

Propedeutika štruktúry a izomorfizmu štruktúr¹

Milan Hejný, Karlova Univerzita, Pedagogická fakulta, Praha

ABSTRACT: One of the most important problems in contemporary didactics of mathematics concerns the phenomenon of the formal (parrot like) pieces of knowledge which stay in the memory of an individual in isolation. The reverse of this is a structured piece of knowledge which is linked to other pieces of knowledge and to the life experiences of a child. The process of building mathematical structures using the idea of isomorphism is analysed in two particular contexts: the FAMILY structure which consists of concepts like mother, child, grandfather, uncle,... and the isomorphism of additive groups $f_{n/k}: (kZ, +) \rightarrow (nZ, +), kx \rightarrow nx$, presented to pupils in problems of the snake type.

1. Úvod

Závažným problémom súčasnej didaktiky matematiky je porozumenie príčin choroby formalizmu, choroby, ktorá priam epidemicky zasahuje matematické znalosti našich žiakov všetkých vekových kategórií, od prvej triedy až po univerzitu. Charakteristickým znakom formálneho poznatku je jeho *izolovanosť*. Formálny poznatok je nedostatočne prepojený ako na životné skúsenosti žiaka tak i na iné jeho príbuzné poznatky.

Zdravý, formalizmom neinfikovaný poznatok je organickou súčasťou celej poznatkovej štruktúry žiaka. Preto sa skúmanie fenoménu formalizmu zameriava aj na proces tvorby (matematických) štruktúr. Tento smer výskumu nadobúda na význame najmä v posledných rokoch. Tak napríklad na medzinárodnej konferencii CERME 2 v roku 2001 bola prvá dielňa - „Working group 1“ - venovaná práve tejto problematike. Spolu s autorom článku ju viedli Graham H. Littler a Pessia Tsamir. Z desiatich príspevkov, ktoré tu odzneli pochádzajú tri z pražskej školy. Tieto a ďalšie tri, ktoré sa nám javia ako veľmi závažné, sú na konci článku v literatúre označené hviezdíčkou.

Predložená štúdia je venovaná procesu tvorby dvoch štruktúr. Prvá, týkajúca sa rodinných vzťahov sa začína budovať už v predškolskom veku, druhá, týkajúca sa práce s malými číslami sa začína budovať na začiatku školskej dochádzky. Osobitný dôraz v našom bádani je položený na otázku príbuznosti a odlišnosti dvoch blízkych štruktúr. Štruktúrálnu rovnakosť v matematike

¹ Štúdia bola vypracovaná s podporou výskumného zámeru VZ J13/98/114100004 Kultivace matematického myšlení a vzdělanosti v evropské kultuře.

nazývame *izomorfizmus*. Aj my si tento termín požičiame, hoci naše chápanie tu bude trochu odlišné.

Ideovým východiskom našej štúdie je konštruktivizmus. Podrobne sú naše názory na tento myšlienkový prúd uvedené v práci Hejný, Kuřina (2001).

2. Naše chápanie pojmov „štruktúra“ a „izomorfizmus štruktúr“

Slovom *štruktúra* rozumieme súbor pojmov viazaných pavučinou väzieb. Matematika chápe štruktúru (grupy, reálnych čísel, rovinných izometrií,..) ako jav sveta kultúry, raz navždy presne vymedzený v múdrych knihách, nezávislý na vedomí konkrétneho človeka.

Didaktika matematiky chápe štruktúru skôr ako súčasť vedomia konkrétneho človeka, ako niečo dynamické, rodiace sa, rozvíjajúce sa, meniace sa. Inak povedané, matematika kladie štruktúru výlučne do tretieho sveta Karla Poppera². ale didaktika matematiky ju kladie predovšetkým do druhého Popperovho sveta.

Matematika je zameraná na skúmanie štruktúry samotnej, didaktika matematiky na to, ako sa táto štruktúra rodí, buduje, rozvíja a mení vo vedomí človeka, predovšetkým dieťaťa. Napríklad keď sa žiak piateho ročníka, ktorý má už bohaté predstavy o štruktúre prirodzených čísel začne dôvernejšie zoznamovať s rovnicami, nadobudne nové skúsenosti, ktoré obohatia a zmenia jeho predstavy o štruktúre čísel. Jednou z takých zmien je napríklad úplnejšie pochopenie pojmov zlomok a záporné číslo.

Vo vedomí dieťaťa v predškolskom veku sa rodí a buduje celá séria nematematických štruktúr, z ktorých väčšina sa rozvíja po celú dobu školskej dochádzky. Jedná sa napríklad o štruktúry časové, polohové, objektové, alebo vzťahové. Ide tu o *organizáciu* istého súboru navzájom príbuzných predstáv (pojmov, situácií, procesov,...).

Polohové štruktúry sa týkajú geometrických situácií. Napríklad rozmiestnenia nábytku v izbe, miestností v byte, chodníkov, ihrísk, domov, v okolí obydli dieťaťa ap. Neskôr budú tieto štruktúry rozšírené o poznávanie mesta, štátu, kontinentu, sveta, slnečnej sústavy i vesmíru. Priame poznávanie sa rozšíri o poznávanie sprostredkované pomocou schematických obrázkov, máp, cestopisov ap.

Časové štruktúry sa týkajú evidencie plynutia času dňa (ráno, obed, večer; neskôr k tomu pribudne poznávanie hodín), týždňa (pondelok, utorok, ..., nedeľa), roku (jaro, leto, jeseň, zima; neskôr tiež január, február, ..., december).

K objektovým štruktúram patrí poznávanie organizácie hračiek (rôznorodé ich triedenie), jedál, či zvierat.

Niektoré štruktúry sú bohatšie, iné chudobnejšie. Medzi tie, ktorých pavučina vzťahov je chudobnejšia patrí napríklad súbor farieb, medzi bohatšie organizované potom napríklad štruktúra hračiek. Asi najbohatšie organizovanou

² Myšlienku troch svetov na základe úvah Bertranda Bolzana rozpracoval a formuloval Karl R. Popper (pozri Popper 1995, s. 173): Univerzum v ktorom žijeme možno rozdeliť na *fyzikálny svet* vecí (prvý svet), *duševný svet* tvorený vedomiami ľudí (druhý svet) a *svet kultúry*, tvorený produktmi ľudského ducha (tretí svet). Podrobnejšie v Hejný, Kuřina (2001, s. 72)

štruktúrou, s ktorou sa dieťa už v predškolskom veku zoznamuje je vzťahová štruktúra rodinných väzieb. Bohatosť tejto štruktúry je daná najmä možnosťou skladania vzťahov.

