Analysisunterricht unter dem Lernziel „Mathematische Grundbildung“

Norbert Knoche

Abstract: *Das Konzept Entwicklung von „Mathematischer Grundbildung“ steht heute im Mittelpunkt der didaktischen Diskussion um Lernziele des Mathematikunterrichts. Dieser Begriff bildet auch die Grundlage der Konzeption internationaler Studien wie TIMSS und PISA. Charakterisiert wird dieser Begriff mit der Kompetenz, mathematisches Wissen ideenreich bei der Bearbeitung kontextbezogener Aufgaben einsetzen zu können. Folgt man den Ausführungen Freudenthals, auf den dieses Konzept zurückgeht, so bildet die Entwicklung begrifflichen Denkens die Grundlage dieses Konzepts. Darauf wird im ersten Teil des Vortrags eingegangen.*
Was bedeutet das für den Unterricht?
Dieser Frage widmet sich der dann folgende Abschnitt „Zugänge zu den Grundbegriffen der Analysis“. Dabei zeigt der Titel bereits an, dass exemplarisch der Analysisun-terricht betrachtet wird. Das Gesagte gilt aber für alle Schulstufen und Themenbereiche.

1.Einleitung

In der didaktischen Literatur gibt es eine permanente Diskussion über allgemeine Lernziele und Ausrichtungen des Mathematikunterrichts. In dieser Diskussion geht es letztlich immer um die Frage, eine *akzeptable Balance* zu finden zwischen der Vermittlung spezifischer Fertigkeiten und begrifflicher Vertiefung, zwischen Orientierung am Fach und Anwendungsorientierung. Die inhaltliche Beschreibung dieses Spannungsfeldes und die Suche nach einer Realisierung der *Balance* als Konzept des Mathematikunterrichts bildet den Hintergrund der folgenden Überlegungen. Das mit diesem Konzept verbundene Lernziel wird international mit dem Begriff “Mathematische Grundbildung“ belegt. Damit bringe ich einen Begriff in die Diskussion, der auch im Zentrum des Frameworks der beiden letzten großen internationalen Studien TIMSS und PISA stand. Diese Studien messen Leistung an “Mathematischer

Grundbildung“. Kompetenz besteht in diesem Konzept nicht nur aus der Kenntnis von Begriffen und Sätzen und der Beherrschung mathematischer Verfahren. Mathematische Kompetenz zeigt sich vielmehr im verständnisvollen *vernetzten* Einsatz der einzelnen Kompetenzen. Die Entwicklung der Fähigkeit, Fragestellungen so *strukturieren, modellieren* zu können, dass sie einer mathematischen Behandlung zugänglich werden, ist eine wesentliche Komponente mathematischer Grundbildung. Das erfordert eine integrative Sicht auf das Bearbeiten von Aufgaben. In den Bearbeitungsprozess gehen in der Regel nicht nur einzelne Kompetenzen ein.

Für den Unterricht selbst bedeutet das

- eine aspektreiche und vernetzte Entwicklung begrifflichen Denkens.
- die Förderung eines kreativen, inhaltlich nicht standardisierten Argumentierens
- den verständigen funktionalen Gebrauch von Mathematik selbst zum Gegenstand des Lernens zu machen.

Im Folgenden soll an Beispielen gezeigt werden, wie solche Forderungen im Unterricht realisiert werden können. Dabei konzentriere ich mich auf Beispiele aus dem Analysiscurriculum.

In den Mittelpunkt des Vortrags stelle ich das Thema

Die Entfaltung begrifflichen Denkens – Zugänge zu den Grundbegriffen der Analysis

2. Die Entfaltung begrifflichen Denkens

Inhaltliches, begriffliches Denken ist die Grundlage mathematischer Grundbildung. Es ist die Voraussetzung, um die genannten Forderungen an den Mathematikunterricht zu realisieren.

