Reverzní čísla

Jan Melichar

ABSTRACT: *The article refers to some interesting attributes of reverse numbers. There are examples of how to use those attributes in active work of students during mathematical lessons.*

Motto: Matematika není divácká disciplína, žáci musí více produkovat než reprodukovat.

V tomto příspěvku chci ukázat, že žáci musí více produkovat než reprodukovat, že je třeba aby žáci byli vtaženi do vlastní činnosti při výuce matematiky. Podívejme se ne reverzní čísla a jejich zajímavé vlastnosti.

Definice : Nechť přirozené číslo a má rozvinutý zápis v oboru přirozených čísel a nuly v desítkové číselné soustavě

$a_n .10^n + a_{n-1} .10^{n-1} + a_{n-2} .10^{n-2} + a_{n-3} .10^{n-3} +......+ a_1 .10^1 + a_0 .10^0$,

kde $0 \leq a_i < 10$ (i= 0 *až* n), pak přirozené číslo $å$ s rozvinutým zápisem

$a_0 .10^n + a_1 .10^{n-1} + a_2 .10^{n-2} + a_3 .10^{n-3} +........+ a_{n-1} .10^1 + a_n .10^0$ se nazývá číslo reverzní (obrácené) k číslu a.

Například: Je dáno přirozené číslo 23067, číslo 76032 je reverzním (obráceným) číslem k číslu 23067 a samozřejmě i obráceně. Pozor na terminologii. Něco jiného je číslo opačné než číslo obrácené.

V úvodu se budeme zabývat reverzními čísly dvoucifernými. Vysvětlíme žákům pojem reverzní číslo. K číslu 28 je reverzní číslo 82. Domluvíme se, že jednociferná čísla budeme zapisovat s nulou na místě desítek. Například reverzním číslem k číslu 08 bude číslo 80 a obráceně reverzním číslem k číslu 80 bude 08.

Požádáme žáky, aby si napsali libovolné dvouciferné číslo. Dále aby k tomuto číslu napsali číslo reverzní. Dále, aby od většího dvouciferného čísla z těchto dvou odečetli jeho číslo reverzní. Žáci vyzveme, aby pokračovali v psaní libovolných dvouciferných čísel a stále odečítali jejich menší reverzní čísla a hlavně pozorovali zda nedojdou k nějakému zajímavému výsledku. Žáci pracuji samostatně a neznají k jakém obecnému závěru, k jakému cíli mají dojít. Prof. Jan Kopka z ústecké univerzity tento typ úloh nazývá zkoumáním. Najednou některý z žáků si všimne, že všechny výsledky jsou násobky devíti. Může zakřičet řecky „Heureka!“ – česky „Našel jsem!“. Pracujeme tedy tak zvanou heuristickou metodou. Současně využíváme intuici. Žák na základě svých

zkušeností, neboť musí znát násobilku devíti, přišel na to, že jde o násobky devíti. Žák intuicí, vlastně vyšším stupněm indukce dospěl k určitému závěru. Žákům položíme další úkol. Trochu jim pomůžeme a požádáme je, aby sledovali dvouciferná čísla, která odčítají a násobky devíti ke kterým došli. Opět se určitě najde žák, resp. žáci, kteří dojdou k závěru, že jde o násobky devíti rozdílu čísel, která jsou zapsaná příslušnými číslicemi daného čísla.
Například : K číslu 82 je reverzním číslem 28. 82 – 28 = 54. Opravdu 8-2 = 6 a 6 . 9 = 54.
Provedeme žáků důkaz proč tomu tak je:
$a > å$, $a = 10 . x + y$, $å = 10 . y + x$, pak
$a – å = 10 . x + y – (10 . y + x) = 10 . x + y - 10 . y – x =$
$9 . x – 9 . y = 9 (x – y)$.

Nyní žákům ukážeme tak zvanou prstovou násobilku devíti. Jednociferné číslo, kterým násobíme devíti vyznačíme na prstech u obou rukou. Například násobíme 7 . 9 , pak označíme sedmý prst z položených deseti prstů obou rukou vedle sebe na stole.Výsledek přečteme na položených prstech. Počet desítek je počet prstů od sedmého prstu vlevo a počet jednotek je počet prstů od sedmého prstu vpravo. Tedy 63. Tato prstová násobilka platí i pro násobení číslem jedna.

Nyní se budeme zaobírat čísly trojcifernými. Vytváříme dle Prof. Jana Kopky tak zvané hrozny problémů. Opět se dohodneme, že k jednocifernému číslu např. 3 je reverzním trojciferným číslem číslo 300 a k číslu 300 je reverzním trojciferným číslem číslo 003. K číslu například 27 je reverzním trojciferným číslem číslo 720 a k číslu 720 je reverzním trojciferným číslem číslo 027. Opět budeme chtít na žácích aby odčítali od sebe navzájem trojciferná reverzní čísla, která k sobě patří a to vždy od většího menší. Budeme zase chtít najít co je zajímavé. Žák, či žáci dojdou k závěru, že výsledkem je vždy násobek čísla 99 a při dalším zkoumání zjistí, že jde o násobek rozdílu čísel zapsaných první a poslední cifrou většího k sobě patřících reverzních čísel. Opět provedeme matematický důkaz proč tomu tak je:
$a > å$, $a = 100 . x +10 . y + z$, $å = 100 . z + 10 . y + x$, pak
$a – å = 100 . x + 10 . y + z – (100 . z + 10 . y + x) =$
$100 . x + 10 . y + z - 100. z - 10 . y – x = 99 . x – 99 . z =$
$99 (x –z)$.

