

Realismus konstruktivních přístupů k vyučování matematice

František Kuřina

ABSTRACT: This paper shows the problems and possibilities of realisation of the constructive approaches to the mathematics education. I believe that this is real way how to overcome the formalistic tendencies in our school practice. In the first part I give a short view of the school problems from the historic perspective, the main part of my paper is devoted to the analysis of constructive approaches with respect to the development of creativity and problem solving.

1. MATEMATIKA VE ŠKOLE VČERA, DNES A ZÍTRA

Cílem mého příspěvku je obrátit vaši pozornost k osobnímu zamyšlení nad metodami matematického vzdělávání. Aniž bych se chtěl věnovat historickému rozboru problematiky, připomenu pro srovnání situaci ve vyučování matematice před čtvrt stoletím, pokusím se popsat situaci současnou a budu formulovat i svou vizi vývoje vzdělávání pro budoucnost. Jsem si vědom riskantnosti tohoto přístupu, protože musím počítat s tím, že to „nevyjde“, v duchu hesla naší konference je však namístě se o takovýto odhad pokusit. Snad se nám podaří, budou-li i ostatní referáty perspektivy hledat, jakési rozumné tendence vystopovat. Matematiku druhé poloviny dvacátého století můžeme patrně charakterizovat *odlukou od fyziky započatou rozvojem disciplin jako je teorie množin, topologie a abstraktní algebra a vrcholící v díle Bourbakiho* ([1], str. 8). Tyto tendence se projeví nejen v matematice – vědě, ale měly svůj výrazný ohlas i v učebnicích pro základní a střední školy. Názor na matematiku zdůrazňující základy teorie množin, matematickou logiku a axiomatickou metodu našel překvapivé spojení u mnoha pedagogů a psychologů, hnutí za *modernizaci školské matematiky* zachvátilo v různých formách prakticky celý kulturní svět. Sám jsem byl kdysi výrazně zaujat průkopnickou prací amerického psychologa *J. S. Brunera*, jehož spis *Vzdělávací proces* vyšel česky v roce 1965. Orientace vzdělávání na základní pojmy, principy a struktury rozpracovaná v této knize ovlivnila mnoho didaktických projektů, a to nejen v matematice. Přitom se vycházelo z myšlenky, podle mého názoru zcela falešné, že *průběh duševního vývoje dítěte má často blíže k axiomatickému uspořádání učebního předmětu než historický vývoj pojmů v dané oblasti vědy* ([2], str. 48). Proti tomu dnes můžeme uvést tézi ruského didaktika *P. M. Erdnijeva*, že *růst stromu matematických znalostí v hlavě člověka bude úspěšný jen tehdy, když v určité míře zopakuje historii rozvoje příslušné vědy* (citováno podle [3], str. 25). Repräsentantem strukturálního přístupu k vyučování matematice u nás je monografická práce *J. Šedivého O modernizaci školské matematiky* z roku 1969 ([4]). Její styl, který připomeneme dvěma ukázkami, ovlivňuje vyučování matematice až do současnosti. Pro modernizované texty je charakteristické explicitní definování pojmů a určitá úroveň přesnosti spjatá s bohatým využíváním symboliky. Relace a zobrazení jsou v této knize zavedeny takto:

Binární relací \mathcal{R} nazýváme každou část kartézského součinu $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dvou množin \mathcal{A} , \mathcal{B} , tj. i takovou část, kterou dovedeme udat jen výčtem a nemáme „po ruce“ vztah mezi $x \in \mathcal{A}$ a $y \in \mathcal{B}$ charakteristický pro její prvky ([4], str. 129).

\mathcal{R} je zobrazením z \mathcal{A} do $\mathcal{B} =_D$

$$\forall x \in \mathcal{A} \forall y_1 y_2 \in \mathcal{B} [(x, y_1) \in \mathcal{R} \wedge (x, y_2) \in \mathcal{R} \Rightarrow y_1 = y_2]$$

Kam až vedl požadavek deduktivní výstavby školské matematiky můžeme ilustrovat na příkladu učebnice geometrie od ruského matematika *A. V. Pogorelova*. Po formulaci pěti „silných“ axiomů mají dvanáctileté děti

pochoptit důkaz věty, která se v Hilbertově soustavě obvykle nazývá Paschův axiom:

Jestliže přímka neprochází žádným vrcholem trojúhelníku a protíná jednu z jeho stran, pak protíná právě jednu ze zbývajících stran.