Das ist unmittelbar einsichtig bei Aufgabenstellungen, die in einen innermathema-tischen Kontext eingebunden sind. Zu beweisende Sätze enthalten Begriffe. Das Erfassen des Problems setzt also voraus, dass der Problemlöser überhaupt Vorstellungen und Kenntnisse über die auftretenden Begriffe hat.

Das gilt aber ebenso auch für in einem aussermathematischen Kontext gegebene Fragestellungen. Um sie einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, werden sie in einem Mathematisierungsprozess in einen innermathematischen Kontext transformiert. Dabei erfordert schon dieser Prozeß der Transformation des Problems in ein geeignetes mathematisches Modell, neben Kenntnissen im Bereich algorithmischer Verfahren (prozedurales Wissen) auch grundlegendes begriffliches , (konzeptuelles) Wissen.

Ist die Problemsituation soweit mathematisiert, dass dem Problemlöser bewusst ist, was zu zeigen ist, dann ist es notwendig, die Möglichkeiten zu erschließen, die in der Voraussetzung gegebenen sind. In der Regel handelt es sich dabei um die Aktivierung von Wissen über Eigenschaften der in der Voraussetzung genannten Begriffe. Häufig sind dann auch subtilere Kenntnisse erforderlich. Sie müssen durch Zwischenüberlegungen gewonnen werden. Dabei geht es im Grunde darum, Beziehungen zwischen den Eigenschaften von Begriffen aufzudecken bzw. Beziehungen zwischen Begriffen selbst zu finden .

Beziehungen zwischen Begriffen und ihren Eigenschaften dienen auch der Umstrukturierung von Problemsituationen. Gefordert ist hier die Fähigkeit, flexibel mit den einschlägigen Begriffen umgehen zu können, um so eventuell eine neue Sicht auf die Problemstellung zu gewinnen.
Begriffsbildungen dienen aber nicht nur der Lösung von Problemen. Sie selbst lösen Problemlöseprozesse aus. Es geht um die Erforschung von Eigenschaften des Begriffs.

3. Zugänge zu den Grundbegriffen der Analysis

Wir betrachten im Folgenden Zugänge zu den Grundbegriffen der Analysis vor dem Hintergrund der obigen Überlegungen.
„Aspektreiche und vernetzte Entwicklung begrifflichen Denkens“
„Entfaltung kreativer, inhaltlich nicht standardisierter Argumentationsfähigkeit“

3.1 Entwicklung von Begriffsbildungen und Vernetzung von Begriffen

Begriffslernen ist im Unterricht oft kein Neulernen sondern ein Umlernen, ein Erweitern und/oder auch Verengen bereits vorhandener Begriffe und ist damit vergleichbar auch der historischen Genese von Begriffsbildungen. Der Oberstufenunterricht, in dem neues Wissen häufig auf der Grundlage der Erkenntnisse der Mittelstufe erworben wird, bietet hier in besonderem Maße die Möglichkeit, Vernetzungen von Begriffen zu zeigen.Die beiden Begriffe ***Tangente*** und ***Flächeninhalt*** sollen als typische Beispiele dafür angesprochen werden .

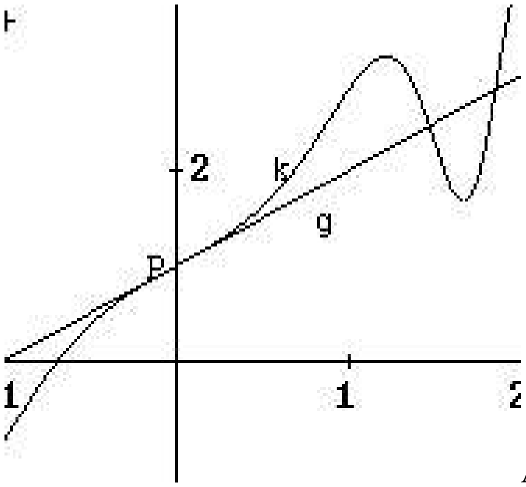

Abb.1

Der Begriff der **Tangente** ist ein in der Geometrie der Mittelstufe verankerter Begriff, dort entwickelt an der Kreistangente als einer Geraden, die den Kreis in genau einem Punkte berührt. Dieser Tangentenbegriff erfährt im Analysisunterricht sukzessive eine **Erweiterung**, bis schließlich auch die Gerade g in der nebenstehenden Abbildung als Tangente an die Kurve k im Punkte P bezeichnet wird.

