Domino jako losovací nástroj a nositel matematických idejí a struktur

Adam Płocki, Akademia Pedagogiczna, Krakow (Polsko)

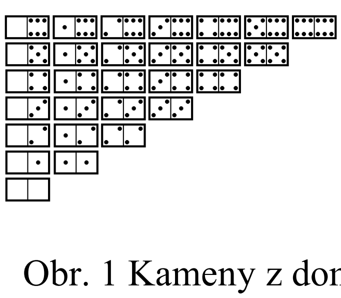
ABSTRACT: *Práce se týká domina jako nositele a tvůrce matematických idejí a problémů. Domino je představeno jako prostředek argumentace, týkající se stochastiky, kombinatoriky, aritmetiky, teorie relací, logiky a teorie grafů.*

Úvod

Počet pravděpodobnosti se každému spojuje s hodem mincí, hodem kostkou a losováním koule z urny. Mince, hrací kostka a urna s koulemi jsou tzv. *losovací nástroje*. Velmi zajímavým (z hlediska didaktiky matematiky) losovacím nástrojem je soubor kamenů domina nebo balíček hracích karet. Tyto konkrétní předměty jsou nositeli různých jak stochastických, tak i celomatematických idejí a struktur. Práce se týká role souboru kamenů domina ve vytváření matematických úloh a problémů, tedy jako prostředku matematické aktivity na hodinách matematiky.

1. Kameny z domina a jejich matematická struktura

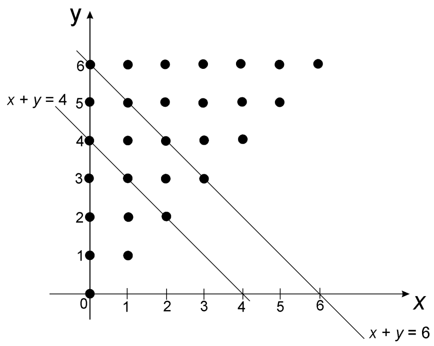
Na obr. 1 je ve zvláštním tvaru představen soubor 28 kamenů obyčejného domina. Je rekvizitou ve známé hře *Domino*. Nejstarší formy domina známe z doby před tisíci lety z Číny. Podle historiků přivezl kameny domina do Evropy Marco Polo koncem 13. století. Jedna z legend říká, že domino vymyslili benediktýni z kláštera na Monte Casino.



Obr. 1 Kameny z domina

Kámen z domina je obdélník, jehož horní stěna je rozdělena na dva čtverce s tečkami. Na kamenech obyčejného domina jsou pole s počtem teček od 0 do 6. Kámen, na kterém je na obou jeho polích stejný počet teček, nazýváme *dubletem*. Kámen, který má jedno pole bez teček, nazýváme *mýdlem*. Kámen bez teček nazýváme *prázdným dubletem*. Kámen, na kterém je na jednom poli j teček na druhém k teček, přičemž $j \le k$, označme [j-k]. Kódem prázdného dubletu je tedy [0-0]. Obrázek 2 představuje kameny domina jako body v rovině se souřadnicovou soustavou (kartézská rovina). Kámen [j-k] je představen jako bod (j,k). Kameny s počtem teček s jsou jistými body přímky $x+y=s$.

Obr. 2 Kameny domina jako body roviny



2. Domino a kombinatorické otázky

Klasické domino s počty teček od 0 do 6 nazýváme „šestkovým“. V 19. století, v době ohromné popularity hry domino, vznikly soubory kamenů s počty teček od 0 do 8 (domino „osmičkové"), od 0 do 9 (domino „devítkové") anebo od 0 do 12 (domino „dvanáctkové"). V [7] se mluví o čínském dominu, které má 32 kamenů (mezi nimi nejsou mýdla). V roce 1921 P. Mac Mahor navrhl trojúhelníkové domino (*trimino*). Existuje domino, jehož kameny mají 6 polí.

V šestkovém dominu každý počet teček (od 0 do 6) se nachází na osmi polích kamenů. Tyto různé aritmetické vlastnosti kamenů domina vytvářejí matematické úlohy.

