Tradície európskych hodnôt v matematike

Anna Paruleková, Ivan Parulek

ABSRACT : *This paper deals with the unification of Europe through mathematics in the past*

1. ÚVOD

Z genézy európskej tradície jasne vyplýva, že je postavená na helénsko – judaistických, cicerónsko - republikánskych, resp. západokresťanských pilieroch, t. j. že jej jednotiacim prvkom je autorita prirodzeného zákona. Citát Margaret Thatcherovej : „ Ľudské práva sa nedatujú od francúzskej revolúcie..... Ich skutočné korene sú v zmesi judaizmu a kresťanstva... My Angličania sme mali v roku 1688 svoju tichú revolúciu, kde parlament vnútil svoju vôľu kráľovi...to nebol spôsob, akým robilo revolúciu Francúzsko... Sloboda, rovnosť, bratstvo. Podľa môjho názoru sa tam zabudlo na zaväzky a povinnosti. A po bratstve potom, samozrejme nadlho nezostala ani stopa. " túto skutočnosť potvrdzuje a dokresľuje.
Je zrejmé, že udržateľnosť európskych hodnôt je možná iba v podmienkach jednoty euroatlantickej civilizácie a koexistencie euroatlantického a kontinentálneho hodnotového systému.

2. REVOLÚCIA VO VEDE A FILOZOFICKÉ NÁZORY V 16. – 17. STOROČÍ

Zjednocovanie Európy, ktoré je dnes aktuálne aj pre Slovensko, existovalo v duchovnej oblasti už v 16. – 17. storočí, v období renesancie. V tomto období boli dominantné filozofické systémy René Descartesa, G. W. Leibniza, B. Spinozu, Blaise Pascala a ďalších.
Intelektuálny život Európy v tomto období sa vyznačoval zvláštnym spôsobom komunikácie učencov.. Jednalo sa o kontakty medzi jednotlivými učencami, ktoré nazývali „ La République des Lettres "s významom „Republika učencov", pričom treba mať na zreteli vedecké dopisovanie alebo „Epistolion"a pravý význam toho bol, že veda dosiahla osamostatnenia a zjednocovania v rámci Európy, pretože učenci boli rôznych národností. Bolo to teda neformálne spoločenstvo pomerne malého počtu učencov a mysliteľov nového typu, ktoré si dopisovaním vymieňalo názory v podobe myšlienlových experimentov. Unikátnymi postavami tohto spoločenstva boli minorita - páter Marin Mersenne, ktorého meno ako matematika žije naďalej v mersennovských prvočíslach, a H. Oldenburg.
Tvorili mocný a produktívny „mechanizmus", ktorý v mnohom určil „živú formu" vzťahov v spoločenstve mysliteľov 17. storočia v „Epistolione" / knihy, napísanej formou dopisov /. S nimi boli v písomnom styku Descartes, Fermat, Desargues a mnoho ďalších vedcov.
Z diskusných skupín učencov vyrastali akadémie, v určitom ohľade ako opozície k univerzitám, ktoré – až na niektoré výnimky, ako trebárs univerzita v Leydene – sa vyvinuli už v dobe scholastiky a pridržiavali sa naďalej stredovekého zvyku uzavrieť vedomosti do strnulej formy. Prvá akadémia bola založená v Neapoli (1560), Francúzska akadémia, ktorej jedným zo zakladajúcich členov bol Huygens, je od roku 1666. Christian Huygens bol prívržencom gréckej geometrie / grécke metódy spočívajúce na geometrických úvahách používali tiež nasledovníci Cavalieriho, zvlášť Torricelli a Newtonov učiteľ Isaac Barrow /. Iní však, zvlášť Fermat, Descartes a John Wallis / jeden zo zakladateľov Royal Society – 1662 /, zastupovali protichodný smer a používali novú algebru na riešenie týchto otázok. Wallisova Arithmetica infinitorum (1655), vychádzajúca z Cavalieriho knihy (Geometria indivisibilium) využíva novú „aritmetiku" (t. j. algebru) a nie starú geometriu. Pri tomto postupe prepracoval Wallis ako prvý matematik algebru tak, že zahŕňala aj skutočnú analýzu.