Wählt man das Tangentenproblem – als geometrisches Problem- als Einstieg in die Behandlung des Differenzierbarkeitsbegriffs, d.h. zielt man auf eine geometrische Charakterisierung der Tangente ohne vorherige Klärung des Differenzierbarkeits-begriffs ab, so bietet sich ihre Definition über eine sich an den Graphen von f in $(x_0,f(x_0)$ „anschmiegende Gerade" oder den Funktionsgraphen in $(x_0,f(x_0))$„berührende Gerade" an. Die Mathematisierung dieses Begriffs kann in die folgende Definition einmünden.

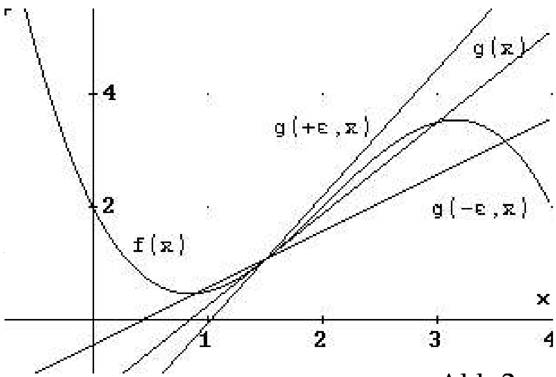

Abb.2

<u>Definition</u>: $g(x) = f(x_0)+m(x-x_0)$ berührt den Graphen von f in $(x_0,f(x_0))$, wenn es zu jedem Sektor mit den Randgeraden $g(+\varepsilon, x) =f(x_0) +(m+\varepsilon)(x-x_0)$ und $g(-\varepsilon, x) = f(x_0) + (m-\varepsilon) (x-x_0)$ eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so daß in der Umgebung der Graph von f ganz in dem Sektorraum verläuft

Die Charakterisierung von Funktionen, die in $(x_0 , f(x_0))$ eine berührende Gerade besitzen führt dann direkt zu der Aussage: f besitzt genau dann eine „berührende Gerade" in x_0, wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ *existiert und dieser Grenzwert ist dann gleich der Steigung der berührenden Geraden. Das folgt unmittelbar aus der Definition der berührenden Geraden. Danach gilt in jedem Sektor(für jedes $\varepsilon >0$)*

$$m-\varepsilon \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le m + \varepsilon .$$

Das ist ein bekannter Einstieg in die Differentialrechnung in einem **geometrischen, innermathematischen Kontext**. Das Ziel ist die Verbindung des Tangentenbegriffs in der Mittelstufestufe mit dem

verallgemeinerten Tangentenbegriff der Oberstufe. Dieser Zugang bringt aber auch schon den Differentialquotienten ins Spiel und zeigt den Zusammenhang.
Reicht das zur Entwicklung eines adäquaten Differenzierbarkeitsbegriffs?
Beispiele zeigen, dass sich bei der Entwicklung des **Differenzierbarkeitsbegriffs** zwei Grundvorstellungen unterscheiden lassen.
Die erste bezieht sich auf die “lokale Änderungsrate“ und ihre geometrische Veranschaulichung. Diese Grundvorstellung, dieser Aspekt wurde gerade angesprochen. Der zweite Aspekt beruht auf der Möglichkeit der “linearen Approximierbarkeit“ differenzierbarer Funktionen.
Beide Grundvorstellungen werden in Anwendungssituationen benötigt wie Beispiele zeigen.
Wir betrachten ein Beispiel, in dem je nach Fragestellung beide Aspekte angesprochen werden.
<u>Fragestellung</u> 1 Ein Skifahrer nimmt an einem Abfahrtsrennen teil und möchte sich vorher mit den Verhältnissen des Hanges vertraut machen. Ihm liegt ein Profil des Hangs entsprechend folgender Skizze vor. (gewonnen aus einer Approximierenden zu Höhenlinien) Eine entsprechende abschnittsweise definierte Funktion ist leicht zu erstellen.