Pravým opakem takto pojaté geometrie je o pouhých 10 let mladší učebnice geometrie příznačně nazvaná *Discovering Geometry* pro americké střední školy. Je to učebnice bohatá na ukázky souvislostí matematiky s uměním, technikou a světem studenta. Mimořádná pozornost se zde věnuje rozvíjení představivosti a logiky. Na 756 stránkách knihy se jen výjimečně formulují matematické věty, většina výsledků má charakter hypotéz. Tak např. *Sphere Volume Conjecture* je po podrobném výkladu o aplikaci Cavalieriho principu na polokouli a „válec bez kužele“ formuluje takto:

The volume of a sphere with radius r is given by the formula - ? - .

Problematika vyučování matematice souvisí přirozeně se vzdělávacími cíli. Bruner v citované práci píše: *Zvládnutí základních pojmů vědního odvětví v sobě zahrnuje nejen osvojení obecných principů, nýbrž i vytvoření postoje k učení a ke zkoumání, k dohadům a domněnkám, k možnosti řešit problémy vlastním způsobem* ([2], str. 30). *Kterékoli dítě v kterémkoli stadiu vývoje je možno s úspěchem vyučovat kterémukoli předmětu v intelektuálně hodnotné formě* ([2], str. 40). Čtvrt století po nastínění těchto skvělých perspektiv je americký učitel J. Holt podstatně realističtější: *Rádi říkáme, že posíláme děti do školy, aby se tam naučily přemýšlet. Až příliš často je tam ale učíme myslet špatně, naučíme je vzdát se přirozeného a mocného způsobu myšlení ve prospěch metody, která v jejich případě nefunguje a kterou sami používáme zřídka. A co je horší, přesvědčujeme většinu z nich, ..., že nemůžou myslet vůbec* ([5], str. 7). Skutečnost, že vyučování matematice nepřispívá automaticky ke kultivaci myšlení, zdůrazňuje i známý americký matematik G. Polya např. v příspěvku [6]. Česká republika byla bohužel jedinou zemí světa, která měla v řešení stejných matematických úloh v šetření TIMSS celkovou úspěšnost středoškoláků nižší než úspěšnost žáků 8. ročníku ([9]). I to je známkou skutečnosti, že vyučování matematice k rozvíjení myšlení nepřispívá. Negativní hodnocení práce školy není ovšem způsobeno reformním hnutím, které se nazývalo *modernizace vyučování matematice*. Je pouze projevem skutečnosti, že staré školské problémy modernizace nevyřešila. Připomeňme v této souvislosti např. myšlenku významného českého pedagoga G. A. Lindnera, který před více než sto lety napsal: *V poslední době ozývají se jak u nás, tak i jinde vždy zřetelněji hlasy o přetížení mládeže učební látkou. Zároveň s těmito stesky vyskytují se i stížnosti, že ovoce školního vyučování není dosti trvanlivé a že žáci záhy zapomínají, čemu se ve škole byli naučili. Každodenní zkušenost nás může poučiti, že výsledky, jakých se namnoze doděláváme ve školách, nikterak neodpovídají onomu ohromnému aparátu, s jakým se tam pracuje a jehožto rozsáhlost se jeví v učebních osnovách příslušných škol. My chceme vypěstovati obry a vychováváme trpaslíky... Příčinou oněch neutěšených*