René Descartes bol Francúz, pochádzal z Touraine a žil životom šľachtica. Slúžil dlhú dobu v armáde, mnoho rokov bol v Holandsku a zomrel v Stockholme, kde ho pozvala švédska kráľovná. Rovnako ako mnoho iných veľkých mysliteľov 17. storočia hľadal Descartes všeobecnú metódu myslenia, ktorá by mohla uľahčiť skúmanie a rozoznanie vedeckej pravdy. Jeho prínos tkvie hlavne v tom, že na starovekú geometriu systemeticky aplikoval algebru, ktorá práve na začiatku 17. storočia dosiahla veľkého rozvoja. V roku 1637 uverejnil svoju „Géometrie" ako príklad všeobecnej zjednocujúcej metódy, v tomto prípade spájajúcej algebru a geometriu a zároveň ako dodatok k svojmu filozofickému dielu „ Discours de la méthode" / Rozprava o metóde /. Descartes je presvedčený o tom, že bez obrátenia pozornosti na východzie základy nielen nemožno budovať teóriu, ale nie je dokonca ani možné úplné / v descartovskom chápaní úplnosti/ vysvetlenie nejakého zvláštneho fyzikálneho javu . Ďalej Descartes hovorí, že „ nemôžeme o veciach niečo vedieť ináč než prostredníctvom ideí a tiež musíme chápať, že všetko, čo je s týmito ideami nezlúčiteľné, je absolutne nemožné a obsahuje v sebe rozpor..." . Descartes je vlastne objaviteľ analytickej geometrie a karteziánskych (pravouhlých) súradníc, ktoré sa volajú podľa latinského prepisu jeho mena Cartesius.

Pre Spinozu sú východzie princípy Descartovej filozofie neprijateľné. Píše o tom konkrétne v liste Oldenburgovi : „Žiadaš ma, aby som Ti napísal, ktoré omyly nachádzam v Descartovej a Baconovej filozofii. Prvý a hlavný omyl teda je, že sa tak ďaleko odchýlili od poznania prvej príčiny a pôvodu všetkých vecí." V súlade so základmi Spinozovej filozofie je na vysvetlenie tvorivej prírody nutné ju pochopiť ako príčinu samej seba (causa sui), ktorá nepotrebuje žiadnu vonkajšiu príčinu a ktorá je pochopiteľná prostredníctvom bytia .

V roku 1638 Descart v dopise M. Mersennovi popisuje krivku, ktorá má tú vlastnosť, že jej body (x,y) spĺňajú rovnicu pre objemy kociek a hranola : $x^3 + y^3 = 3axy$, a>0, nazývanú Descartov list. Krivka má tvar sľučky v prvom kvadrante s uzlom v počiatku (0,0) a jej konce sa približujú k priamke o smernici k=-1 so zápornými úsekmi na osiach. O pol storočia neskôr bola táto krivka vyjadrená v tvare $|x^3| + |y^3| - 3a|x||y| = 0$ a tak vznikla slučka v každom kvadrante, teda štvorlístok.

Descartov list, hyperbola, elipsa, parabola sú algebraické krivky, teda krivky, ktorých rovnice majú tvar P(x, y)=0. No už G. Galilei a R. Descart učili cykloidu – krivku, ktorú opisuje bod kolesa, kotúlajúceho sa po priamej dráhe. Táto nealgebraická krivka má rovnicu :

$$x = r.\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$, pričom polomer kolesa je r, počiatočný bod (0, 0) koncový bod (2π r , 0) a výška cykloidy je 2r .

Blaise Pascal už ako 13 – ročný mal prístup do matematického krúžku , vedeného Marenom Mersennom. Vyvíjal sa pod vedením svojho otca, učenca Etienna Pascala. Známa „ Pascalova závitnica" je pomenovanie po otcovi. Blaise Pascal objavil už vo svojich šestnástich rokoch „ Pascalovu vetu" o šesťuholníku vpísanom kúželosečke, ktorá bola uverejnená roku 1641 na jedinej stránke :