1. Na polovině kamenů domina jsou počty teček od 0 do m. Dokaž, že takové domino má ½ (m+2)(m+1) kamenů a že na všech kamenech tohoto domina je dohromady ½ m (m+1)(m+2) teček. Nechť $(a_k)^m$ je počet kamenů, na kterých je dohromady k teček. Urči posloupnost ($(a_0)^m$, $(a_1)^m$, $(a_1)^m$,..., $(a_{2m})^m$).

Z obr.1 vyplývá, že v případě šestkového domina je počet kamenů součtem 7+6+5+4+3+2+1, a tedy se rovná ½ (7+1)·7, čili 28.

2. Nechť k je přirozené číslo. Pro jaké k *lze* rozdělit všechny kameny na dvojice, ve kterých je součet teček na obou kamenech této dvojice roven k?

Hledané k nemůže být menší než 12, neboť v tomto případě by kámen [6-6] neměl „svého kolegu“. Toto k nemůže byt větší než 12, pak by svého kolegu neměl kámen [0-0]. Je tedy jediná možnost k=12. Řešením úlohy je k=12.

3. Uspořádání kamenů domina v řetězec

Ve hře domino se kameny spojují za sebou těmi polovinami, které mají stejný počet teček. Tímto způsobem vzniká jistý řetězec.

Z kamenů šestkového domina se dá složit řetězec a tento řetězec se dá uzavřít do kruhu. Lze to udělat v případě každého domina? Odstraňme ze souboru šestkového domina všechny kameny, na kterých jsou počty teček větší než 3. Dostaneme trojkové domino. Kameny tohoto domina se nedají složit do řetězce. Vzniká tedy úloha:

3. Pro jaké m se kameny domina s počty teček od 0 do m dají složit do řetězce? Je možnost složení kamenů domina do řetězce ekvivalentní s tím, že vzniklý ře-tězec lze uzavřít do kruhu?

4. Slož kameny šestkového domina do řetězce. Řekni mi jen, kolik teček je na poslední polovině posledního kamenu v tomto řetězci a já okamžitě správně uhádnu kolik je teček na prvním poli prvního kamenu v tomto řetězci. Jak vysvětlíš, proč je to možné?

5. Předpokládejme, že jsi vylosoval jeden kámen ze souboru 28 kamenů šestkového domina. Já neznám výsledek tohoto losování. Slož (není důležité, od kterého kamenu začínáš) zbylé kameny do řetězce. Já ho nevidím. Řekni mi jen kolik teček je na první a kolik na poslední polovině v tomto řetězci, a já okamžitě uhádnu, jaký kámen byl vylosovaný na začátku, pokud složený řetězec není uzavřený. Jak vysvětlit tuto moji schopnost?

Jestliže všechny kameny složíme do řetězce, pak poslední pole v tomto řetězci má stejný počet teček jako počáteční pole. Kameny šestkového domina lze složit do uzavřeného kruhu. Jestliže po vylosování jednoho kamenu a složení zbylých kamenů do řetězce je na prvním poli j a na posledním k teček, pak:

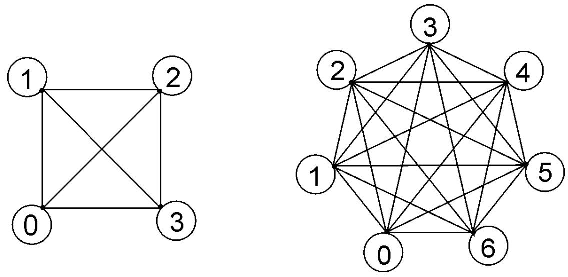
- v případě, kdy $j = k$, vylosovaný kámen je dubletem,
- v případě, kdy $j \neq k$, vylosovaný kámen je kámen [j-k].

O tyto vlastnosti kamenů domina se opírá následující skutečnost: Pokud ze souboru 28 kamenů odstraníme jeden (a není to dublet), pak lze správně odhadnout jaké budou počty teček na začátku a konci řetězce, který bude složený z těchto kamenů.

Mluvíme tady o zvláštních matematických úlohách, jejichž řešení se opírá o jisté matematické struktury souboru kamenů domina.

4. Kameny z domina jako hrany grafu

Jinou prezentaci množiny kamenů domina je neorientovaný graf. Jeho vrcholy představují možné počty teček. Hrana spojující vrcholy *j* a *k* představuje kámen [*j*-*k*]. Dublet [*j*-*j*] je představen jako smyčka spojující vrchol *j* sám se sebou. V této interpretaci je na obr. 4 představeno trojkové a šestkové domino.