úkazů ... jest onen povrchní pedagogický náhled, že vyučování záleží v pouhém hromadění látky učební, a že měřítkem vzdělanosti jak rozumové, tak mravní, jest množství vědomostí, kterým se byl žák naučil. Tento náhled, který přeceňuje vliv vzdělání pouze látečného, máje za to, že každé vnímání naučené látky, bez ohledu k tomu, jak se jí zmocňuje a zdali je užívána, jest již skutečným stupňováním duševní síly... rozkvět a zdar školního vyučování nejvíce ohrožuje ([8], str. 164). Na nedostatky vzdělávání poukazovali i četní kulturní pracovníci. Za všechny zde připomeňme slova K. Čapka z roku 1921. Vyhýbám se s hrůzou nejjednoduššímu sčítání, ale podnes lituji, že jsem nebyl ani trochu zasvěcen do tajemství integrálů a diferenciálů. Neboť není, myslím, účelem střední školy, aby absolvent podržel slovíčka a vzorce, jimž se učil, nýbrž myšlenkové pochody, na kterých to vše visí. Umět to je dočasné, ale rozumět to je trvalé obohacení ducha. Bývali učitelé, kteří žádali, aby žák prostě uměl, co mu bylo uloženo; požehnání budiž ti, kteří žádali, aby tomu také rozuměl: aby si osvojil metodickou stránku gramatického a historického a přírodovědeckého myšlení ([9], str. 63).

Za hlavní příčinu neuspokojivého stavu ve vyučování matematice považují snahu předat relativně velké množství učiva zformulovaného do hotové matematické formy studentům, které toto učivo nezajímá, kteří necítí vnitřní potřebu si je osvojit. Studují více méně z donucení, v podstatě formálně. Základní otázkou matematického vzdělávání je tedy motivace, která souvisí s vytvářením klimatu tvořivé práce. Je třeba pomocí vhodných otázek, příkladů a problémů soustavně ukazovat jak matematika vzniká a jak pomáhá člověku řešit otázky, které jsou pro něho aktuální, někdy dokonce životně důležité. Podle mého názoru je to možné tzv. konstruktivními přístupy. Této problematice jsme věnovali knihu *Dítě, škola a matematika* ([12]). V druhé části tohoto příspěvku se budu snažit tuto tematiku ilustrovat.

2. DIDAKTICKÝ KONSTRUKTIVISMUS

I. Vzdělání je aktivita

Matematiku nelze vměstnat do učebnic, příruček, sbírek úloh, přehledů, encyklopedií a monografií. Matematika je činnost, pro níž je charakteristické řešení úloh, hledání definic, formulace hypotéz a vět, diskuse o postupech, argumentace, hledání důkazů, To vše je možné NA KAŽDÉ UROVNI STUDIA. Můžeme to ilustrovat na třech příkladech.

Úloha 1 *Existuje těleso ohraničené shodnými čtverci? Je jich nekonečně mnoho!*

Úloha 2 *Čtvercová zahrada je obehnána příkopem o šířce 2 m. Je možné se do zahrady dostat pomocí dvou prken délky 2 m? Prkna nemůžeme spojovat.*

Úloha 3 *Určete největší počet částí, na které dělí rovinu n jejich přímek.*

II. Tvorba matematických modelů

Poznávací proces probíhá koneckonců v mysli každého dítěte, každého studenta, každého vědce. Podněty k němu získává žák od učitele, z knih, počítačů, televize, Podstatné přitom je, aby si žák vytvořil svou vlastní představu o pojmu, postupu, ..., svůj vlastní model poznatku. Modely pomáhají porozumění, zapamatování i aplikacím. Na prvním stupni základní školy jsou vhodným modelem přirozených čísel *Cuisinairovy tyčinky*, modelem prostorové situace jsou průměty trojrozměrných geometrických útvarů, modelem závislostí jsou grafy funkcí.

