Gra strategiczno-losowa jako środek aktywizacji matematycznej uczniów

Maciej Major, Barbara Nawolska

ABSTRACT: *This paper presents the concept of using strategic-chance games in the propadeutic education of the basic elements of probability for elementary school children. They will learn such basic ideas like probability (the estimate of chance) and making the optimal decision under conditions of risk.*

Praca prezentuje pewne badania wykorzystujące gry strategiczno-losowe do aktywizacji matematycznej uczniów klas początkowych. Proponowane w pracy gry są środkiem do badania intuicyjnego rozumienia prawdopodobieństwa zdarzenia (jako oceny szansy) i wartości oczekiwanej pewnej zmiennej losowej a zarazem służą do kształtowania tych pojęć i rozwijania aktywności matematycznej dzieci. Chodzi tu o badanie możliwości wprowadzania elementów stochastyki do nauczania początkowego. Oceny szansy ukazano w kontekście procesów decyzyjnych związanych z grami losowymi.

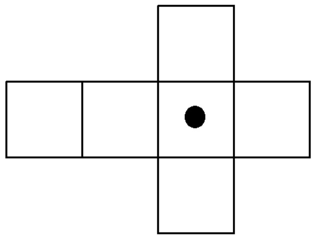
Zarówno w pedagogice jak i w dydaktyce matematyki podkreśla się dużą rolę dydaktyczną gier (zob. [3]). Za wykorzystaniem gier do kształcenia probabilistycznego w nauczaniu początkowym przemawiają następujące fakty:
- gra i zabawa jest podstawową formą działalności dziecka,
- gra losowa jest dobrym środkiem aktywizacji matematycznej dzieci,
- w trakcie gry losowej i jej matematycznej obróbki uczniowie mogą odkrywać podstawowe idee stochastyczne,
- problematyka rachunku prawdopodobieństwa wywodzi się z gier (gry losowe inspirowały rozwój rachunku prawdopodobieństwa), kształcenie stochastyczne oparte na bazie gier pozostaje w zgodzie z *zasadą paralelizmu w dydaktyce* (zob. [5], s. 52-57).

Propozycja wykorzystania gier jest zgodna z zasadą czynnościowego nauczania matematyki, która orzeka, że w trakcie kształtowania pojęć matematycznych należy przechodzić od operacji konkretnych poprzez wyobrażone do operacji abstrakcyjnych. Przyrządy losujące (kostki, ruletki, urny z kulami), plansze i rysunki stanowią na tym etapie nauczania konkretyzację abstrakcji matematycznej (zob. [2], [3], [4], [5]).

W badaniach wykorzystano różne warianty gry losowej.

Gra 1.

Rekwizytem w grze jest kostka sześcienna (nazwijmy ją k_1), która ma jedną ściankę z czarną kropkę, pozostałe ścianki są puste (zob. rys. 1). W grze rzuca się kostką k_1 i obserwuje wynik rzutu.



rys. 1

Rzut kostką k_1 jest doświadczeniem losowym o dwóch możliwych wynikach: ω_0 - wypadnie ścianka pusta, ω_1- wypadnie ścianka z kropką. Modelem doświadczenia przeprowadzanego w grze jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$ i $p(\omega_0)=5/6$ i $p(\omega_1)=1/6$. Jest zatem pięć razy bardziej prawdopodobne, że wypadnie ścianka pusta, niż że wypadnie ścianka z kropką.

Gracz zanim rzuci kostką stawia na wynik tego rzutu i zdobywa:

- jeden punkt jeśli postawił na wynik ω_0 i doświadczenie zakończyło się tym wynikiem;
- dwa punkty jeśli postawił na wynik ω_0 i doświadczenie zakończyło się tym wynikiem.

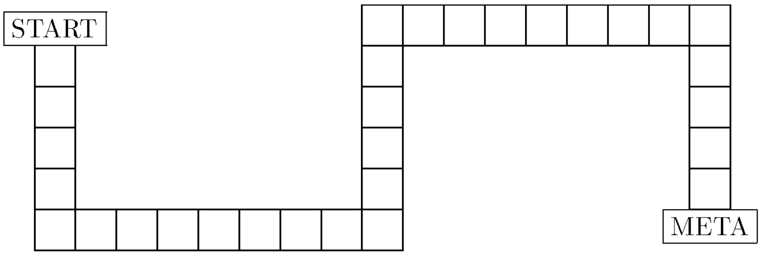
Gracz podejmuje zatem jedną z dwu decyzji:

d_0 - stawiam na to, że na kostce wypadnie pusta ścianka,
d_1 - stawiam na to, że na kostce wypadnie ścianka z kropką.

