

Teória čísel v príprave učiteľa matematiky

Matúš Harminc

ABSTRACT: Some facts and considerations about the number theory lectures and exams in the preparing of teachers of mathematics are presented.

1. ÚVOD

Na Prírodovedeckej fakulte Univerzity P. J. Šafárika sa pripravujú budúci učelia matematiky, informatiky, chémie, biológie a geografie, ale aj jednodoborovo neučiteľsky zameraní študenti väčšiny z týchto predmetov. Po zhruba pätnástich rokoch vedenia seminárov, neskôr prednášok, ako aj skúšania teórie čísel, ktorá je do učebných plánov zaradená ako voliteľná výučba, ponúkame niektoré svoje skúsenosti a videnie dnešného stavu tohto predmetu. Napokon uvádzame úvahy o ďalšom možnom živote tohto predmetu. Tento príspevok môže slúžiť na porovnanie iným vysokoškolským učiteľom a to aj keď sú zameraní na inú časť matematiky. Obrátene, privítame s vďakou na uvedenej elektronickej adrese akékoľvek poznámky k textu či k téme príspevku.

2. OBSAH A FORMA

Venujme najprv pozornosť formám výučby. Odkúšali sme dva štandardné typy, a to seminárne referáty a klasické prednášky. Prvý z nich začal tým, že na prvom stretnutí vyučujúci pridelil po prípadnej dohode študentom alebo dvojiciam študentov jednotlivé tematické celky. Úlohou študentov bolo naštudovať tento materiál, odborne a metodicky si ho pripraviť a zreferovať, ako aj zvládnuť učivo pridelené iným študentom na základe vypočítaných referátov. Tento spôsob je náročný na čas vyučujúceho, pretože musí vhodne vybrať a rozdeliť učivo, musí byť pripravený konzultovať pred referátom jeho obsah so študentmi a podľa potreby po odznení referátu vyhodnotiť jeho úspešnosť. Nevýhodou tohto spôsobu je aj orientácia študentov na jeden pridelený celok. Zvládnuť tento spôsob výučby s efektívnym výsledkom je možné len ak počet zúčastnených študentov je malý.

Na ukážku uvádzame niekoľko tém referátov, ktoré boli u nás ponúknuté na realizáciu v letnom semestri školského roka 1987/88:

lineárne kongruencie,
kanonický rozklad faktoriálov prirodzených čísel,

Eulerova funkcia φ ,
dokonalé čísla a dokonalé čísla druhého druhu,
iracionalita niektorých reálnych čísel,
prvočíselná funkcia $\pi(x)$.

Niektoré z týchto ale aj z ďalších tu neuvedených ponúknutých tém boli široko formulované a boli rozdelené medzi viacerých referujúcich študentov, prípadne z nich bol urobený len výber, alebo len prehľad.

Pokiaľ ide o hodnotenie, bola táto výučba uzatváraná udeľovaním zápočtov podľa pravidla: uskutočnený referát – získaný zápočet, neuskutočnený referát – neudelený zápočet. S tým vznikali problémy náhradných kritérií pre získanie zápočtu zo závažných príčin (neprítomnosť zo zdravotných dôvodov a podobne). Zrušením jestvovania zápočtov podľa nového tzv. vysokoškolského zákona sa tento spôsob hodnotenia práce stal nemožný.

Druhá forma výučby teórie čísel, s ktorou máme skúsenosti, je klasická výkladová prednáška, obsahujúca nielen definície, tvrdenia, ich dôkazy a dôsledky, ale aj motivácie, úlohy a ich riešenia, historické poznámky, vzájomné súvislosti a metaúvahy. Obsah teórie čísel, ako predmetu v štúdiu na vysokej škole, pripravujúcej budúcich učiteľov základných a stredných školách, je pomerne ustálený. Určuje ho častosť používania pojmov a vlastností čísel v praxi, je chápaný ako určitý nadhľad nad učivom, ktoré budú študenti vyučovať. Ovplyvňujú ho aj potreby iných predmetov, napríklad algebry. Zahŕňa aj kapitoly súvisiace s Matematickou olympiádou a inými matematickými súťažami. Vplyv na výber obsahu majú aj časové obmedzenia, teda rozsah výučby, jej členenie či zaradenie do kontextu ostatného štúdia.

V nasledujúcich riadkoch uvádzame obsah prednášok z teórie čísel, tak ako sa väčšinou uskutočňujú už po niekoľko minulých školských rokov v rozsahu dvoch hodín týždenne počas dvoch trinásťtýždňových semestrov prerušených súvislou praxou trvajúcou štyri, respektíve šesť týždňov.