Úloha 4 *Rozdělte kolmý kruhový válec třemi rovinnými řezy na 8 shodných částí.*

Úloha 5 *Ukažte konstrukci vhodného modelu základních geometrických pojmů, že 5. Eukleidův axiom nevyplývá z předcházejících.*

Úloha 6 *Ukažte, že existují dvě konvexní tělesa, která nejsou shodná, a přitom jejich povrchy se skládají ze sobě rovných množin mnohoúhelníků.*

III. Matematické řemeslo je předpokladem tvořivosti

Školská matematika by neměla být drezúrou na zapamatování vzorců, definic a postupů. Přesto však existují oblasti, kdy minimální technické dovednosti je nutno zvládnout na dobré úrovni. Výpočetní technika by měla být složkou této řemeslné stránky vzdělávání. Rozvíjení kalkulativního charakteru matematiky je bezesporu jedna z oblastí, které nejsou v současné době uspokojivě vyřešeny. Zkušenosti jsou nezastupitelnou stránkou poznávacího procesu i dnes, mohou však být různými způsoby modifikovány.

Úloha 7 *Vypočítejte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru r .*

Úloha 8 *Dokažte Ptolemaiovu větu (V libovolném tětiovém čtyřúhelníku je součin délek úhlopříček roven součtu součinu délek protilehlých stran).*

Úloha 9 *Dokažte Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku.*

IV. Školská matematika je protomatematika

Pro školskou matematiku jsou charakteristické činnosti, které vedou k vytváření matematických poznatků. Z nejdůležitějších můžeme uvést: umění vidět, umění sestrojovat, umění počítat, umění dokazovat a umění abstrahovat. Příklady těchto dovedností můžeme najít při řešení úloh a důkazech vět.

Úloha 10 Sestrojte dva mnohoúhelníky, které mají po řadě shodné a rovnoběžné všechny strany, ale nejsou shodné.

Pro konstruktivně pojaté vyučování matematice je charakteristický systém podnětů, které vedou k jejímu porozumění, k vytváření představ, pojmů a postupů ve vědomí žáka. Podněty nemusí mít charakter matematický, může jimi být např. zájem o řešení problémů techniky nebo přírodovědy. Pak ovšem zájemce studuje matematiku zpracovanou v učebnicích, encyklopediích a monografiích, pojmy poznává prostřednictvím jejich definic, studuje matematické věty a jejich důkazy. V tomto smyslu se liší konstruktivní přístupy od tzv. problémového vyučování matematice, kdy matematické pojmy vyrůstají převážně z řešení problémů. V konstruktivním pojetí vyučování tomu tak být může, ale nemusí. Každé zaujetí pro matematiku může vyústit v konstruktivní vyučování. Vhodným úvodem konstruktivních přístupů k vyučování mohou být projektové metody různého druhu.

3. ZÁVĚRY

Přes aktuální problémy pedagogické praxe (množství učiva, přijímací zkoušky, nezájem žáků, ...) jsem přesvědčen, že konstruktivní přístupy jsou realitou praxe dobrých učitelů matematiky, kteří dbají o rozvíjení porozumění matematice. Jde o to, abychom zhodnotili své přístupy k vyučování, a to i na škole vysoké, uvědomili si aktuální priority a snažili se nepřipustit formální přístupy ve vzdělání. Otázka konstruktivních přístupů je otázka praxe každého učitele, jeho pedagogického přesvědčení.

Příspěvek byl vypracován s částečnou podporou grantu GAČR 406/02/0829.

Literatura:

1. Motl, L., Zahradník, M.: *Pěstujeme lineární algebru*. Nakladatelství Karolinum, Praha 2002.
2. Bruner, J., S.: *Vzdělávací proces*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1965.
3. Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1969.
4. Šedivý, J.: *O modernizaci školské matematiky*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1969.
5. Holt, J.: *Jak se děti učí*. Agentura Strom, Praha 1995.
6. Polya, G.: *Mathematics Promote the Mind*. In Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Birkhäuser, Boston 1983.

7. Straková, J., Tomášek, V., Palečková, J.: *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání*. Výzkumný ústav pedagogický, Praha 1996.
8. G. A. Lindner a jeho odkaz dnešku. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1975.
9. Čapek, K.: *Na břehu dnů*. Československý spisovatel, Praha 1966.
10. Pogorelov, A., V.: *Geometrija*. Nauka, Moskva 1983.
11. Serra, M.: *Discovering Geometry*. Key Curriculum Press. Berkeley 1993.
12. Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*. Portál, Praha 2001.