<u>Fragestellung</u> 2 Ein Geländefahrzeug besitzt nach Angaben der Herstellerfirma eine maximale Steigfähigkeit von 30%. Zu untersuchen ist, ob das Fahrzeug einen Hügelrücken, dessen Profil in der folgenden Skizze angedeutet ist befahren kann.

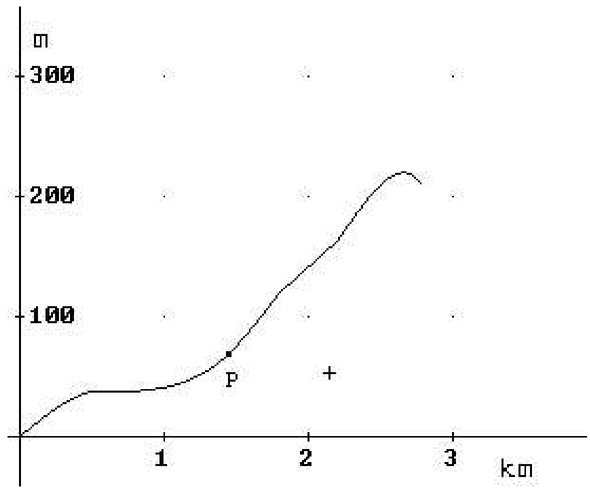

Abb. 3

Die Entwicklung des Begriffs des **Flächenintegrals** ist vergleichbar eine Erweiterung des Flächeninhaltsbegriffs der Mittelstufe. Bei der Entwicklung dieses Begriffs kann man das in der Mittelstufe erworbene

Wissen in die Überlegungen einbeziehen. Das Flächeninhaltsintegral lässt sich unmittelbar aus den aus der Sek I bekannten Eigenschaften von Flächeninhalten gewinnen. Dabei bleibt die Frage der Existenz des Flächeninhalts zunächst ausgeklammert.
Bezeichne I(F) den Flächeninhalt einer Figur F. Benötigt werden die folgenden Eigen-schaften:
1)$I(F) \geq 0$,
2)Sind F_1 und F_2 Figuren mit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, so $I(F_1 \cup F_2) = I(F_1) + I(F_2)$).
3)Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist $a \cdot b$
Dann folgt „Ist f: $[a,b] \rightarrow R$ stetig und dort nicht negativ, so ist $F_a(x)$ differenzierbar und
es ist $F_a'(x) = f(x)$." Dabei bezeichne $F_a(x)$ den als existent vorausgesetzten Flächeninhalt
der Ordinatenfläche von f über dem Intervall [a,x].
<u>Beweis</u>: Aus den obigen Voraussetzungen über das Flächeninhaltsmaß folgt
$f(s)\, h \leq F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leq f(t)\, h$, wenn f(t) das Maximum und f(s) das Minimum von f auf $[x_0, x_0+h]$ bezeichnet. Division durch h liefert $f(s) \leq \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(t)$. Für $h \rightarrow o$ streben s und t gegen x_0 und wegen der Stetigkeit von f dann f(s) und f(t) gegen $f(x_0)$.

Über das Stammfunktionsintegral lassen sich umgekehrt dann wieder die in der Mittelstufe entwickelten Flächeninhalte berechnen. Das Flächenintegral umfasst den klassischen geometrischen Flächeninhaltsbegriff.
Hier wird erkennbar, wie sich Aspekte verschiedener Begriffe gegenseitig bedingen. Der aufgezeigte Weg ist nur möglich, wenn der Differenzierbarkeitsbegriff nicht nur mit dem Tangentenbegriff sondern auch mit dem der lokalen Änderungsrate in Verbindung gebracht wurde.

