinatoriky je 75% a vyššia.

Literatúra :

[1] Bálint, Ľ. : Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika. Dočasné učebné texty s metodickými poznámkami, Bratislava, SPN 1998.

[2] Černeková, A. – Repáš, V. – Černek, P. : Kde začína kombinatorika, 1.časť, In : Matematika – fyzika – informatika roč. 8, (1998 / 1999), str. 462 – 464.

[3] Hejný, M. a kol. : Teória vyučovania matematiky 2, Bratislava, SPN 1989.

[4] Repáš, V. a kol. : Matematika pre 6. ročník základných škôl, 2. časť, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 1999.

[5] Šedivý, O. a kol. : Matematika pre 6. ročník základných škôl, 2. časť, Bratislava, SPN, 1999.

Adresa autora :

RNDr. Gabriela Pringerová, CSc.
Katedra aplikovanej matematiky
Fakulta prírodných vied Žilinskej Univerzity
Hurbanova 15
010 26 Žilina
Slovenská Republika
e-mail : pringerova@fpv.utc.sk