„Ak na rezovej krivke kužeľa , ktorou je parabola, ľubovoľne vyberieme 6 bodov a priesečníky spojníc bodov (1,2) a (4, 5), (2,3) a (5, 6), (3, 4) a (6, 1) označíme P, Q, R potom tieto body ležia na jednej priamke". Je tu možné rozpoznať Desargov vplyv. Veta, ktorú Pascal nazval vetou o „ mystickom šesťuholníku", nebola samoúčelná. Bola kľúčom k vytvoreniu všeobecnej teórie rezov kužeľa. Sám Desargues ju vysoko ocenil, nazval ju „veľkou Pascalovou" a tvrdil, že sú v nej obsiahnuté prvé štyri Apolóniove knihy. Túto teóriu Pascal považoval za hotovú v roku 1654 a poslal ju Parížskej matematickej akadémii. Od Mersenna je známe, že Pascal dostal okolo 400 dôsledkov svojej vety. G. W. Leibniz bol posledný, kto videl Pascalov traktát už po jeho smrti. Pascal od svojich dvadsiatich piatich rokov bol v kláštore Port Royal a viedol asketický život jansenistov. Venoval sa však naďalej vede a literatúre. Jeho pojednenie o „ aritmetickom trojuholníku“, vytvorenom z binomických koeficientov, ktoré sa stalo užitočným tiež svojím použitím v teórii pravdepodobnosti, vyšlo po jeho smrti roku 1664.

Gérard Desargues bol architektom v Lyone a autorom knihy o perspektíve (1636). Jeho spis obsahuje niektoré hlavné pojmy geometrie, ako napr. nevlastné (nekonečne vzdialené) body, involúcia, polarita. „Desargova veta“ o perspektívnych trojuholníkoch bola uverejnená roku 1648. Plodnosť týchto myšlienok sa prejavila v plnom rozsahu až v 19. storočí.

Krivkami sa zaoberal aj toulouský sudca Pierre de Fermat , ktorý v roku 1629 napísal prácu „ Úvod do štúdia rovinných a priestorových kriviek“. V nej skôr ako Descartes vybudoval analytickú geometriu v rovine. Fermat svoje výsledky nepublikoval, oznamoval ich len v listoch priateľom a známym. Hoci tvrdil v akomsi svojom liste či v marginálii, že pozná dôkaz svojho tvrdenia / Fermatovo štúdium Diofanta /: „ Rovnica $x^n + y^n = z^n$ (n prirodzené) nemá pre n$\geq$3 nenulové celočíselné riešenie “, nepodarilo sa ho dodnes nájsť.

Vďaka veľkej Fermatovej vete (pri hľadaní jej dôkazu) matematici objavili veľa nového a vytvorili dokonca jednu úplne novú matematickú teóriu. Fermat vlastne skoro nič nedokazoval a možno aj preto sa občas pomýlil , ako napríklad pri hľadaní „generátora prvočísel“($2^{2^n}+1$). O necelých sto rokov Leonard Euler ukázal, že už pre n=5 to nie je prvočíslo ($2^{2^5}+1 = 4294967297 = 6700417.641$).

Iná Fermatova marginália hovorí, že prvočísla tvaru 4n+1 možno vyjadriť práve jedným spôsobom ako súčet dvoch druhých mocnín, čo neskôr dokázal Euler. V jednom dopise z roku 1640 sa objavila iná „ Fermatova veta“ , ktorá tvrdí, že $a^{p-1}-1$ je deliteľné p, pričom p je prvočíslo a „a“ nie je deliteľné p.

Fermat bol tiež prvý , kto tvrdil, že rovnica $x^2 - Ay^2 = 1$, kde A je celé a nie je štvorcom, má nekonečne mnoho celočíselných riešení. Vďaka Fermatovým listom sa nám zachovala aj jedna z prvých matematických polemík, spor medzi Descartom a Fermatom, ktorého podstata bola v tom, že Descartes ostro odmietol Fermatovu prácu o hľadaní maxím a miním. Pritom táto práca vytvárala základy diferenciálneho počtu. Fermat nepoužíval nekonečné malé veličiny, jeho prístup bol založený na intuitívnom pojme limity.

Medzi Fematom a Descartom sa odohral aj súboj , týkajúci sa lomu svetla. Fermat pôvodne vyhlásil, že Descartov vzťah pre lom svetla : $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = kon\check{s}\tan ta$, nemôže byť pravda.