Obr. 3 Kameny z domina jako hrany grafu

Tato prezentace souboru kamenů domina umožňuje objevit vzorec na počet všech kamenů domina s počty teček od 0 do m. Na grafu tohoto domina je m+1 vrcholů a tedy je m+1 smyček a ½ m (m+1) úseček spojujících dva různé vrcholy.

Problém složení řetězce a také uzavření tohoto řetězce se dá zformulovat a řešit pomocí teorii grafů. Z kamenů se dá složit řetězec tehdy a jen tehdy, když graf (který představuje tento soubor kamenů) se dá nakreslit jedním tahem. Neorientovaný souvislý graf s touto vlastností se nazývá *eulerovský graf*. *Stupeň vrcholu* se nazývá v teorii grafů počet hran (jako neorientovaných úseček nebo křivek), pro něž je tento vrchol na jednom z konců, přičemž smyčka se počítá dvakrát. Neorientovaný a souvislý graf je eulerovský tehdy a jen tehdy, když stupeň každého vrcholu grafu je sudé číslo ([8], str. 45-47, tuto větu zformuloval v roce 1736 Leonhard Euler (1707-1783)).

Každý vrchol grafu, který představuje šestkové domino, má stupen 8. Vrcholy grafu, který prezentuje trojkové domino, mají stupeň 5, a tedy z kamenů tohoto domina se nedá složit řetězec.

Kameny domina si lze představit (kódovat) jako:
- body roviny se souřadnicovou soustavou,
- dvouprvkové kombinace s opakováním,
- hrany spojitého neorientovaného grafu.

Tyto různé prezentace kamenů domina (uvažujeme-li jejich strukturu) jsou didaktickým prostředkem, dávají však možnost různých argumentací.

5. Domino jako losovací nástroj

Hra *Domino* se začíná jistým náhodným pokusem. Po zamíchání převrácených kamenů (strany s tečkami jsou zakryté) hráči střídavě vytahují po jednom kameni tak dlouho, až jeden vytáhne prázdný dublet. Tento kámen se položí na stůl a od něho začíná vlastní hra. Kameny, které vytáhl hráč v této „předehře“, jsou jeho „majetkem“.

Kameny domina jsou na dotek nerozlišitelné. Krabice s kameny domina nebo (což je stejné) soubor odvrácených a zamíchaných kamenů domina je v podstatě *urnou* U_d s 28 koulemi očíslovanými dvojicemi čísel od 0 do 6. V předehře představuje vytahování kamene domina losování (bez vracení) koule z této urny U_d tak dlouho, dokud nebude vytažena koule [0-0].

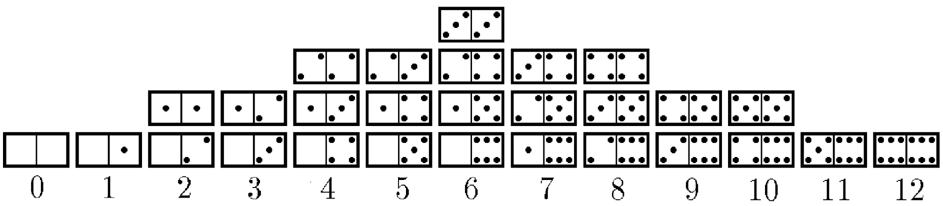
V některých variantách domina každý ze dvou hráčů na začátku losuje 7 kamenů ze souboru 28 obrácených kamenů. Tak se na začátku vylosuje „majetek“ každého hráče. Tento majetek, jako výsledek jistého náhodného pokusu, je sedmiprvkovou kombinací množiny 28 kamenů.

Pořadí hráčů se určuje různě. V jedné verzi hráč losuje kámen a jeho soupeř hádá, zda počet teček na kameni je sudým nebo lichým číslem. Pokud uhádne, začíná, pokud ne, začíná hráč, který losoval kámen.

Při analyzování předehry v dominu nás může zajímat:
- kolik se společně vytáhne kamenů,
- kolik a jaké kameny se dostanou do „majetku“ každého hráče.