Pri poznávaní štruktúr, ako konečne pri väčšine poznávacích procesov, rozhodujúcu úlohu hrá opakovanie. Človek sa s rovnakou situáciou stretáva opakovane. Niekedy je opakovanie celkom rovnaké, niekedy je variované. Napríklad skriňa či lampa na plafóne sú nemenné objekty, ale psík Gaštan, ktorý je členom domácnosti, je vnímaný mnohako: raz spí, inokedy žerie behá, hrá sa s loptou,... Stále je to ten istý Gaštan. Javy „spiaci Gaštan“ a „bežiaci Gaštan“ sú rôzne, ale čosi majú spoločné – práve to spoločné je „Gaštan“.

Dieťa, ktoré si všimne, že ihrisko na ktorom sa hráva a ihrisko na ktoré sa chodí hrať jeho kamarát sú „skoro rovnaké“ a začne o tejto rovnakosti/rôznosti uvažovať, začína budovať vo svojom vedomí predpoklady pre neskoršie porozumenie pojmu izomorfizmus.

Propedeutickú etapu budovania predstáv o štruktúre a izomorfizme začneme skúmať na štruktúre RODINA.

3. Štruktúra RODINA

Štruktúra rodinných vzťahov je prvá zložitá štruktúra, ktorú začína poznávať už dvojročné dieťa. Prvkami tejto štruktúry sú pojmy ako matka, otec, brat, sestra, babička, dedo, teta, strýc, bratranec, ap. (1)

Didaktické skúmanie tejto štruktúry, ktorú pomenujeme RODINA, začneme príbehom.

Príbeh 1. Skoro trojročný Janko príde za svojou maminkou s otázkou „Prečo má Eva (dievčatko od susedov) dve maminky?“ Matka je prekvapená a povie, že každý máme iba jednu maminku, že nikto nemá dve maminky, že Evina maminka je teta Lenka. Janko ale tvrdí, že počul, ako teta Lenka povedala Evinej babičke „maminka“. Jankova maminka sa zasmiala a chcela vysvetliť synkovi, že babička Evy je maminka tety Lenky. Keď matka videla chlapcove rozpaky, dodala: „Pozri, naša ružomerská babička je moja maminka a naša martinská babička je oteckova maminka“. Janko nič nevravel, ale bolo vidieť, že v jeho hlavičke došlo ku zmätku. Matka to cítila, ale jednak nevedela, ako to chlapcovi vysvetliť, jednak bola presvedčená že na to sám neskôr dôjde.

Analýza príbehu 1

Na uvedenom príbehu sú, z hľadiska didaktiky matematiky pozoruhodné dve skutočnosti: to, že si Janko všimol, že teta Lenka povedala Evinej babičke „maminka“ a neschopnosť pochopiť vysvetľovanie vlastnej matky.

Prvá skutočnosť poukazuje na to, že chlapec je v súčasnosti vnímavý na rodinné vzťahy. Z toho vyplýva, že vo vedomí Janka dochádza k reštrukturalizácii. Pôvodne chápal slová „mama“, „oco“, či „babička“ ako mená konkrétnych ľudí vo vlastnej rodine. Teraz si uvedomuje, že to nie sú iba konkrétni ľudia jednej rodiny, ale pozície členov každej rodiny. V každej rodine je iná mama, iný oco, iná babička. Môžeme povedať že sa Jankova predstava štruktúry RODINA mení: zo štádia *individuálneho* prechádza do štádia

inštitucionálneho. Slovo „mama“ neoznačuje individuálnu osobu, ale inštitúciu.

Druhá skutočnosť ukazuje, že Janko ešte nepozná vzťahový význam slova „mama“. Rodinu chápe ako pevnú štruktúru v ktorej je jedna a iba jedna osoba, ktorá je nazvaná „mama“. Jeho zážitok uvedenú tézu narušil a táto nová skúsenosť bude impulzom k ďalšej reštrukturalizácii. Povedie k posunu v chápaní slova „mama“ a ďalších slov (1). Namiesto inštitucionálneho chápanie nastúpi chápanie *vzťahové*. Označenie „Evína mama“ chápe teraz Janko v zmysle „mama v rodine Evy“. Budúce chápanie bude „osoba, ktorá je mamou Evy“.

Komentáre 1

- A. Proces objavovania štruktúry RODINA rozložíme do štyroch vývojových etáp. V každej z nich je predstava dieťaťa o význame slov (1) iná. Jednotlivé etapy pomenujeme a budeme ich bližšie charakterizovať pomocou predstavy, ktorú má dieťa o slovách (1). Etapa
- | | |
|--------------|--|
| individuálna | - slová (1) označujú konkrétnych ľudí v rodine dieťaťa |
| referenčná | - slová (1) označujú v každej rodine iných konkrétnych ľudí |
| vzťahová | - slová (1) označujú rodinný vzťah medzi dvoma ľuďmi |
| štruktúralná | - slová (1) sú relácie, ktoré možno skladať, tvoriť z nich nové pojmy. |
- B. V prvej etape dieťa poznáva iba členov vlastnej rodiny. Slova „mama“, „oco“, „dedo“, „babička“, resp. „martinská babička“,... sú mená konkrétnych osôb. Výnimkou môžu byť slová „brat“ a „sestra“ v tých prípadoch, keď má dieťa viacero bratov či sestier. Bežnejšie sa ale vo vlastnej rodine používa priamo meno dieťaťa, ako slovo „brat“ či „sestra“. Tie sa naopak používajú pri rozprávaní o iných rodinách. Preto sú tieto slová dobrým oknom do druhej etapy poznávania štruktúry RODINA.
- C. Druhá etapa začína poznaním, že v inej rodine slová (1) označujú iné osoby. Dieťa poznáva, že okrem Mamy (rozumej „moja mama“) existuje i „Evína mama“, „Radkova mama“, ap. Tak sa mení interpretácia slov (1). Už to nie sú mená konkrétnych osôb, ale mená rodinných inštitúcií³ nazeraných v *referenčnom rámci* vekovej kategórie dieťaťa.
- D. V rodinách sú obyčajne tri vekové kategórie, tri generácie: deti, rodičia a prarodičia. Z hľadiska referenčného rámca detí patrí slovo „mama“ do kategórie rodičov a iba sem.. Maminka patrí do kategórie rodičov a dcéra do kategórie detí, preto maminka nemôže byť dcérou. Podobne otec nemôže byť synom a babička nemôže byť maminkou – to by bolo proti referenčnému rámcu vekovej kategórie dieťaťa. Preto Janko nechápal, ako je možné, aby niekto z kategórie prarodičov patril i do kategórie rodičov
- E. Odpútanie sa od referenčného rámca vekových kategórií prebieha v tretej etape rozvoja pojmov (1). Asi najľahšie sa od referenčného rámca odpútava slovo „brat“ a „sestra“ z dôvodov uvedených vyššie. Len čo k tomuto posunu dôjde u všetkých pojmov (1), dospeje predstava štruktúry RODINA

³ V zhode s týmto termínom by sme celú etapu mohli nazvať aj *inštitucionálna etapa*.

vo vedomí dieťaťa do svojho „maturitného“ štádia. Naďalej sa bude obohacovať o ďalšie pojmy, ale podstata štruktúry je už dieťaťu jasná. Roztomilý poznatok o procese odpútavania sa od referenčného rámca mi poskytol môj vnuk. Rozprával som mu o svojom detstve a použil som vyjadrenie „môj oco, teda tvoj pradedo Vitko,...“. Vnuk svojho pradeda videl iba na fotografii, narodil sa až po jeho odchode. Keď vnuk príhodu interpretoval svojej tete, povedal „to bolo dávno, to bolo keď pradedo Vitko bol otcom“.

- F. Posledná, štvrtá etapa je venovaná rozvoju štruktúry RODINA. Ide o uvedenie si mnohých všeobecných zákonitostí platných vo všetkých konkrétnych rodinách, niekedy tiež o vymedzenie zložitejších rodinných vzťahov, akými sú napríklad pojmy „ujčína“ alebo „stryná“. Súčasná spoločnosť zriedka udržuje širšie rodinné klany a preto sú dnes už tieto slová, ktoré pred sto rokmi boli bežné, málo frekventované a pre väčšinu detí aj málo motivujúce. Väčší záujem prejavujú niektoré deti o poznávanie všeobecných zákonitostí typu „môj brat je synom môjho otca“. Do tejto etapy náleží aj porovnávanie štruktúry dvoch rodín – uvidíme to v príbehu 2.
- G. Uvedené štyri etapy nie sú ostro oddelené, ale všakovo sa prelínajú a nezriedka vo vývoji predstáv dochádza i k určitým návratom k etape nižšej. Opísaný proces tvorby štruktúry RODINA prispieva podľa nášho názoru významne k intelektuálnemu vývoji dieťaťa. Proces prebieha spontánne spočiatku na základe reálnych situácií v ktorých sa slová (1) používajú, neskôr tiež na základe imaginácie. Máme na mysli rozprávky, alebo príhody z detstva, ktoré rodič, prarodič, alebo iný dospelý človek rozpráva dieťaťu.
- H. Edukačne účinné sú hry v ktorých sa z bábik, plyšových medvedíkov a podobných hračiek utvorí rodina. Spočiatku malá – dcéra, syn, mama, otec – neskôr budú postupne pribúdať ďalší členovia rodiny. Podstatou hry nie je zostavovanie rodiny, ale imitácia bežných životných situácií ako „rodina ide do ZOO“, „maminka ide nakupovať“, „ujo Miro prišiel na návštevu“, „syn bol neposlušný“ ap. Naša skúsenosť hovorí, že
- a) táto hra je pre dievčatká prítlačlivá aj dlhodobo; v jednom našom dva mesiace trvajúcom pozorovaní hry babičky s tri a polročnou vnučkou sme evidovali ako dievčatko postupne rozširovalo svoju rodinu bábik až na počet jedenásť osôb a celkom presne si pamätalo ich mená aj rodinné zaradenie,
 - b) neevidovali sme žiaden prípad podobnej dlhodobej hry chlapca,
 - c) iniciatívu pri rozširovaní rodiny je rozumné zveriť dieťaťu; ono samo si najlepšie riadi tempo rozširovania,
 - d) pri hre si dieťa najprv modeluje štruktúru vlastnej rodiny a až neskôr ju začne obohacovať; noví členovia rodiny sú tvorení jednak na základe prianí dieťaťa (členom rodiny sa stane psík, alebo braček, ktorého si dieťa veľmi želá) jednak na základe nových skúseností (po návšteve divadelného predstavenia „O siedmych zhavranených bratoch“ moja dcérka rozšírila svoju modelovú rodinku o štyroch bratov – viacej vhodných hračiek sme vtedy napochytre nenašli; konečne počet nových bratov ju vtedy málo

zaujímal).

Ukončili sme úvahy o štruktúre RODINA. Pristúpme k analýze javu izomorfizmu.

4. Izomorfizmus dvoch štruktúr typu RODINA

Ukážeme ako dieťa objavuje izomorfizmus v prostredí štruktúr RODINA. Začnime príbehom.

Príbeh 2. Pán Pokorný rád debatuje so svojim osemročným synom Emilom o všeličom. Jeden taký rozhovor zahájil syn otázkou

Emil 1: Oco a vieš, že Ďurkova rodina je rovnaká ako naša?

Otec 1: Ako to myslíš Emil, že rovnaká?

E 2: No aj oni majú staršie dievča a mladšieho chlapca, aj my máme staršiu Radku. Ja mám dve babičky ale iba jedného deda, aj Ďurko to má tak.

O 2: No hej, ale Novákovci bývajú na prízemí a my bývame na treťom poschodí.

E 3: To sa neráta. Iba akože kto tam býva. Rozumieš?

O 3: No hej, to je zaujímavé. (Otec uvažuje, ako by k debate prispel.) Ale oni majú Veronu (psa) a my psa nemáme, máme iba kanárika.

E 4: (Po chvíľke) No hej. Nie sme celkom rovnakí. Ale skoro rovnakí.

O 4: Kebyže sa zvieratá nerátajú, tak sme rovnakí.

Analýza príbehu 2

Na uvedenom príbehu je pozoruhodných päť skutočností: Emilov záujem o porovnávanie dvoch rodín, jeho odmietnutie javu „poschodie na ktorom rodina býva“, jeho zvažovanie toho, či zvieratá sú súčasťou rodiny, jeho akceptovanie vekového rozdielu súrodencov a konečne neevidovanie toho, že dedo v jednej rodine môže byť z matkinej a v druhej z otcovej strany.

Emil objavuje (asi svoj prvý) separovaný model *izomorfizmu*. Možno si už skôr všimol rovnakosti či rôznosti rozloženia miestností v rôznych bytoch, rovnakosti/rôznosti radenia aut na rôznych parkoviskách, rovnakosti/rôznosti rozloženia lavíc v rôznych triedach, ap. Teraz ho ale zaujala štruktúrna rovnakosť dvoch rodín. Bezprostrednú príčinu nepoznáme a je dosť možné, že záujem vznikol spontánne v dôsledku intelektuálneho rozvoja chlapca. Podstatné je, že ho jav izomorfizmu oslovil a on o ňom chce rozprávať s otcom.

Otcova námietka – rôzne poschodia, na ktorých rodiny bývajú - bola dobrou reakciou na synovu výzvu. Viedla k uvedomeniu si potreby presnejšie vymedziť oblasť, ktorej sa táto rovnakosť týka. Druhá otcova námietka bola ešte účinnejšia, pretože Emil nemal v tejto veci ihneď jasno. Jeho riešenie je ale veľmi presné. Zvieratá nevyklučuje z úvahy okamžite, pripúšťa, že aj tie by bolo možné do pojmu „rodina“ zahrnúť, ale ich vylúčenie je nutné, aby objavená rovnakosť rodín platila. Dodajme, že existovalo ešte ďalšie riešenie otcovej námietky. Stačilo, aby Emil odmietol špecifikovať o aké zvieratko ide a ako člena rodiny prijať pojem „zvieratá“. To ale neodpovedá mysleniu osemročného dieťaťa.

Posledné dve pozoruhodnosti ukazujú, že v Emilových predstavách o rodine ešte silno pretrváva referenčný rámec. Chlapec všetko vzťahuje ku generácii detí. Preto je pre neho dôležitý nielen počet a pohlavie detí, ale aj ich vzájomné vekové radenie. O vekovom rozdiely chlapec neuvažuje ani v generácii rodičov, ani v generácii prarodičov. Rovnako aj inštitúcia „dedo“ je vnímaná iba cez prizma dieťaťa. O vzájomných vzťahoch medzi inými členmi rodiny Emil neuvažuje. Práve debata o rovnakosti rodín môže neskôr chlapca do viesť k týmto hlbším pohľadom.

Položme si otázku: v ktorej etape rozvoja štruktúry RODINA sa Emil nachádza? Na jednej strane je Emilovi jasné, že pojmy (1) označujú vzťahy, nie inštitúcie. Z toho vyplýva, že Emil je už vo vzťahovej (tretej) etape. Dokonca uvažuje už o porovnávaní dvoch rodín a to je myšlienka náležiacia do štrukturálnej (štvrtej) etapy. Na druhej strane však chlapec pri porovnávaní rodín nevníma generáciu rodičov a prarodičov tak celistvo ako vníma generáciu detí. Neuvažuje o rodičovskej väzbe medzi generáciou prarodičov a rodičov. Nevyváženosť tohto pohľadu ukazuje, že v chlapcových predstavách ešte pretrváva etapa druhá. Podrobná analýza opísaného javu, ktorý pracovne pomenujeme *fenomén vývojového návratu* nás dovedie k závažnému poznaniu. Jemu venujeme pozornosť v komentároch.

Komentáre 2

- A. Diskutovaný jav *vývojového návratu* sa týka dlhodobého poznávacieho procesu, ktorý možno rozložiť do časovej postupnosti etáp E1, E2, E3, ... Každá nasledujúca etapa tu predstavuje poznanie hlbšie, abstraktnejšie, či komplexnejšie ako etapa predchádzajúca. Opis javu: žiak, ktorý je schopný uvažovať na úrovni vyššej etapy, nevyužije tieto vedomosti a rieši predložený problém v myšlienkovom rámci etapy nižšej.
- B. Uvedieme dve ilustrácie opísaného javu. Obe sa vzťahujú ku štruktúre celých čísel
1. Na sústredení olympionikov kategórie B riešili účastníci úlohu: „Súčin niekoľkých po sebe idúcich celých čísel je 24; nájdite tie čísla“. Iba dvaja z dvadsiatich žiakov našli aj „záporné“ riešenie $(-4)(-3)(-2)(-1) = 24$. Pritom dva dni predtým, ako neuspeli s touto úlohou všetci bez problémov a rýchlo vyriešili úlohu podobnú: „Súčet deviatich po sebe idúcich celých čísel je 9. Nájdite tie čísla“.
 2. V poslednom kole XXII. ročníka MO v ZSSR riešili žiaci deviateho ročníka rovnicu $(1 + 1/m)^{m+1} = (1 + 1/1988)^{1988}$. Iba 40% z týchto matematicky výnimočne zdatných žiakov našlo jediné riešenie rovnice: $m = -1989$ (pozri *Математика в школе, 5, Педагогика, Москва, 1988*).
- C. V oboch prípadoch sa jedná o dlhodobý poznávací proces štruktúry čísel. Jeho prvá etapa začína poznávaním malých a neskôr i viacmiestnych prirodzených čísel. V ďalších etapách sa objavia zlomky, desatinné čísla a záporné čísla. Žiaci, ktorí riešili uvedené dve úlohy záporné čísla aj

základné operácie s nimi dobre poznali. Napriek tomu pri riešení týchto úloh si na záporné čísla nespomenuli. Úlohy riešili v rámci prirodzených resp. kladných reálnych čísel, teda vo vývojovej etape skoršej, odpovedajúcej žiakovi piateho ročníka. Pýtajme sa, prečo?

- D. Príčinou všetkých troch opísaných návratov k nižším vývojovým etapám je podľa nášho presvedčenia náročnosť riešenej úlohy. Domnievame sa totiž, že práca s abstraktnejšími predstavami je energeticky náročnejšia ako práca s jednoduchšími predstavami. Ak teda človek rieši náročnú úlohu, potrebuje veľa intelektuálnej energie na uchopenie úlohy a hľadanie riešiteľskej stratégie. Potrebnú energiu získa tým, že nevyužije najvyššiu etapu svojho poznania príslušnej „teórie“ a pracuje v etape nižšej, energeticky menej náročnej. Pritom táto metastratégia je nevedomá. Keď je žiak upozornený na možnosť pracovať v etape vyššej, uvedomí si túto potrebu a má pocit, ktorý vnútornou rečou môžeme charakterizovať slovami „no veď samozrejme, celkom som na to zabudol“.
- E. Okrem piatich diskutovaných pozoruhodností evidovaných v analýze rozhovoru, je tu ešte jeden jav, ktorý zasluhuje osobitnú pozornosť. V Emilovom objave izomorfizmu nachádzame dve zložky, ktoré objav izomorfizmu charakterizujú: zložku prirad'ovaciú a zložku organizačnú.
- F. Zložka *prirad'ovacia* sa týka párovania prvkov porovnávaných štruktúr: každý prvok jednej štruktúry je spojený s jedným prvkom druhej štruktúry. V uvedenej ilustrácii má rodina Novákovcov (**N**) aj rodina Pokorných (**P**) sedem členov a tí sú si navzájom priradení prirodzeným spôsobom: („N“ čítame „z rodiny Novákov“, „P“ čítame „z rodiny Pokorných“)

dcéra N ↔ dcéra svn N ↔ svn P	otec N ↔ P otec mama N ↔ mama P	m-babička N ↔ m-babička o-babička N ↔ o-babička dedo N ↔ dedo P
----------------------------------	------------------------------------	---

Tu m-babičkou rozumieme matku matky a o-babičkou matku otca.

- G. Zložka *organizačná* sa týka usporiadania prvkov v každej z porovnávaných štruktúr. V prípade uvažovaných štruktúr je táto zložka reprezentovaná vzťahmi typu „dedo má manželku“, „jedna babička nemá manžela“, „maminka má dve deti“, „otcova maminka má dve vnúčence“, „otcova dcéra má mladšieho brata“ atd.
- H. Obe zložky izomorfizmu, prirad'ovanie i organizácia sú navzájom prepojené takto:

osoby rodiny **N** možno jednoznačne priradiť k osobám rodiny **P** tak, že pre ľubovoľné , dva páry navzájom si priradených prvkov $N_1 \leftrightarrow P_1$ a $N_2 \leftrightarrow P_2$ platí, že väzba medzi N_1 a N_2 vnútri **N** je rovnaká ako väzba medzi P_1 a P_2 vnútri **P**.

Výrok v rámku možno považovať za intuitívnu definíciu pojmu izomorfizmus dvoch štruktúr typu RODINA. Podobný vzťah možno popísať

i u ďalších štruktúr

- I. Štruktúra RODINA je najbohatšia štruktúra, ktorú dieťa poznáva v predškolskom veku. Jej bohatosť nie je daná počtom prvkov, ale možnosťou ich vzájomného skladania. Tak je možné charakterizovať napríklad vzdialenejších členov rodiny (syn otcovej tety), alebo evidovať identity (môj brat = syn mojej mamy), ako sme uviedli už v komentári 1F. Schopnosť dieťaťa skladať relácie (1) je najlepší diagnostický nástroj na posúdenie kvality tejto štruktúry uloženej vo vedomí konkrétneho dieťaťa.
- J. Keby sme rodiny posudzovali iba podľa počtu jej členov v generácii detí (označme to číslo d), v generácii rodičov (označme r) a v generácii prarodičov (označme p), bude pre obe uvažované rodiny $d = 2, r = 2, p = 3$. Rovnakú číselnú charakteristiku má aj rodina {chlapec, chlapec, mama, otec, m-dedo, o-dedo, m-babička}. Uvažovanie o týchto charakteristikách je propedeutikou pojmu *homomorfizmus*. Je to zobrazenie z množiny osôb konkrétnej rodiny do množiny $\{D, R, P\}$, ktoré každé dieťa rodiny zobrazí na prvok D , každého rodiča na prvok R a každého prarodiča na prvok P .
- K. Treba upozorniť, že diskutovať o štruktúre RODINA v triede, môže byť pre dieťa, ktoré žije iba s maminkou, alebo ktorého rodičia sa rozvádajú, traumatizujúce. Preto je vhodnejšie zvoliť k takej diskusii kúsok genealogického stromu niektorého panovníka, alebo známej osobnosti, prípadne vymyslenej, rozprávkovej rodiny.
- L. Záverom dovoľte osobnú spomienku na nedávno zosnulého Prof. Jána Gatiala, ktorého žičlivé priateľstvo ma obohacovalo po mnoho rokov.

V dobe politického odmäku druhej polovice šesťdesiatych rokov dohovoril kolega Gatial s redakciou mládežníckeho časopisu Prúd, že na stránkach časopisu budeme viesť matematickú súťaž Hľadáme fiškusa. Jedna z úloh súťaže sa týkala štruktúry RODINA. Bola uverejnená v čísle 7 časopisu Prúd, z roku 1968. Tu je jej plné znenie.

„Do redakcie prišlo asi sedemročné dievčatko a predstavilo sa nám takto:
Volám sa Zuzka a poviem vám básničku

Dcéra tety Jána Zicha
Volá sa dnes Eva Tichá.
Otec Jána Zicha veru
Nemá, ani nemal dcéru.
Švagor otca mojej matky
Deduškom je malej Katky.

Okrem toho, čo prezradila Zuzka, oznámime vám, že v básničke je priamo menovaných nie viac ako 7 osôb. Menovaní sú napríklad Ján Zich, teta Jána Zicha, Zuzkina matka, otec Zuzkinej matky. Kvôli jasnosti ešte uvedieme, že ‚teta‘ je ‚sestra niektorého z rodičov‘, ‚švagor‘ je ‚buď brat manželky, alebo manžel sestry‘ a ‚deduško‘ je ‚otec jedného z rodičov‘.

Vašou úlohou je

1. Uviesť plné mená Zuzky i Katky

2. Zdôvodniť riešenie.

Pri riešení úlohy predpokladáme splnené všetky bežné vzťahy v rodine. Tak napríklad manželka po svadbe berie priezvisko manželovo, ktoré neskoršie dostanú všetky ich deti. Do manželstva vstupujú dvaja ľudia predtým nijako pokrýve neviazaní.“

Ďalšie ilustrácie pojmu izomorfizmus budú už zo školského prostredia.

5. Násobenie ako izomorfizmus

Izomorfizmus abelových grúp $f_2: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +), x \rightarrow 2x$, v ktorom je každému číslu priradený jeho dvojnásobok, sa objaví napríklad keď idú deti zo škôlky v dvojstupe. Ak sa stretnú dve škôlky z ktorých jedna má 5 a druhá 6 dvojstupov, bude mať po ich prípadnom spojení nový útvar 11 dvojstupov. Celkový počet detí potom je $2(5+6)$, alebo tiež $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$, lebo 5 + 6 dvojíc je to isté čo 5 dvojíc + 6 dvojíc. Výsledok je vždy 22. Uvedená skúsenosť pripravuje pochopenie distributívneho zákona aj izomorfizmu f_2 , lebo $f_2(5+6) = f_2(5) + f_2(6)$.

Zovšeobecnením izomorfizmu f_2 je izomorfizmus

$f_{n/k}: (k\mathbb{Z}, +) \rightarrow (n\mathbb{Z}, +), kx \rightarrow nx$, kde k, n, x sú celé, k, n nenulové.

Dva špeciálne prípady tohto izomorfizmu používajú žiaci často. Sú to navzájom inverzné izomorfizmy $f_{1/0}$ (pripísanie nuly) a $f_{1/10}$ (škrtnutie nuly)⁴. Uvedme ilustráciu.

Nasledujúci protokol vznikol pri skúmaní javu *odumieranie sémantického ukotvenia čísel vo vedomí žiaka*. Pojem osvetlíme ďalej v komentári 3 A.

Príbeh 3. Pavol, žiak druhého ročníku, mal sčítať $40 + 30$. Okamžite povedal výsledok 70.

Experimentátor 1: Skvele, ako to tak rýchlo vieš zrátať?

Pavol 1: To je jednoduché, to sčítam iba tri a štyri.

E 2: Iba tri a štyri? Ozaj, veď to je sedem a ty si povedal sedemdesiat.

P 2: Ešte tam treba pripísať nulu.

E 3: K tým siedmym? Ako aby bolo sedemdesiat?

P 3: Áno, tak.

E 4: No a kebyže mám sčítať štyridsaťjeden a tridsaťjeden (píše na papier $41 + 31$), tak to

môžem tiež tak, že sčítam (ukazuje) štyri a tri je sedem a pripíšem jedničku (píše 71)

P 4: (chvíľu mlčí, potom oponuje). To sa tak nedá. to je sedemdesiatdva.

E 5: A prečo sa to nedá?

P 5: To by bolo zle. (pauza) Ale kebyže je to štyridsaťjeden a tridsať, tak sa to dá. To je potom

sedemdesiatjeden.

E 6: A vieš prečo je to tak?

⁴ Je zrejmé, že inverzný k izomorfizmu $f_{n/k}$ je izomorfizmus $f_{n/k}^{-1} = f_{k/n}$

P 6: Tak to vychádza.

E 7: A keby si mal vysvetliť Irenke (Pavlova sestra, prváčka) prečo je štyri a tri sedem, ako by si to urobil?

P 7: Ona to už vie. Ale iba na prstoch.

E 8: A keby sme ten výpočet štyridsať plus tridsať robili na počítadle. Vyšlo by sedemdesiat?

P 8: Vyšlo, ale to by bolo veľa práce. Takto je to rýchlo.

Analýza príbehu 3

Napriek veľkému úsiliu sa experimentátorovi nepodarilo zistiť do akej miery má chlapec svoj výpočet ukotvený v predstavách a do akej miery je to manipulácia s číslami podľa pravidla, ktoré si asi sám odvodil.

Keby napríklad v poslednom vstupe Pavol povedal „na počítadle by sme najprv oddelili štyri celé rady guliek a potom ešte tri rady a bolo by to sedem rád“, vedeli by sme, že jeho výpočet sprevádzajú aj sémantické predstavy. Vstup P 8 naznačuje, že taký postup sa vo vedomí Pavla neobjavil. Na druhej strane chlapcove vstupy P 4 a najmä potom P 5 ukazujú, že jeho poznanie o pravidle s nulou nie je formálne, že ho nedrží v pamäti ako izolovaný poznatok, ale má ho prepojený na poznatky ďalšie.

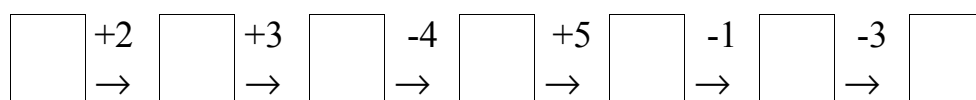
Komentáre 3

- A. Vysvetlíme, čo rozumieme termínom *odumieranie sémantického ukotvenia čísel vo vedomí žiaka*. Žiak prvej triedy rieši úlohu $4 + 5 = ?$ pomocou prstov, guliek počítadla či iných predmetov. Jeho predstavy operácie sú opreté o životnú skúsenosť, majú teda sémantické ukotvenie. Žiak piatej triedy pri násobení/delení desatinného čísla číslom 10 používa pravidlo o posúvaní desatinnej čiarky vpravo/vľavo a nevie, prečo to tak funguje. Podobných pravidiel, ktorých zmysel nechápe, používa žiak mnoho. Pravidlá nemá opreté o konkrétne predstavy a skúsenosti. Znalosti, ktoré mali spočiatku sémantické ukotvenie, postupom rokov toto ukotvenie strácajú. Jedna z prvých operácií, na ktorej sa jav sémantického odumierania dá skúmať, je sčítanie a odčítanie dvojmiestnych čísel končiacich nulou.
- B. Pavlov postup možno opísať takto: súčet $40 + 30$ izomorfizmom $f_{1/10}$ prevedie na súčet $4 + 3$ a jeho výsledok 7 inverzným izomorfizmom f_{10} prevedie späť na hľadané číslo 70. Samozrejme Pavol netuší, že pri riešení použil izomorfizmus. Napriek tomu na úrovni poznania v činnosti nadobúda skúsenosť, že niektoré úlohy sa dajú riešiť tak, že sa prevedú do iného jazyka, inej situácie, alebo iného kontextu. Táto skúsenosť je dobrým základom pre pochopenie zmyslu izomorfizmu. Konečne v matematike je uvedené stratégie prítomná v mnohých myšlienkach (prenos geometrického problému na aritmetický pomocou súradníc, prenos diferenciálnej rovnice na algebraickú pomocou operátorového počtu,...).
- C. V uvedenom kontexte sa myšlienka izomorfizmu neukladá do skúseností

žiaka dostatočne intenzívne, pretože je tlmená inou myšlienkou, ktorá v kontexte sčítania dvojmiestnych čísiel bude ďaleko dominantnejšou – prechod cez desiatku. Konečne už vstup P 5 to jasne naznačil. Preto, ak chceme doviesť žiaka k plnšiemu vnímaniu myšlienky izomorfizmu, musíme hľadať také problémové situácie, v ktorých idea izomorfizmu hrá prvoradú rolu. Sú to napríklad situácie, kde istý výpočet uskutoční žiak najskôr v kZ a potom v nZ. Keď sa taká korešpondencia opakuje, žiaci sami objavujú, že výpočty netreba opakovať, že stačí preniesť výsledok pomocou odhalenej príbuznosti. Jednu takú situáciu opíšeme podrobnejšie.

6. Problémová situácia HAD

Úlohy typu „had“ sú bežne používané a známe. Preto sa obmedzíme iba na zavedenie stručnej symboliky. Stačí vysvetliť ju na príklade. Zápis *had* [+2; +3; -4; +5; -1; -3] označuje schému



Analogicky zápis *had* [+7; x3; :2] označuje schému so štyrmi prázdnyimi okienkami medzi ktorými sú tri šípky – operátory: prvá šípka je „pričítanie 7“, druhá „násobenie tromi“ a tretia je „delenie dvoma“. Jednoduchý *had* [x 1,35] s dvoma okienkami a jedinou šípkou je vlastne do kontextu hadov prenesené „násobenie číslom 1,35“.

Príbeh 4 (Tretia trieda. Záznam najzávažnejších momentov hodiny, ktorú učiteľka hodnotila ako výnimočne vydarenú. Natešená dodala, že ešte pred mesiacom boli žiaci pri odhaľovaní zákonitostí ukrytých v hadoch dosť pomalí a málo nápadití. „Teraz to bola akoby iná trieda“.)

Učiteľka napísala na tabuľu horného hada a vyzvala žiakov aby ho riešili pre čísla

$$3, 4, 11, 27, 35 \text{ a } 86. \quad (2)$$

Tie napísala do rámika na tabuľi. Žiaci začali okamžite riešiť a už po prvých dvoch výpočtoch ($3 \rightarrow 5$, $4 \rightarrow 6$) niektorí volali, že číslo na výstupe je o 2 väčšie ako číslo na vstupe. Skoro všetci rýchlo dopisovali celé riešenie úlohy: $11 \rightarrow 13$, $27 \rightarrow 29$, $35 \rightarrow 37$, $86 \rightarrow 88$.

Učiteľka pochválila všetkých objaviteľov a meno prvého z nich napísala na tabuľu:

$$\text{objav Lacka:} \quad \text{výstup} = \text{vstup} + 2$$

(3)

Silno motivované deti sa pretekali, aby sa pochválili svojimi (nie vždy pravdivými) objavmi.

Ivica: „Najväčšie číslo je v piatom okienku“.

Peter: „V treťom okienku je súčet prvého a druhého okienka“.

Milka: „Posledné číslo je párne, alebo nepárne“.

Ondrej: „Číslo v treťom okienku je rovnaké ako v šiestom“.

Učiteľka pre každý objav vytvorila dostatočný časový priestor na odozvu spolužiakov. Elena komentovala Petrov objav: „mne to nevychádza“ a potom i Peter povedal že je to pravda iba pre vstupné číslo 3. Milkin „objav“ nevyvolal žiadnu reakciu. Ďalší objav učiteľka vyzdvihla tým, že ho napísala na tabuľu:

objav Svatky: Číslo v druhom okienku je rovnaké ako v poslednom.

Lojzo zvolaním „to je objav!“ vyjadril veľký obdiv i potešenie z objavu Svatky. Väčšina detí s tým súhlasila. Erika to osvetlila: „Svatka to nájde v hadovi, netreba si nič pamätať“.

Učiteľka zvislou čiarou oddelila popísanú ľavú časť tabule a povedala „teraz budeme pre tieto čísla (ukázala na čísla (2)) riešiť ťažšieho hada. *Hada* [+20; +30; -40; +50; -10; -30]. napísala na pravú časť tabule. Už v priebehu písania hada Jana videla príbuznosť oboch hadov a povedala, že „stačí pridať nuly“. Rudo ešte skôr ako bol had dopísaný kričal „z čísla 3 bude 50“. Po chvíli ale Edo kričal, že to bude 23. Žiaci sa postupne pridávali k Edovi a Svatka zvolala, že aj tu je druhé okienko rovnaké ako posledné. Viacero detí potom oznamovalo, že aj tu je to podľa Svatky, niektorí tiež že treba pričítať dvadsať. Učiteľka šípkou naznačila, že objav Svatky platí aj pre druhého hada a pod druhého hada, bez udania mena objaviteľa, napísala

$$\text{výstup} = \text{vstup} + 20 \quad (4)$$

Potom povedala: „Do vstupného okienka si vložte číslo 33 a zistíte, v ktorom okienku bude najväčšie číslo?“ Žiaci sa pustili do práce a po chvíli Ivica ohlásil „aj tu v piatom, vždy v piatom“. Hada mala dopočítaného iba do štvrtého okienka, ale svoje riešenie vysvetlila: „teraz pôjdem o päťdesiat nahor a potom už iba nadol. Aj tam to tak bolo“ dodala.

K poslednej epizóde učiteľka dodala, že ju dala zámerne, aby sa Ivicinmu objavu dostalo viac pozornosti.

Analýza príbehu 4

Záznam dokumentuje vysoko kvalitnú pedagogickú prácu učiteľky, ktorej prístup je dôsledne konštruktivistický: triede predkladá iba úlohy a objavovanie prenecháva žiakom. Aj keď učiteľka sama hodinu hodnotila ako výnimočne vydarenú, bola aktivita a vynaliezavosť detí, ich schopnosť formulovať vlastné myšlienky a reagovať na objav spolužiaka výnimočná.