Sám sa pustil do hľadania správneho vzťahu myšlienkou o najľahšej ceste svetla a o odpore prostredia (netrvalo dlho a vylepšený „Fermatov princíp“ – svetlo sa šíri po dráhe, ktorej optická dĺžka je najväčšia, alebo najmenšia – sa stal základom optiky), ale po štyroch rokoch výpočtov dostal to isté čo Descartes a čo chcel vyvrátiť.

Ďalší matematik , s ktorým si Fermat dopisoval, bol Blaise Pascal. Mali si o čom písať. Fermat dokázal integrovať parabolu, hyperbolu, exponenciálnu funkciu, Pascal ako prvý trigonometrické funkcie. Ale jadro ich korešpodencie bolo v niečom inom. V pár listoch vytvorili základy novej matematickej disciplíny, teórie pravdepodobnosti.

Bratia Jacob a Johann Bernoulli (narodení v Bazileji, hoci rod Bernoulliovcov pochádzal z Holandska) boli prví významní Leibnizovi žiaci. Jacob študoval pôvodne teológiu a matematiku sa učil súkromne ako samouk. Matematikom sa rozhodol stať so svojím bratom Johannom po vydaní Leibnizových článkov o infinitezimálnom počte roku 1684 v Acta eruditorum. S Leibnizom si začal dopisovať roku 1687 a bol s ním stále v písomnom styku. Bol jeho obdivovateľom i sokom a pokračoval v jeho začatých prácach, prehlboval a rozširoval ich. Roku 1687 vydal významné dielo Dissertatio de gravitute Aetheris. V roku 1687 prevzal stolicu matematiky na bazilejskej univerzite a zastával ju až do svojej smrti.