Při losování kamenu se můžeme zabývat strukturou jeho teček (máme tady náhodný pokus s 28 stejně pravděpodobnými výsledky) nebo počtem te-ček (v tom případě máme náhodnou veličinu X, jejíž rozdělení představuje sloupcový diagram z obr. 4).

Obr. 4 Klasifikace kamenů domina z hlediska počtu teček



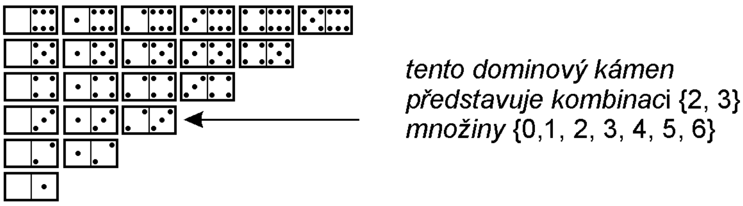
Sestavení bodů na obr. 2 je zároveň jinou prezentaci sloupcového diagramu z obr. 4. Tento diagram vzniká v procesu klasifikaci množiny kamenů jako stejně pravděpodobných výsledků losování. Rozdělení náhodné veličiny X, která vylosovanému kamenu přiřazuje počet teček na tomto kamenu, urči-me tady metodou stejně možných případů (srvn. [3], str. 34).

Rozvažme v tomto kontextu následující úlohy týkající se procesu rozhodování v podmínkách rizika.

6. Za chvilku se kameny domina obrátí, zamíchají a jeden se vylosuje. Než se tak stane, hráč sází na to, jaký bude počet teček na vylosovaném kamenu a dostává bod, jestli tip bude správný. Je to náhodná hra, která připomíná sportku (proč?). Čím se tato hra liší od sportky? Existuje v této hře nějaká racionální strategie?

7. Máš možnost zúčastnit v jedné ze dvou následujících hazardních náhodných her. V první hře hodíš dvěma kostkami a vyhráváš tolik korun, kolik padlo dohromady teček. Ve druhé hře losuješ kámen ze souboru 28 kamenů a vyhráváš tolik korun, kolik je dohromady teček na vylosovaném kamenu. Za vstup do hry třeba zaplatit 7 korun. Která hra je pro tebe výhodnější a proč?

Obr. 5 Dominové kameny bez *dublet*



Odstraňme ze souboru kamenů domina dublety. Zbylé kameny rozvažme ve tvaru představeném na obr. 5.

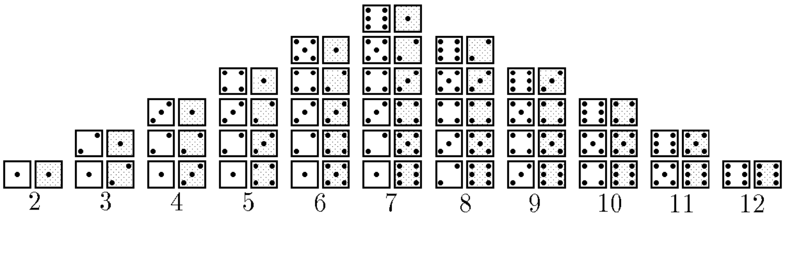
Výsledek losování dvou koulí z urny U_7, ve které je 7 koulí očíslovaných od 0 do 6, je dvouprvkovou kombinací množiny $U_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Každý kámen domina může tedy představovat jednu kombinaci (je nějakým kódem této kombinace). Obrázek 5 je prezentací množiny všech dvouprvkových kombinací množiny $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Zobrazení kamenů na obr. 5 napovídá tvar vzorce na číslo $\binom{n}{2}$, tj. počet všech dvouprvkových kombinací n-prvkové množiny:

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n\text{-}2) + (n\text{-}1)$$

Losování dvou prvků z sedmiprvkové populace, nebo, což je stejné, současné losování dvou koulí z urny U_7, můžeme simulovat losováním jednoho kamenu ze souboru kamenů bez dubletů.