Zde žáky požádáme jak je možné zapsat 99, aby bylo možné násobit 100, neboť to dobře umíme. Žáci doporučí 99 zapsat jako (100 – 1). A přijdou i sami na to, jak násobit 99, například 99 . 7 = (100 – 1) . 7 = 7 . 100 – 7 . 1 = 700 - 7 = 693. Násobíme tedy stem a odečítáme počet jednotek.

Mohou pokračovat obecně i rozdílem čtyřciferných reverzních čísel, ale zde již uvidí, že písemné odečtení je rychlejší než obecně odvozený předpis.

$a > å$, $a = 1000 \,.\, x + 100 \,.\, y + 10\, u + z$, $å = 1000 \,.\, z + 100 \,.\, u + 10 \,.\, y + x$, pak

$a - å = 1000 \,.\, x + 100 \,.\, y + 10 \,.\, u + z - (1000 \,.\, z + 100 \,.\, u + 10 \,.\, y + x) =$

$1000 \,.\, x + 100 \,.\, y + 10 \,.\, u + z - 1000 \,.\, z - 100 \,.\, u - 10 \,.\, y - x = 999 \,.\, x + 90 \,.\, y - 90 \,.\, u - 999 \,.\, z = 999 \,.\, (x - z) + 90 \,.\, (y - u)$.

Například: 4853 – 3584 = 999 . 1 + 90 . 3 = 999 + 270 = 1269

Dále přistoupíme k reverzním číslům, která jsou navzájem stejná. Nazýváme je palindromy, neboť se čtou stejně odpředu i odzadu. Nejznámějším palindromem v českém jazyce je věta: „Kobyla má malý bok“. Nerespektujeme zde délku souhlásek. V matematice jsou zajímavé čtyřciferné palindromy. Řekneme žákům, aby si vypsali podle velikosti určitý počet, záleží na nich jak velký počet, čtyřciferných palindromů. Opět jim položíme otázku, zda na těchto palindromech není něco zajímavého. Nejmenším čtyřciferným palindromem je číslo 1001. Další čtyřciferné palindromy jsou podle velikosti čísla 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, atd. Číslo 1001 je dělitelné číslem 11. Každé následující číslo je o 110 větší. Vzdálenost čísel je 110. Číslo 1001 je násobkem čísla 11, rozdíly (vzdálenosti) jsou také násobkem čísla 11, musí být tedy každý následující palindrom také násobkem čísla 11, respektive je dělitelný 11. Došli jsme k závěru, že vzdálenost čtyřciferných palindromů je 110, ono tomu však vždy tak není. Pokud se při přechodu od jednoho palindromu k dalšímu změní číslice na místě tisíců, pak je diference jiná. Žáci přijdou na to, že vzdálenost těchto palindromů je 11. Číslo 11 je také násobkem čísla 11 (je dělitelné 11). Je tedy vše v pořádku a ukázali jsme si, že čtyřciferné palindromy jsou násobkem čísla 11. Další dotaz pro žáky by byl: „Kolik je všech čtyřciferných palindromů?“. Správná odpověď je 90. Žáci určitě přijdou na systém jak počet čtyřciferných palindromů určit.

Dělitelnost čtyřciferných palindromů snadno dokážeme velmi jednoduchým důkazem. Zapíšeme libovolný čtyřciferný palindrom ve tvaru *abba* , kde *a, b* jsou číslice v desítkové soustavě. Provedeme rozvoj čísla tohoto čísla v desítkové soustavě

$abba = 1\,000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11\,(91a + 10b)$. Závěr ukazuje, že palindrom *abba* je dělitelný 11 (resp. je násobkem čísla 11).

Ukázal jsem na příkladu reverzních čísel jak se držet hesla, že žáci mají více produkovat než reprodukovat.

Literatura:

(1) Kopka Jan: *Hrozny problémů ve školské matematice*, UJEP, Ústí nad Labem, ISBN 80-7044-247-6
(2) Kopka Jan: *Konkretizace a zobecňování*, In: Podíl matematiky na přípravě učitele elementární školy, str.86-91, UP, Olomouc, 2002, ISBN 80-244-0440-0

Kontaktní adresa:
Jan Melichar
Pedagogická fakulta UJEP, Hoření 13, 400 96 Ústí nad Labem, Česká republika
E-mail:melichar@pf.ujep.cz