(Bazilej má univerzitu od roku 1460, najstaršiu vo Švajčiarsku.) V roku 1690 sa objavuje v Acta eruditorum , v časopise založenom Leibnizom, Jacobovo pojednanie o izochrone, zapísanej tam v tvare diferenciálnej rovnice $dy\sqrt{b^2 y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$. Ch. Huygens, holandský matematik, fyzik a astronóm (autor vlnovej teórie svetla) ukázal, že izochrona je semikubická parabola ($y^3 = ax^2$). Jacob použil v úvahách polárne súradnice. Po Huygensovi študoval Jacob krivku, nazývanú reťazovka. V roku 1699 študoval lemniskátu, nazývanú Bernoulliho lemniskátou (jedna z Cassiniových kriviek, ktorej body majú od dvoch pevných bodov stály súčin vzdialeností.). Zaoberal sa ďalej logaritmickou špirálou,
ktorá pretína sprievodiče svojich bodov (v polárnych súradniciach) pod konštantným uhlom, zamiloval sa do nej a nazýval ju obdivuhodnou. Jacob študoval v roku 1701 obrazce rovnakého obvodu a tieto úvahy viedli k objavu variačného počtu. Objaviteľom variačného počtu býva označovaný skôr jeho brat Johann, pretože prispel k riešeniu brachystochrony.
Obaja bratia našli okolo roku 1697 rovnice geodetických kriviek na ploche. Na guľovej ploche sú geodetickými krivkami hlavné kružnice. Jacob študoval rady, o ktorých napísal 5 pojednaní. Druhým z nich bola jeho dizertačná práca. Jacob bol tiež priekopníkom počtu pravdepodobnosti. Jeho pojednanie o tejto téme bolo uverejnené až po jeho smrti v roku 1713 jeho synovcom pod názvom Ars conjectandi. Pri diskusii Pascalovho trojuholníka v tejto knihe sa objavujú tzv. Bernoulliove čísla. Na Jacobovom pomníku je jeho logaritmická špirála s latinským nápisom : „Zostávam tá istá, aj keď sa mením“. Jacob bol spolu so svojím bratom Johannom od roku 1699 členom Akadémie parížskej a od roku 1701 členom Akadémie berlínskej. Jacobov mladší brat Johann, doktor medicíny (dizertačnú prácu mal na tému využitia matematiky vo fyziológii) bol profesorom na univerzite v Groningen v Holandsku (založenej roku 1614). Po smrti svojho brata Jacoba sa stáva roku 1705 profesorom v Bazileji a zostáva tu až do svojej smrti. Veľmi cenná bola jeho korešpodencia s bratom Jacobom, s Leibnizom, so synovcom Mikulášom a s Eulerom, ktorá bola uverejnená neskôr v Petrohrade. Odtiaľ je zrejmá jeho spolupráca na učebniciach Eulerových. Okrem infinitezimálneho počtu a vedľa náuky o radoch, v ktorej pracovali obaja bratia spoločne, sú Johannovi pripisované niektoré metódy integrácie, pojem funkcie a tzv. Bernoulliho rozvoj funkcie do radu. Poznal sa veľmi dobre s vedcom l´Hôspitalom a spolupracoval s ním na známom pravidle výpočtu limít. Okrem spomínaných akadémií bol od roku 1712 členom Akadémie londýnskej, od roku 1724 bolognskej a petrohradskej Akadémie. Meno ďalšieho matematika z rodu Bernoulliovcov Mikuláša I. je späté s menami svojich strýkov a s menom Leibniz. Bol matematikom, právnikom a filozofom, najskôr žiakom Jacobovým a potom Johannovým. Z korešpodencie s Leibnizom vyplynula rada pojednaní o radoch, o polynomoch (teória algebraických rovníc), o diferenciálnych rovniciach a o ich integrácii , o pravouhlých trajektóriách (kinematika). Bol členom Akadémie berlínskej a bolognskej, profesorom matematiky v Padove a neskôr profesorom logiky a práva v Bazileji. Mikuláš II. , najstarší syn Johanna bol matematikom a právnikom . Po získaní licenciátu bol najskôr profesorom v Berne, neskôr na Akadémii v Petrohrade (povolaný cárom Petrom Veľkým), kde po roku zomiera. Mikuláš II. Riešil už v roku 1716 náročné úlohy o hyperbole, ktoré diskutoval v dopisoch so svojím otcom Johannom a s Leibnizom.Neskôr riešil úlohy o trajektótiách použitím diferenciálnych rovníc. Zoznámil sa tiež s Jacobem Ricattim, známym riešením špeciálnych rovníc Ricattiových, ktorých jeden tvar sú diferenciálne rovnice Bernoulliove.
V dopisoch s Christianom Goldbachom (narodeným v Prusku), prichádza k úlohám o integrácii diferenciálnych rovníc. Mikuláš II. Bol členom Akadémie bolognskej. Druhý syn Johanna , Daniel I. vo svojej rozsiahlej vedeckej činnosti sa venoval matematike, astronómii, fyzike, hydrodynamike (veta o hydraulickom tlaku) a medicíne. Do Petrohradu bol pozvaný spolu so svojím bratom Mikulášom II. Neskôr bol profesorom anatómie, botaniky a fyziky v Bazileji a menovaný členom Akadémií bolognskej, berlínskej, parížskej a Royal société. V roku 1738

spracoval aj teóriu chvenia strún. O deväť rokov neskôr sa objavila teória chvenia strún spracovaná Eulerom. Týmito prácami sa stali Euler a Daniel Bernoulli zakladateľmi teórie parciálnych diferenciálnych rovníc. Daniel I. pracoval ešte v počte pravdepodobnosti.

3. ZÁVER

Venovali sme letmý pohľad „matematike včera“ a to z hľadiska zjednocovania Európy prostredníctvom matematických učencov, filozofov a mysliteľov.
Aká bude „matematika zajtra“ zjednotenej Európy bude možno závisieť aj od slovenskej matematiky. Len by sme si mali uvedomiť, že v niektorých krajinách EÚ „matematika dnes“ je na veľmi vysokej úrovni. Deti v predškolskom veku vedia počítať tak, ako u nás deti v prvej a v druhej triede a jedenásťročné deti ovládajú logaritmy. Konkrétne v krajine, ktorá dala svetu okolo tridsať slávnych matematikov.