Decyzja d_0 jest równoznaczna ze stawianiem na wynik ω_0, decyzja d_1 - ze stawianiem na wynik ω_1.

Niech X_j będzie liczbą punktów zdobytych przez gracza przy decyzji d_j, dla $j = 0, 1$. Mamy $E(X_0) = 5/6$, $E(X_1) = 2/6$. Zatem decyzja d_0 jest optymalna, bo przy tej decyzji mamy większe średnie korzyści $(5/6 > 2/6)$. Celem umożliwienia odkrycia przez dzieci optymalnej strategii (za pomocą danych statystycznych), zaproponowano im inną wersję gry, w której dodatkowym rekwizytem jest plansza (zob. rys. 2) oraz pionki, po jednym dla każdego gracza.

Na wstępie każdemu z graczy przydziela się jeden z wyników doświadczenia (każdemu inny wynik). Każdy z graczy ma więc swój wynik. Każdy z graczy stawia swój pionek na starcie. Następnie wykonuje się rzut kostką i jeśli doświadczenie zakończy się wynikiem ω_0, to o jedno pole przesuwa swój pionek ten gracz, któremu przydzielono wynik ω_0, jeśli doświadczenie zakończy się wynikiem ω_1, to o dwa pola przesuwa swój pionek ten gracz, któremu przydzielono wynik ω_1. Zwycięża ten z graczy, którego pionek pierwszy dotrze do mety.



rys. 2

Wraz ze wzrostem liczby powtórzeń doświadczenia pozycje pionków na planszy stają się prezentacją danych statystycznych zbieranych w trakcie gry. Wartości oczekiwane zmiennych losowych X_1 i X_2 różnią się w sposób istotny (prawie trzykrotnie), co daje praktyczną pewność, że przy dużej liczbie powtórzeń doświadczenia, dane statystyczne ujawnią te różnice.

W badaniach chodziło o sprawdzenie, czy ujawnione w trakcie gry dane statystyczne pozwolą uczniom na sformułowanie wniosków „a posteriori" dotyczących prawdopodobieństw wyników ω_0 i ω_1 oraz wartości oczekiwanych zmiennych losowych X_1 i X_2.

W tym celu po rozegraniu gry dyskutowano z uczniami na temat szans ich zwycięstwa w tej grze. Obserwowano, czy uczeń potrafi wskazać lepszy wynik i jak uzasadnia swoją odpowiedź. Interesujące było czy uczniowie swoje odpowiedzi uzasadniają na podstawie analizy matematycznej przyrządu losującego (kostki) czy wykorzystują zebrane dane statystyczne. Dyskutowano także z uczniami o możliwościach zmiany reguł gry tak, by szanse graczy były równe.

Oczekiwano następujących propozycji:
- zamiana kostki na taką, która ma równe liczby ścian pustych i ścian z kropką i przesuwanie się zawsze o jedno pole,
- przy tej samej kostce, zmiana zasady punktowania za wynik ω_1.

Uczniowie klas początkowych z łatwością dostrzegali nierówność szans graczy stwierdzając np.:

„*... w całej takiej grze tylko raz wyszło czarne*";
„*ścianka czarna jest tylko jedna a pustych ścianek jest więcej*";
„*częściej wypada ścianka pusta*";
„*tu jest aż pięć wyborów* [ścianek pustych]".

Wypowiedzi uczniów świadczą, że potrafią oni interpretować zebrane przez siebie dane statystyczne i na ich podstawie oceniać jakościowo szanse graczy, oraz wyłaniać bardziej prawdopodobny wynik na podstawie geometrycznych cech kostki.

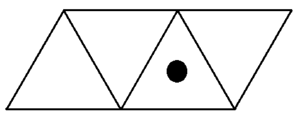
Badani uczniowie potrafili podać propozycje zmian gry, tak aby była ona sprawiedliwa. Wszyscy badani uczniowie z łatwością zaproponowali zmianę kostki na taką, która ma trzy ścianki z kropką i trzy ścianki puste, i przyznawanie za każdy z możliwych wyników rzutu kostką po jednym punkcie. Uczniowie siedmioletni i ośmioletni nie potrafili jednak ustalić odpowiedniej punktacji za wyniki w grze bez zmiany kostki. Taką zmianę punktacji potrafili podać uczniowie dziewięcioletni, proponując:

- „*pięć punktów za ściankę czarną i jeden punkt za ściankę pustą, wtedy wyrównają się szanse*";
- „*przesuwać się o pięć pól, bo jest pięć takich ścianek* [pustych], *a jak czarne to o jedno, bo jest jedna taka* [ścianka]".