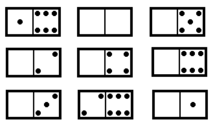
Vyndáme ze souboru kamenů domina všechny „mýdla“. Nechť Y bude počtem teček na vylosovaném kamenu z tohoto souboru kamenů. Nechť Z bude počet dohromady padnutých teček v hodu dvěma kostkami. Tedy Y a Z jsou náhodné veličiny. Zdá se, že rozdělení náhodné veličiny Y je stejné jako rozdělení náhodné veličiny Z. Tuto rovnost rozdělení náhodných veličin Y a Z napovídají některé analogie. Prostředkem argumentace jsou tady sloupcové diagramy utvořené z kamenů a z výsledků hodu dvěma kostkami (viz obr. 6).



8. Každý ze dvou hráčů losuje 14 kamenů z soustavy 28 kamenů domina. Nechť k je přirozené číslo takové, že $1 < k \leq 12$. Každý z hráčů složí kameny do dvojic, na kterých je dohromady k teček. Vítězí ten, kdo získá víc takových dvojic (v případě stejných počtů dvojic je remis). Co řekneš o takové hře, když $k=12$? Jaké jsou šance každého hráče v případě $k=7$?

6. Lepší a horší soustavy kamenů domina - paradox netranzitivity

Vezměme soubor 9 kamenů domina v pořadí zobrazeném na obr. 7. Kameny v řádcích tvoří „vodorovné“ soubory: W_1, W_2 a W_3. Kameny v sloupcích tvoří „svislé“ soubory S_1, S_2 a S_3.



Obr. 7 Vodorovné a svislé soubory dominových kamenů

Rozvažme následující náhodnou hru (srvn. [5], str. 36-37). Každý ze dvou hráčů má jiný ze tří vodorovných souborů kamenů. Každý obrací své kameny tečkami dolů, míchá je a jeden vytáhne. Vítězí ten, kdo má na svém vylosovaném kameni víc teček.

Množinu kamenů daného souboru kódujme množinou počtů teček na kamenech tohoto souboru, a tedy $W_1=\{0,5,7\}$, $W_2=\{2,4,6\}$, $W_3=\{1,3,8\}$.

Losování dvou kamenů, jednoho ze souboru W_j, druhého ze souboru W_k, kde $j, k \in \{1,2,3\}$ a $j \neq k$, je náhodný pokus $d_{j\text{-}k}$. Takový pokus se provádí ve hře, kdy jeden z hráčů má soubor W_j a druhý W_k. Nechť X_j je počet teček na kamenu vylosovaném ze souboru W_j pro $j=1, 2, 3$. S náhodným pokusem $d_{j\text{-}k}$ spojíme jev:

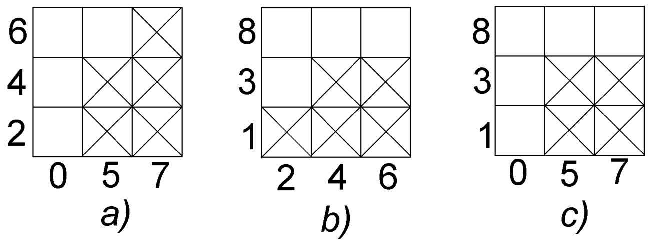
{na kamenu vylosovaném ze souboru W_j bude větší počet teček než na kamenu vylosovaném ze souboru W_k}. Tento jev označíme $\{X_j > X_k\}$, a jeho pravděpodobnost $P(X_j > X_k)$. Analogicky označíme jev $\{X_k > X_j\}$ jako opačný k jevu $\{X_j > X_k\}$.

Jestliže v popsané hře má hráč G soubor W_j a jeho soupeř má soubor W_k, pak hráč G zvítězí jestli nastane jev $\{X_j > X_k\}$. Zvítězí jeho soupeř, jestliže nastane jev $\{X_k > X_j\}$.

Jestli $P(X_j > X_k) > P(X_k > X_j)$, pak hráč, který losuje kámen ze souboru W_j má větší šanci na vítězství než jeho soupeř, který losuje kámen ze souboru W_k. V takové situaci nazýváme soubor W_j *lepším* než soubor W_k a označuje $W_j >> W_k$.

Výsledek náhodného pokusu $d_{j\text{-}k}$ je dvojicí (x_j, y_k), kde x_j je počet teček na kamenu vylosovaném ze souboru W_j a y_k je počet teček na kamenu vylosovaném ze souboru W_k. Je 9 možných výsledků náhodného pokusu $d_{j\text{-}k}$ a všechny jsou stejně pravděpodobné. Na obr. 8 je představena množina výsledků náhodného pokusu $d_{1\text{-}2}$ (obrázek *a*), $d_{2\text{-}3}$ (obrázek *b*) a $d_{1\text{-}3}$ (obrázek *c*).

Každý výsledek je čtverečkem sítě nanesené na jednotkový čtverec, ob-sah tohoto čtverečku je pravděpodobnost, s jakou se náhodný pokus skončí tímto výsledkem. Výsledek (x_j, y_k) je představen pomocí čtverečku, který leží v řádce odpovídajícímu číslu x_j a sloupci odpovídajícímu číslu y_k.



Obr. 8 Výsledky losování dvou kamenů domina

Obrázek 8 představuje v geometrické interpretaci tři pravděpodobnostní prostory (viz [3], str. 28-29). Na tomto obrázku představují zaškrtnuté čtverečky výsledky příznivé jevu $\{X_j > X_k\}$.

Předpokládejme, že hráč G losuje kámen ze souboru W_1 a jeho soupeř ze souboru W_2. Stochastický model tohoto losování je zobrazen na obr. 8*a*). Z devíti stejně pravděpodobných výsledků náhodného pokusu $d_{1\text{-}2}$ je 5 výsledků příznivých jevu $\{X_1 > X_2\}$, a tedy $P(X_1 > X_2) = 5/9$. Jsou 4 výsledky příznivé jevu $\{X_2 > X_1\}$, a tedy $P(X_2 > X_1) = 4/9$, čili $W_1 >> W_2$.

Analogicky lze dokázat, že $W_2 >> W_3$. Tedy soubor W_1 je lepší než W_2 a soubor W_2 je lepší než W_3. Zdá se tedy samozřejmé, že soubor W_1 je nejlepší. Zdá se, že relace >> je tranzitivní.

Z obrázku 8*c*) plyne, že $P(X_1 > X_3) = 4/9 < 5/9 = P(X_3 > X_1)$, tedy $W_3 >> W_1$. Soubor W_1 je lepší než soubor W_2, soubor W_2 je lepší než W_3 a soubor W_3 je lepší než W_1. Relace >> není tranzitivní, což je paradoxní. Mezi soubory W_1, W_2, W_3 neexistuje nejlepší, tj. lepší než každý ze dvou zbývajících. Pro každý soubor existuje mezi zbylými soubor lepší. Tato paradoxní skutečnost má zajímavou interpretace. Jestliže hráč G dostává možnost zvolit jeden z těchto tří soborů, jeho soupeř bude pak volit svůj soubor mezi dvěma zbylými, pak právo přednosti, které hráč G dostává není pro něho výhodou. Racionální rozhodnutí je odmítnout tuto nabídku. Mluví se tady o interpre-taci jistých matematických faktů v procesu rozhodnutí.

Lze dokázat, že jestliže v popsané hře si každý ze dvou hráčů volí jeden ze svislých souborů, pak žádný z těchto souborů není nejlepší.

Jak mezi soubory vodorovnými, tak i mezi soubory svislými neexistuje nejlepší. Pro každý soubor, mezi zbylými existuje lepší. Vznikají tady otázky:

- Existuje mezi soubory „nejlepší“, jestliže ve hře jsou tři hráči, každý má jeden soubor, každý losuje kámen ze svého souboru a vítězí ten, kdo má na vylosovaném kamenu největší počet teček?
- Počty teček na kamenech složených jako na obr. 7 tvoří magický čtverec. Je to shoda okolností nebo jistá zákonitost?

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Obr. 9 Magický čtverec složený z počtu teček na dominových kamenech

9. Hry se účastní tři hráči. Každý má jiný ze tří vodorovných souborů W_1, W_2, W_3 dominových kamenů (obr. 7). Každý losuje kámen ze svého souboru. Vítězí ten, kdo vylosuje kámen s největším počtem teček. Je některý z těchto vodorov-ných souborů nejlepší? A nejhorší?

V popsané hře se losují tři kameny, každý z jiného souboru. Nechť A_j (pro j =1, 2, 3) označuje jev: {vítězí hráč, který losuje kámen ze souboru W_j}.

Jevy jsou A_1, A_2, A_3 spojené s losováním tří čísel: prvního z množiny {0, 5, 7}, druhého z množiny {2, 4, 6} a třetího z množiny {1, 3, 8}. Výsledek losování je trojice (x, y, z), kde x je počet teček na kamenu vylosovaném ze souboru W_1, y ze souboru W_2 a z ze souboru W_3. Trojice čísel (x, y, z) můžeme ztotožňovat s číslem $100x+10y+z$ (dvouciferněmu číslu přidáme na začátku 0). Máme 27 možných výsledků a všechny jsou stejně pravděpodobné. Jevu A_2 je příznivých 7 výsledků. Jsou to: 021, 041, 043, 061, 063, 561, 563, a tedy $P(A_2)$ =7/27.

Lze dokázat, že $P(A_1)$=10/27 a že $P(A_3)$=10/27. Soubor W_2 je v této situaci nejhorší. Soubory W_1 a W_3 dávají hráčům stejné šance, a tedy jsou *stejně dobré*.

10. Každý ze tří hráčů má jiný ze svislých souborů S_1, S_2 a S_3 (obr. 7). Každý losuje kámen ze svého souboru a vítězí ten, kdo má na svém vylosovaném kameni nejvíc teček. Dokaž, že nyní je soubor S_2 nejlepší.

11. Slož magický čtverec z kamenů: [0-3], [0-4], [0-5], [0-6], [5-2], [5-3], [6-3], [6-4] a [6-5]. Je mezi vodorovnými (resp. svislými) soustavami nejlepší v situaci, kdy hrají dva hráči?

12. Řeš analogickou úlohu v případě soustavy 16 kamenů, skládající se z *mýdel*, kamenů z počtem 1 a kamenů: [2-5], [2-6], [3-6] (jsou tady čtyři soubory vodorovné a čtyři svislé).

Hledaná soustava kamenů, ve které počty teček tvoří magický čtverec s součtem 18, je na obr. 10.

Každé dva svislé soubory kamenů dávají hráčům stejné šance (soubory druhý a čtvrtý jsou stejné, v tomto případě jsou možné remisy). Jestli v pos-ledním čtverci přesuneme první sloupec na konec, nebo první řádek shora dolů, pak takto vzniklý čtverec je také magickým čtvercem.

Odkrývání ji-ných vlastností magických čtverců tvořených z kamenů domina, může být obsahem zvláštních matematických úloh.

2-6	1-2	1-3	0-3
1-4	0-2	3-6	1-1
0-5	1-5	0-1	0-6
0-0	2-5	0-4	1-6

8	3	4	3
5	2	9	2
5	6	1	6
0	7	4	7

Obr.10 Magický čtverec s součtem 18

Úlohy vzniklé v kontextu souborů kamenů domina ukazují princip integrace. Jejich řešení obsahuje pojmy, věty a metody různých oblastí matematiky. V práci jsou ukázány soubory různých kamenů domina jako zajímavý objekt školské matematické laboratoře (dílny). Představené ideje ukazují také, jak na hodinách matematiky „činit viditelnou matematickou myšlenku“ (srvn. [2]).

Literatura:

[1] Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, t.3, WSiP, Warszawa 1980.
[2] Kuřina F., *Jak učinit myšlenku viditelnou*,Vyučovaní matematice a kultivace myšlení, Hradec Králové 1997, str. 61-76).
[3] Plocki A., *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*, Acta Universitatis Purkynianae 68, Studia Matematica IV, Ústí nad Labem 2001.
[4] Plocki A., *Rachunek prawdopodobienstwa w szkole podstawowej. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1991.
[5] Plocki A., *Stochastické paradoxy ako prostriedok aktivizáce žiakov*, Matematika v škole dnes a zajtra, Ružomberok 2001 (str. 31-39).
[6] Plocki A., Zvláštní matematické objekty, nástroje a postupy v počtu pravděpodobnosti, Matematika Fyzika Informatika, 4 (str. 193-201) a 5 (str. 257-263).
[7] Wang Ann-Lee, *Chinesische Dominospiele*, Stochastik in der Schule 16 (1996).
[8] Wilson R., *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1985.

Adresa:
Adam Plocki,
Zaklad Stochastyki i jej Dydaktyki,
Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorazych 2
PL-30-084 Kraków
E-mail: adplocki@wsp.krakow.pl