Dieser Zugang zur Integralrechnung ist wieder nicht genuin in der Geometrie verankert. Es gibt eine Fülle von Problemen, deren Visualisierung auf die Berechnung von Flächeninhalten führen. *Typische Fragestellungen der Integralrechnung sind die Untersuchung von funktionalen Zusammenhängen zwischen Größen, wenn Änderungsraten der betreffenden Zusammenhänge gegeben sind.*
Reicht es dann nicht, die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung darzustellen? Die Fragestellungen, die notwendig die Entwicklung des Riemannintegrals fordern, liegen doch ausserhalb der Thematik des Unterrichts.

Beispiele zeigen, dass letztlich die enge Verbindung zwischen der Flächeninhaltsfunktion und dem Stammfunktionsintegral doch aufgebrochen werden muss. Der Flächeninhaltsaspekt und der Stammfunktionsaspekt sind zwei Grundvorstellungen des Integralbegriffs, die zueinander in Beziehung stehen aber auch ihre Eigenständigkeit haben.

Beziehungsnetze entstehen vielfach im Unterricht. *Behandelt werden proportionale und lineare Funktionen und dann nach der Behandlung quadratischer Funktionen Polynomfunktionen, weiter dann monotone Funktionen, beschränkte, stetige differenzierbare und integrierbare Funktionen. Ist eine Funktion linear, so monoton. Ist sie proportional, so linear, aber nicht jede lineare Funktion ist proportional. Ist eine Funktion stetig, so integrierbar aber nicht notwendig differenzierbar und eine integrierbare Funktion ist nicht notwendig stetig.*
Jede monotone beschränkte Funktion ist integrierbar, aber nicht jede beschränkte monotone Funktion ist stetig u.s.w.

3.4 Zum Verhältnis von inhaltlichem Verstehen und formalem Definieren

Die Diskussion um verschiedene Zugänge zu Begriffsdefinitionen wird auch unter anderen Fragestellungen geführt, die die obigen Betrachtungen nicht eigentlich tangieren. Dazu gehören:
--Welche Fassung der Definition ist aus technisch instrumenteller Sicht die geeignetere, d.h. welche Fassung ist z.B. aus beweistechnischen Erwägungen am zweckmäßigsten?
oder
--Welche Definition ist hinsichtlich der logischen Struktur die geeignetere?
Bei der Diskussion des Schwierigkeitsgrades eines Begriffs muß man unterscheiden zwischen dem in der „erkenntnistheoretischen Komponente" des Begriffs begründeten <u>lernpsychologischen</u> Problem, den in der „logischen Komplexität" der Begriffs-<u>definition</u> begründeten Schwierigkeiten und seinem Schwierigkeitsgrad in technisch instrumenteller Sicht, d.h. mit Blick auf seinen Einsatz beim Problemlösen.. Ergebnisse empirischer Studien, die im folgenden detailliert angesprochen werden, zeigen dass die in diesem Zusammenhang geführten Diskussionen teilweise insofern nicht in sich stimmig sind, als **Schwierigkeiten in erkenntnistheoretischer Sicht** begründet werden mit **Schwierigkeiten in technisch instrumenteller Sicht** nach dem Motto: „Wer die Definition eines Begriff verstanden hat, kann auch mit ihm arbeiten. Und umgekehrt: Wer nicht mit der Definition arbeiten kann, hat auch den Begriff nicht verstanden." Daß diese Argumentation nicht stichhaltig ist, haben wir in einer mehrjährigen Untersuchung zu den

Grundbegriffen der Analysis gezeigt. In dieser Untersuchung zeigte sich auch, dass Schüler bei Kenntnis verschiedener Definitionen (Fassungen) eines Begriffs durchaus in der Lage sind, je nach Kontext der Aufgabe auch verschiedene Fassungen einzusetzen

Literatur

H. Hischer, H. Scheid, Grundbegriffe der Analysis, Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht.1994 Spektrum- Akademischer Verlag, Heidelberg

N. Knoche, H. Wippermann, Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis.1986, Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien