Role úloh ve vyučování matematice

František Kuřina

ABSTRACT: *Problem solving is very important part of mathematics education. In this paper I give 25 problems for students aged 15 – 18 years.*

1. ÚVOD

Řešení úloh je nezastupitelná složka každého vyučování matematice. Podle cílů, které úlohy ve vyučování mají hrát, rozlišujeme např.

1. Úlohy motivační (úlohy zajímavé svým tématem, řešením či výsledkem).
2. Úlohy, které umožňují hodnotit porozumění pojmům.
3. Úlohy, které rozvíjejí představivost (ne nutně geometrickou).
4. Úlohy, které rozvíjejí myšlení určitého typu.
5. Úlohy, které kultivují tvořivost.
6. Úlohy na procvičování pojmů.
7. Úlohy na zvládnutí studovaných algoritmů.
8. Úlohy aplikační.
9. Úlohy, které slouží k opakování učiva.
10. Úlohy kontrolní.

Uvedený seznam není přirozeně kompletní, ale především není seznamem klasifikačním. Úloha obvykle může být zařazena do několika oblastí.

2. SOUBOR ÚLOH

Soubor dvaceti pěti úloh, které vám předkládám, jistě z velké části znáte. S těmito úlohami jsem se seznámil během své pedagogické dráhy, některé jsem vytvořil. Doporučuji vám řešit tyto úlohy jako ilustraci myšlenky, že matematika je především *umění vidět, umění sestrojovat* a *umění dokazovat.* Omluvte zejména některé příliš „jednoduché“ úlohy. Kdo úlohu nezná a „nevidí do ní“, může ji hodnotit jinak. Některé úlohy mohou řešit i žáci základní školy, úroveň střední školy snad žádná úloha nepřesahuje.

1. Může být pro některé přirozené n číslo $n^2 + n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla? Tvrzení dokažte.
2. Sestrojte šest úseček tak, aby každá protínala právě tři ze zbývajících. Řešte úlohu pro osm a sedm úseček.
3. Sestrojte geometrické útvary U, V, které mají zároveň tyto tři vlastnosti:
   a) útvar U je částí útvaru V,
   b) útvar U je shodný s útvarem V,
   c) útvar V není části útvaru U.
4. Dokažte, že každé prvočíslo větší než 5 můžeme psát buď ve tvaru $6k + 1$ nebo $6k + 5$, kde k je přirozené číslo.
5. Nakreslete těleso, které vznikne otáčením obdélníku kolem jeho úhlopříčky.

6. Určete množinu všech bodů roviny, které jsou stejně vzdáleny od daných polopřímek *VA, VB*.
7. Načrtněte graf funkce $y = log\ sin\ x$ v intervalu $(0, \pi)$.
8. Určete složenou funkci $s = f \circ f$, kde f je dána předpisem $y = \sqrt{1 - x^2}$.
9. Dokažte: Je-li součet koeficientů a absolutního členu kvadratické rovnice roven nule, má tato rovnice aspoň jeden kořen rovný jedné.
10. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte množinu všech dvojic $[x, y]$ reálných čísel, pro něž platí

a) $|y| = sin\ x,$

b) $sin\ x\ .\ cos\ y \geq 0.$

11. Sestrojte pravidelný patnáctiúhelník.
12. Dokažte: Osa úhlu libovolného trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru stran přilehlých.
13. V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s odvěsnami *a, b* protíná osa pravoúhlého úhlu přeponu v bodě *D.* Vypočítejte délku úsečky *CD.*
14. Existuje hranol, který má shodné všechny stěny, ale nemá shodné všechny hrany?

Existuje hranol, který má shodné všechny hrany, ale nemá shodné všechny stěny?

15. Na ramenech *AB, BC* rovnoramenného trojúhelníku sestrojte po řadě body *X, Y* tak, aby úsečky *AX, XY* a *YC* byly shodné. Řešte úlohu i pro trojúhelník, který není rovnoramenný.
16. Sestrojte útvar, který je

a) osově souměrný, ale není středově souměrný,

b) středově souměrný, ale není osově souměrný,

b) má dva různé středy souměrnosti.

17. Je dán trojúhelník *ABC.* Sestrojte kružnice se středy ve vrcholech *A, B, C* tak, aby každé dvě měly vnější dotyk.
18. Rozdělte čtverec na 2002 čtverců.
19. Dokažte větu o průsečíku výšek trojúhelníku.
20. Ukažte, že existuje 10, (100, 1000, …) za sebou jdoucích přirozených čísel, která jsou všechna složená.
21. Existuje těleso, jehož sítí je daný rovnostranný trojúhelník? Úloha má nekonečně mnoho řešení.
22. Krychle je složena z 5 . 5 . 5 malých krychlí. Kolik z těchto malých krychlí můžeme odejmout, aniž by se změnil půdorys, nárys a bokorys?
23. Sestrojte mnohoúhelník, který má tuto vlastnost:

a) Z některého bodu jeho vnitřku není vidět žádnou jeho stranu celou.

b) Z některého bodu jeho vnějšku není vidět žádnou jeho stranu celou.

24. Vepište trojúhelníku obdélník, který má úhlopříčku dané délky.

25. Proč pro libovolná kladná čísla *a, b, c, d* platí

$$\tfrac{1}{4}\,(a + b + c + d) \geq \sqrt[4]{abcd}\ ?$$

Zhodnoťte soubor úloh, které jste řešili.

Příspěvek vznikl s částečnou podporou grantu GAČR 406/02/0829.