Ostatnia wypowiedź świadczy o tym, że dziecko dostrzega nierówność szans wyników w rzucie kostką (5:1) i widzi potrzebę uwzględnienia tego faktu w punktacji jednak popełnia pomyłkę w słownej wypowiedzi.

Propozycje uczniów dotyczące wyrównania szans graczy świadczą o dobrym rozumieniu przez nich takich pojęć jak: „sprawiedliwość gry" i „równość szans".

Po rozegraniu gry 1, zaproponowano uczniom udział w **grze 2** o identycznym regulaminie ale z inną kostką. W tym przypadku była to kostka czworościenna o trzech ściankach pustych i jednej ściance z kropką (nazwijmy ją k_2, zob. rys. 3).



rys. 3

Prawdopodobieństwo wypadnięcia ścianki z kropką jest tu trzy razy mniejsze niż ścianki pustej.

Tak jak poprzednio po rozegraniu gry dyskutowano z uczniami na temat szans graczy w tej nowej grze i nad zmianą jej regulaminu tak, by te szanse zostały wyrównane. Interesujące było, czy uczniowie potrafią dostrzec i wykorzystać analogie występujące w obu grach. Dzieci zauważyły, że choć ścianka z kropką na kostce czworościennej wypada częściej niż na kostce sześciennej, to nadal większe szanse na wypadnięcie ma ścianka pusta. Tu również uczniowie z łatwością dostrzegli nierówność szans graczy i uzasadniali ją podobnie jak w grze 1.

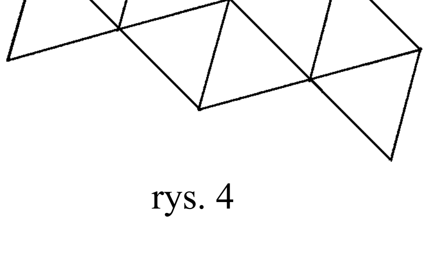
Wszyscy badani uczniowie z łatwością zaproponowali, dla wyrównania szans graczy, zamianę kostki na taką, która ma dwie ścianki z kropką i dwie puste. Z matematycznego punktu widzenia proces ten jest przykładem zamiany modelu probabilistycznego nieklasycznego na model probabilistyczny klasyczny, co zapewnia równe prawdopodobieństwa poszczególnych wyników.

Żaden siedmiolatek nie potrafił podać propozycji takiej nowej punktacji, by bez zmiany kostki gra stała się sprawiedliwa. Natomiast ośmiolatkowie już sobie z tym problemem radzili, np. ośmioletnia Magda podała interesujący pomysł: „*... może by tak, że jak się wyrzuci czarny, to za niego cztery punkty i wtedy każdy chciałby go wyrzucić i ryzykowałby* *ten czarny. Wtedy by było uczciwie, bo czasem by mu wyszło, a czasem nie. To by było dobrze, bo ktoś by wybierał puste, ale nie bałby się czasem ryzykować, bo by się dużo przesunął.*" Przypuszczalnie Magda nie ustalala reguł gry tak, by było obojętne jaki wynik obstawiamy, a jedynie chciała, by stawianie na ściankę z kropką warte było ryzyka.

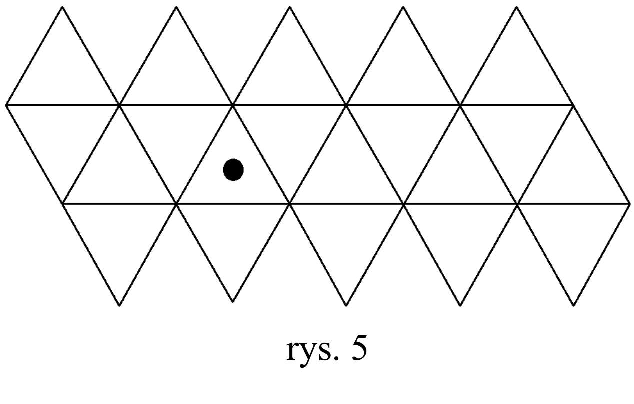
Uczniowie dziewięcioletni nie mieli problemów z ustaleniem nowej (sprawiedliwej) punktacji proponując 3 punkty za ściankę z kropką a jeden za ściankę pustą.