Žiacke objavy pri prvom hadovi môžeme rozdeliť do dvoch skupín. Do prvej patria zistenia typu „Najväčšie číslo je v piatom okienku“, ktoré síce nedávajú návod na riešenie úlohy, ale pomáhajú skúmať prostredie hada a môžu sa prípadne hodiť pri niektorej ďalšej úlohe. Do druhej potom nápady, ktoré urýchlia výpočet. Sem patria objavy Lacka a Svatky.

Je zaujímavé, že Lojzovi i ďalším deťom sa objav Svatky páčil viac, ako Lackov priamy návod na výpočet. Erikino vysvetlenie tejto skutočnosti sa nám javí veľmi presné. Návod (3) cítia deti ako inštrukciu, objav Svatky ako organickú časť hada. To že deti húfne uprednostnia vzhľad do situácie pred pamäťovou inštrukciou svedčí o ich zdravom matematickom rozvoji. Žiaľ vo

ôsmom ročníku býva také chovanie triedy dosť zriedkavé. Tam žiaci uprednostnia inštrukciu. Často krát myšlienku celkom odmietajú a dožadujú sa návodu.

Vzťah oboch hadov objavili deti okamžite. Hneď začali prenášať aj zákonitosti z prvého hada na druhého. Myšlienka „zabudnutie a dopísanie nuly“, ktorá v príbehu 3 izomorfizmus iba naznačila, sa tentoraz ukazuje v ostrom svetle. V schéme hada totiž vystupujú dva typy čísel: *operátory* – čísla nad šípkami a *základné čísla* – čísla v okienkach. Čísla v okienkach sú pasívne a na nich pracujú aktívne operátory. Izomorfizmus hadov sa týka iba operátorov, nie však základných čísel. Práve táto rozdielnosť robí myšlienku izomorfizmu ostro viditeľnou. Konečne omyl, ktorého sa Rudo dopustil, to pekne ukazuje. Jeho chybná hypotéza, že „všetko čo bolo v prvom hadovi bude v druhom s pripísanou nulou“ je poučná pre lepšie porozumenie toho, čo je to izomorfizmus. Ukazuje, že izomorfizmus sa týka iba hada ako štruktúry.

Komentáre 4

- A. Deti v predškolskom veku majú málo rozvinutú schopnosť objavovať vzťahy. Konečne videli sme to na pomalom budovaní štruktúry RODINA. K tomu, aby behom dva a pol roku školskej dochádzky nadobudli takú úroveň schopnosti vnímať akú ukazuje náš príbeh, je potrebná dlhodobá systematická, náročná, ale radostná práca učiteľa.
- B. Asi najnáročnejšia požiadavka, ktorú na učiteľa kladie konštruktivistický spôsob vyučovania je trpezlivosť. Niekedy trvá žiakom celé mesiace, kým urobia zdanlivo maličký krôčik vo svojich objavoch. Učiteľ je pod stálym nutkaním trochu im pomôcť, trochu ich myslenie postrčiť. Ak sa mu podarí toto nutkanie prekonať, budú konečné výsledky jeho práce veľmi dobré. Namiesto toho, aby učiteľ žiakom prezradil novú myšlienku, môže použiť dve iné činnosti: dať žiakom návodnú úlohu a posmeľovať tých, čo sa vzdávajú.
- C. V komentári 2 E sme hovorili o dvoch zložkách charakterizujúcich objav izomorfizmu. Obe zložky nachádzame i v príbehu 4. Priradovaciu zložku objavila Jana veľmi rýchlo. Organizačnú zložku objavovali všetci tí žiaci, ktorí si všimli že niektoré zákonitosti platia pre oboch hadov. Napríklad Ivicin poznatok, že v oboch hadoch je najväčšie číslo daného výpočtu vždy piatok okienku.
- D. Kľúčom k rýchlemu riešeniu druhého hada je buď inštrukcia (3), ktorá z inštrukcie (2) vznikne priradením, alebo objav Svatky, ktorý je založený na rovnakej organizácii oboch hadov. Videli sme, že deťom je bližší tento druhý spôsob riešenia druhého hada.
- E. V našom experimentálnom vyučovaní sme úlohy o hadoch začali dávať žiakom až v piatok ročníku. Ako didakticky účinná sa ukázala nasledujúca súťaž. Žiakom som nadiktoval dobre premysleného hada (napríklad hada [+23, -19, +16, +13, -29, +6], ktorý má 7 okienok A, B, C, D, E F a G a 6 šípkok). Nasledujúci deň som na tabuľu napísal tri úlohy typu: keď do okienka F napíšeme číslo 83, čo bude v okienku C? ($83 \rightarrow F, ? \rightarrow C$).

F. Neskôr sme pracovali i s hadmi v ktorých boli aj operácie násobenia a delenia. V siedmom ročníku sa žiaci dopracovali k poznaniu, že pre každého had existuje pravidlo typu
výstup = $A \times \text{vstup} + B$, čo je de facto had $[\times A, +B]$. Tu A a B sú racionálne čísla.

V článku sme ukázali, ako je možné obohacovať skúsenosti žiakov s izomorfizmom $f_{n/k}: (k\mathbb{Z}, +) \rightarrow (n\mathbb{Z}, +)$, $kx \rightarrow nx$, pomocou problémovej situácie „had“. Ďalšie vhodné oblasti pre tento rozvoj sú napríklad sčítacie trojuholníky (pyramídy), alebo úlohy o prelievaní, rôzne kombinatorické situácie, ap.

Literatúra

Bolzano, B.: Vědosloví. Praha, Academia 1981.

Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika, Praha, Portál, 2001

Hejný, M.: Štrukturovanie matematických vedomostí, in: Burjan, V., Hejný, M.

Jány, Š. (eds): Zborník príspevkov z letnej školy Pytagoras, JSMF, Exam, Bratislava 2001, s. 13-24

*Hejný, M.: Creating mathematical structure, CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 14-24

Hiele van P., M.: Structure and Insight. Orlando, Academic Press, 1986.

*Kratochvílová, J.: Building the infinite arithmetical structure, CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 25-34

Popper, K., R.: Věčné hledání. Praha, Vesmír 1995.

*Schwarz, B., Hershkowitz, R., Dreyfus, T.: Emerging knowledge structures in and with algebra, CERME 2, Charles University Prague, 2001, s.81-90

*Stehlíková, N., Jirotková, D.: Building a finite algebraic structure, CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 101-111

*Tsamir, P.: Intuitive structures: The case of comparisons of infinite sets, CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 112-121