Literatúra :

1. Znám,Š. Bukovský,L. Hejný,M. Hvorecký,J. Riečan,B. :Pohľad do dejín matematiky,Alfa Bratislava, 1986
2. Dirk J. Struik : Dejiny matematiky , Orbis, Praha,1963
3. Bero,P. :Matematici, ja a ty, Mladé letá, 1989
4. Ojzerman,T.I.,vedúci autorského kolektívu :Formovanie novovekej filozofie, Nauka, Moskva 1983
5. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 51, 1972-73, Praha
6. Gindikin, S. G. : Rozpravy o fyzikoch a matematikoch, Nauka, Moskva, 1985
7. Vilenkin, N. J. : Funkcie v prírode a v technike, Prosveščenie, Moskva, 1978

Adresa :

RNDr. Anna Paruleková
Gymnázium sv. Andreja
Nám. Andreja Hlinku 5
034 01 Ružomberok

Ing. Ivan Parulek
Katedra fyziky
VA SNP
031 19 Lipt. Mikuláš

Abelova metóda sčítania

Anna Paruleková, Ivan Parulek

ABSRACT : This paper deals with mathematic Niels Henrik Abel on the occasion of 200 –th anniversary of his birthday.

1. ÚVOD

K matematike patria aj osudy jej tvorcov. Preto v rámci kultúrnej tradície je vhodné aj na tejto konferencii si pripomenúť práce významných matematikov, predovšetkým pri ich významných výročiach. K takým patril aj N. H. Abel, syn nórskeho dedinského farára. Abelov krátky život prebehol skoro rovnako tragicky ako život Galoisov. V tomto roku uplynie dvesto rokov od jeho narodenia (5. 8. 1802). Ako študent v Christianii veril dlhú dobu, že rovnica piateho stupňa má riešenie, avšak sám sa opravil v spise uverejnenom v roku 1824. Bola to slávna práca, v ktorej Abel dokázal nemožnosť riešenia všeobecej rovnice 5. a vyššieho stupňa pomocou radikálov – problém, ktorý trápil mnohých matematikov už od čias Bombelliho a Viéta (dôkaz podaný roku 1799 Talianom Paolo Ruffinim bol považovaný Poissonom a inými matematikmi za nepresný). Abel dostal štipendium, ktoré mu umožňovalo, aby išiel do Berlína, Talianska a Francúzska. Chudobou a tuberkulózou zmučený, nesmelý a skromný mladý matematik naviazal len nepočetné osobné kontakty a zomrel roku 1829 skoro po svojom návrate do vlasti. Behom svojej cesty napísal Abel niekoľko prác, ktoré obsahujú jeho výsledky o konvergencii nekonečných radov, o „Abelových " integráloch a eliptických funkciách. Abelove vety v teórii nekonečných radov ukazujú, že bol schopný vytvoriť spľahlivý základ pre túto teóriu : „ Môžeš si predstaviť niečo strašnejšieho než tvrdenie, že platí $0=1 \ -2^n+3^n-4^n+.....$, pričom n je celé kladné číslo?", písal jednému priateľovi a dodal : „Ťažko existuje v matematike jeden jediný nekonečný rad, ktorého súčet by bol určený presným spôsobom" (dopis Holmboeovi, 1826).

2. O ABELOVEJ METÓDE SČÍTANIA

V rôznych matematických úvahách vzniká nutnosť určovať, odhadovať alebo skúmať hodnoty výrazov tvaru $\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i, n\in N, a_i, b_i \in R, resp. a_i, b_i \in C$. Pritom možno niekedy použiť metódu čiastočného sčítania (parciálna sumácia), ktorá býva spojená práve s menom Abela. Táto metóda sa opiera o veľmi jednoduchú identitu, obsiahnutú v nasledujúcej vete :

Veta : Nech je dané prirodzené číslo n a reálne (komplexné) čísla $a_i, b_i, i=1,2,...,n$ *.Platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i.(b_i-b_{i+1})+s_n.b_n, s_1=a_1, s_2=a_1+a_2, ...s_n=a_1+....+a_n$$

Dôkaz vety sa ľahko urobí matematickou indukciou.

Príklad 1. Určte hodnotu súčtu $\sum_{i=0}^{n-1} i.2^i$, kde n je prirodzené číslo.

Riešenie : Položme $s_j=2^0+2^1+...+2^{j-1}=2^j-1, j=1,2,...,n-1$. Dostaneme :

$$\sum_{i=0}^{n-1} i.2^i = s_1.(0-1)+s_2.(1-2)+...+s_{n-1}..(n-2-n+1)+(n-1).s_n = -(\sum_{i=1}^{n-1} s_i)+(n-1).s_n = -\sum_{i=1}^{n-1}(2^i-1)+(n-1).(2^n-1)=$$

$$=-(2^n-2)+(n-1)+(n-1).(2^n-1)=(n-2).2^n+2$$

Príklad 2. Určte hodnotu súčtu $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i.(i+1)}, n\in N$

Riešenie : Daný súčet upravíme nasledovne $\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+...+\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

Podobne možno využiť princíp parciálnej sumácie na určenie $\sum_{k=1}^{n} k^2, \sum_{k=1}^{n} k^3, \sum_{k=1}^{n} k^2.2^k, ...$

Príklad 3.: Nech s je dané komplexné číslo a r dané kladné číslo a nech K je uzavretý kruh so stredom s a polomerom r v rovine komplexných čísel. Nech $w_i \in K, i = 1,2,...,n$ .Dokážte, že pre každú n-ticu nezáporných čísel $\alpha_i, i = 1,2,...,n$ platí :

$\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1 \Rightarrow \alpha_1.w_1 + ... + \alpha_n.w_n \in K$

Riešenie : Máme dokázať, že platí $|\alpha_1.w_1 + ... + \alpha_n.w_n - s| \le r$

Na základe predpokladu však platí : $|w_j - s| \le r$ pre j=1,2,...,n. Odtiaľ získavame

$|\alpha_1.w_1 + ... + \alpha_n.w_n - 1.s| = |\alpha_1.w_1 + ... + \alpha_n.w_n - (\alpha_1 + ... + \alpha_n).s| = |\alpha_1.(w_1 - s) + ... + \alpha_n.(w_n - s)| \le$

$\le \alpha_1.r + ... + \alpha_n.r = (\alpha_1 + ... + \alpha_n).r = 1.r = r$, čím je dôkaz ukončený.

Príklad 4. : Nech K označuje kruh z príkladu 7 a nech z_i , i=1,2,...,n sú komplexné čísla, pričom $z_1 \in K, z_1 + z_2 \in K, ..., z_1 + ... + z_n \in K$. Dokážte, že pre každú n-ticu reálnych čísel $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ platí

$1 = \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_n \ge 0 \Rightarrow \lambda_1.z_1 + ... + \lambda_n.z_n \in K$.

Riešenie : Položme $w_j = z_1 + ... + z_j$, (j=1,2,...,n), takže $w_j \in K$ pre j=1,2,....,n. Použitím parciálnej sumácie dostávame $\lambda_1.z_1 + ... + \lambda_n.z_n = (\lambda_1 - \lambda_2).w_1 + ... + (\lambda_{n-1} - \lambda_n).w_{n-1} + \lambda_n.w_n =$
$= \alpha_1.w_1 + ... + \alpha_n.w_n$, kde $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, ..., \alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n, \alpha_n = \lambda_n$. Na základe predpokladu sú $\alpha_i, i = 1,2,...,n$ nezáporné a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. K dokončeniu dôkazu stačí použiť tvrdenie z príkladu 7.

3. ZÁVER

Abelove pojednania o eliptických funkciách boli napísané v krátkom, ale vzrušujúcom stretnutí s Jacobim. Gauss sa touto problematikou zaoberal už dávno, ale neuverejnil nič z týchto svojich úvah. Legendre, ktorý vynaložil toľko námahy pri štúdiu eliptických integrálov, túto skutočnosť celkom prehliadol a hlboko naňho zapôsobilo, keď ako starec si prečítal Abelove objavy. Abel mal mnoho šťastia v tom, že našiel nový časopis, ktorý by tlačil jeho práce.

Abelove integrálne rovnice a Abelova veta o súčte algebraických funkcií viedli k Abelovým funkciám.. Komutatívne grupy sa nazývajú Abelove grupy, čo ukazuje, ako úzko sú spriaznené myšlienky Galoisove a Abelove.

Literatúra :

1. Dirk J. Struik : Dejiny matematiky, Orbis, Praha, 1963
2. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 51, 1972-73, Praha

Adresa :

RNDr. Anna Paruleková
Gymnázium sv. Andreja
Nám. A. Hlinku, 5
034 01 Ružomberok

Ing. Ivan Parulek
Katedra fyziky
VA SNP Demänová
031 19 Lipt. Mikuláš