Na koniec uczniowie dostali siatki kostki ośmiościennej - k_3 (zob. rys. 4) i kostki dwudziestościennej - k_4 (zob. rys. 5). Uczniowie byli proszeni o ustalenie regulaminu gry analogicznej do gry 1 i gry 2, tak abygra była sprawiedliwa. Uczniowie mogli dorysowywać kropki na siatkach wielościanów, tak by szanse wypadnięcia ścianki z oczkiem i ścianki pustej były równe. Następnie ustalać regulamin gry z użyciem kostki k_3 (odpowiednio k_4) przyznając za każdy z możliwych wyników rzutu kostką po jednym punkcie (wtedy szanse graczy będą równe). Uczniowie mogli też bez zmiany liczby kropek na kostkach ustalić nową punktację za każdy z możliwych wyników tak, by gra była sprawiedliwa. Uczniowie zauważyli, że w grze, w której rzuca się kostką k_3, za ściankę z oczkiem należy przyznawać 7 punktów a za ściankę bez oczka 1 punkt. W grze, w której rzuca się kostką k_4, za ściankę z oczkiem należy przyznawać 19 punktów a za ściankę bez oczka 1 punkt.

Badani uczniowie mogli na tym etapie badań korzystać z doświadczeń zdobytych w poprzednich grach. Ważną aktywnością matematyczną jest tu umiejętność dostrzegania i wykorzystywania analogii zarówno w grach jak i między strukturalnymi cechami przyrządów losujących. Na tym etapie badań wszyscy uczniowie podali poprawnie pomysł związany z malowaniem ścianek, natomiast ci, którzy radzili sobie z problemem zmiany sposobu punktowania potrafili też dobrze ustalić regulamin gry sprawiedliwej z nowymi rekwizytami. Ich propozycje dla kostek k_3 i k_4 były analogiczne jak dla kostek k_1 oraz k_2. Zaś ci uczniowie, którzy nie poradzili sobie z tym problemem w poprzednich grach (siedmiolatkowie i niektórzy ośmiolatkowie) nie poradzili sobie też w nowej sytuacji.



rys. 4



rys. 5

Zaprezentowane gry były dla dzieci interesujące. Chętnie brały w nich udział i chętnie dyskutowały na tematy związane z grami. W trakcie zabawy dzieci przyswajały pewne elementarne treści probabilistyczne. Nauka przebiegała w sposób spontaniczny i naturalny. Wyniki badań potwierdzają, że treści probabilistyczne takie jak prawdopodobieństwo zdarzenia (równość szans, gra sprawiedliwa) są dostępne na tym etapie rozwoju dzieci. Pewne trudności przysparza niektórym dzieciom młodszym pojęcie wartości oczekiwanej. Przeprowadzone badania sugerują hipotezę, że wprowadzenie elementów stochastyki do nauczania początkowego może ułatwić dzieciom późniejszą naukę tego przedmiotu.

Literatura:

[1] M. Bała, A. Raźny, *Idee stochastyczne we wczesnoszkolnym kształceniu matematycznym*, Niepublikowana praca magisterska, Kraków 1977.

[2] A. Engel, T. Varga, W. Walser, *Strategia czy przypadek*, WSiP, Warszawa 1979.

[3] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki 3*, WSiP, Warszawa 1977.

[4] M. Major, B. Nawolska, *Gra strategiczno-losowa jako środek kształtowania intuicji probabilistycznych uczniów klas początkowych*, Podíl matematiky na připravě učitele primární školy. Sbornik mezinárodní konference, Olomouc, 2002, s. 110-114.

[5] B. Nawolska, *Gry losowe i pierwsze wnioskowania stochastyczne w szkole podstawowej*, Matematika v príprave učitel'ov 1. stupňa základnej školy. Zbornik príspevkov, Banská Bystrica, 2001, s. 52-57.

[6] A. Płocki, *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobnosti v ulohách a problémech*, Acta Universitatis Purkynianae 68, Studia Matematica IV, Ústi nad Labem 2001.

dr Barbara Nawolska
Katedra Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Akademia Pedagogiczna
ul. Ingardena 4,
PL 30-060 Kraków, Poland
E-mail: bnawol@wsp.krakow.pl

dr Maciej Major
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków, Poland
E-mail: mmajor@wsp.krakow.pl