Prvá časť

Deliteľnosť v množine celých čísel
Delenie so zvyškom
Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok
Nesúdeliteľné čísla
Prvočísla a zložené čísla
Základná veta aritmetiky
Kanonický rozklad, jeho použitie
Dokonalé čísla prvého a druhého druhu
Kongruencie na množine celých čísel
Zvyškové triedy celých čísel
Jednoznačnosť zápisu v pozičných sústavách
Kritéria deliteľnosti
Riešenie lineárnych kongruencií
Multiplikatívne funkcie, Möbiova funkcia
Eulerova funkcia, Eulerova veta
Lagrangeova veta, Wilsonova veta

Druhá časť:

Sústavy lineárnych kongruencií
Čínska veta o zvyškoch
Kvadratické kongruencie

Kvadratické zvyšky a nezvyšky
 Legendreov symbol
 Gaussova lema, jej dôsledky
 Jacobiho symbol
 Zákony reciprocity, ich použitie
 Lineárne diofantické rovnice
 Nelineárne diofantické rovnice
 Pytagorova rovnica
 Metóda rekurzívnych vzorcov

Oprávnenosť tohto výberu by bolo možné dokumentovať aj porovnaním s obsahom teórie čísel na učiteľských fakultách iných domácich a zahraničných – ako európskych, tak mimoeurópskych – univerzít a s obsahom učebníc a učebných textov vydaných pre túto potrebu.

3. SKÚŠANIE A HODNOTENIE

Preverovanie vedomostí sa do istého času dialo písomne aj ústne. Písomne bolo potrebné vyriešiť štyri až päť úloh a ústne odpovedať na dve otázky. Úlohami sme sa snažili pokryť jednak čo najväčší obsah, jednak sme ich zostavovali tak, aby boli rôzne náročné, od algoritmických až po úlohy na úrovni Matematickej olympiády. Otázky ústnej časti boli koncipované tak, že kým jedna preverovala pochopenie detailov, druhá žiadala systémový prístup, zaradenie do kontextu a nadhľad.

Pretože počet záujemcov, ktorí si zvolili ako nepovinný predmet práve teóriu čísel rástol a časové ani personálne kapacity vyučujúcich nie, pristúpili sme v súlade s trendmi smerujúcimi k odosobneniu skúšania a v súlade s možnosťami nášho skúšobného poriadku (ktorý je možné nájsť na adrese http://www.science.upjs.sk/Slov/studium/index_studium.html) k zrušeniu ústnej časti preverovania vedomostí. Takmer zároveň u nás bola zavedená širšia hodnotiacia škála:

- A – výborne (vynikajúce výsledky),
- B – veľmi dobre (nadpriemerné výsledky),
- C – dobre (priemerné výsledky),
- D – uspokojivo (prijateľné výsledky),
- E – dostatočne (výsledky splňajú minimálne kritériá),
- F – nedostatočne (vyžaduje sa ďalšia práca).

Nárast potreby skúšania a zväčšenie hodnotovej škály boli tými dvoma skutočnosťami, ktoré nás priviedli k tomu, že dnes skúšame teóriu čísel len písomne. Počas intervalu 60 – 80 minút je potrebné písomne vypracovať test, v ktorom je každá správna odpoveď bez ohľadu na náročnosť otázky či úlohy oceňovaná jedným bodom. V prípade pochybností a za predpokladu, že je priložený postup úvah riešiteľa, je možnosť ohodnotenia aj polovicou bodu. Za nedostatočný výkon sa považuje zisk menej než štyroch bodov z prvých ôsmich úloh. Úspešne absolvuje skúšku ten študent, ktorý v teste získa aspoň štyri body z prvých ôsmich úloh. Celkový súčet potom podľa nasledujúcej schémy odpovedá známke, ktorá je študentovi navrhnutá za jeho výkon:

- menej než 4 body z prvých ôsmich úloh F
- 4 body alebo 4½ bodu z prvých ôsmich úloh E

5 bodov alebo 5½ bodu z prvých ôsmich úloh	D
6 bodov alebo 6" bodu z prvých ôsmich úloh	C
6 bodov alebo 6" bodu z prvých ôsmich úloh a deviata úloha	B
7 bodov z prvých ôsmich úloh	B
7 bodov alebo 7" bodu z prvých ôsmich úloh a deviata úloha	A
8 bodov z prvých ôsmich úloh	A

Úlohy sú vyberané z dostupných zdrojov, ale zväčša šité na mieru, to znamená tvorené pre potreby preverenia vedomostí látky. Deviata úloha má dôkazový charakter a je akousi poistkou pre lepších študentov, aby aj v prípade nejakého omylu v prvých ôsmich úlohách mohli získať na prvý pokus hodnotenie A – výborne, alebo B – veľmi dobre. Na ukážku uvádzame jeden takýto test, ktorý je zameraný na prvú časť (od základných pojmov ako je deliteľnosť celých čísel, po vety o kongruentných číslach Eulera, Fermata, Lagrangea a Wilsona). Výsledky a odpovede uvedené v hranatých zátvorkách v teste samozrejme nie sú; majú slúžiť pre predstavu, aké asi očakávame odpovede (v 5. a v 7. sú neúplne odpovede, očakávame viac).

Test z prvej časti:

1. Prepíšte zo šestnástkovej sústavy do sústavy so základom 10 číslo FAB_{16} .
[$FAB_{16} = 4011_{10}$.]
2. Pre ktoré prvočíslo p je $2 [\varphi(1000) + \varphi(3000)] = p \cdot \varphi(2000)$?
[Pre $p = 3$.]
3. Vyriešte kongruenciu $18x \equiv 6 \pmod{2002}$.
[$x \in 334_{2002} \cup 1335_{2002}$.]
4. Aká je posledná nenulová cifra čísla $(10!)^{10}$?
[Je to štvorka.]
5. Uved'te vlastnosti Möbiovej funkcie μ .
[Je multiplikatívna, obor hodnôt je $\{0, 1, -1\}$, pre $n > 1$ je $\sum \mu(d) = 0$ (sčítané cez všetky kladné delitele d čísla n), a ďalšie.]
6. Definujte prvočíslo a zložené číslo.
[Prvočíslo (zložené číslo) je prirodzené číslo väčšie než jedna, ktoré má iba triviálne (má aj netriviálne) delitele.]
7. Napíšte kritériá deliteľnosti číslami 7 a 11.
[Číslo 11 delí číslo s desiatkovým ciferným zápisom $c_n \dots c_1 c_0$ práve vtedy, keď delí číslo $c_0 - c_1 + \dots + (-1)^n c_n$.]
8. Doplňte tvrdenie: Nech $n \in \mathbb{N}$, nech $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ a nech p je prvočíslo, ktoré nie je deliteľom čísla a_n . Potom kongruencia ...
[$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$ nemá viac než n riešení nekongruentných modulo p .]
9. Rozhodnite, či platí: Ak $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$ a číslo $a^2 + b^2$ je deliteľné siedmimi, tak súčin $a \cdot b$ je násobkom čísla 49. Svoje rozhodnutie dokážte.

[Áno, platí. Z tabuľky pre $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}_7$ vidieť, že $x^2 + y^2 = 0_7$, len vtedy, keď $x = 0_7$ aj $y = 0_7$; teda 49 delí súčin $a \cdot b$ len ak $\{a, b\} = \{0_7\}$.]

4. ZÁVER

Záujem našich študentov absolvovať teóriu čísel je motivovaný rôzne, ide o tzv. ľahší predmet, hodí sa im z viacerých dôvodov, aj keď jeho dotácia kreditmi nie je nijako výrazná. U študentov učiteľského štúdia je tento záujem umocnený množstvom výskytu úloh z teórie čísel v matematických súťažiach pre základné a stredné školy a v korešpondenčných seminároch z matematiky. Teóriu čísel si však vyberajú ako vhodný doplnok štúdia aj študenti matematiky a študenti informatiky. Ich potreby, súvisiace napríklad s ochranou údajov alebo bezpečnosťou prenosu osobných dát verejnou sieťou, jednoznačne ukazujú dlh našej fakulty voči ich odborom práve v predmete teória čísel. Je otázkou času, v akom rozsahu a v akej forme sa zaradia do programu štúdia vo väčšej miere poznatky teória čísel. Veľkú úlohu pri tejto zmene isto zohrá možnosť čerpať z verejných elektronických médií a využívať pri výučbe nové informačné a komunikačné technológie. Naš názor je taký, že by to mal byť povinná výučba hneď v prvom semestri vysokoškolského štúdia v rozsahu dvoch hodín prednášok s aspoň jednou hodinou cvičení týždenne.

Na záver uvádzame všetku nám známu literatúru, ktorá sa týka matematického obsahu prvej a druhej časti našich prednášok a je písaná slovensky, alebo česky. Pri lepšom zahľadení sa na ňu zistíme, že s výnimkou dvoch učebníc, ktoré sa teórii čísel venujú len čiastočne, nová študijná literatúra na trhu takmer nie je. Je však možné, že ani nebude potrebná? Nahradia ju úplne iné zdroje informácií?

Literatúra:

- Birkhoff, G.-MacLane, S.: *Prehľad modernej algebry*, Bratislava-Praha 1979.
Davydov, U. S.-Znám, Š.: *Teória čísel*, Bratislava 1972.
Harminc, M.: *Teória čísel*, Košice 1999 (skriptá).
Kolibiar, M. a kolektív: *Algebra a príbuné disciplíny*, Bratislava 1991.
Rychlík, K.: *Úvod do eklementárni číselné theorie*, Praha 1950.
Šalát, T.: *Vybrané kapitoly z elementárnej teórie čísel*, Bratislava 1964.
Šalát, T. a kolektív: *Algebra a teoretická aritmetika*, Bratislava-Praha 1986.
Vinogradov, I. M.: *Základy theorie čísel*, Praha 1953.
Znám, Š.: *Teória čísel*, Bratislava 1977.

Doc. RNDr. Matúš Harminc, CSc., ÚMV PF UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice
harminc@science.upjs.sk