

Možnosť využitia problémového vyučovania pri limitných procesoch

Ján Gunčaga

Abstract: This time in Slovakia a transmissive type of teaching is very widespread. In this type it is typical that students learn accomplished facts, algorithms, formulas and so on. For constructivist type of teaching it is typical that students are more active in the teaching process. The teacher had a position of a presenter who presents and guides the discussion. Limit processes are very abstract subject for most students. Most teachers teach this subject as a collection of definitions, propositions and proofs without suitable models in it, which can prepare students for this subject.

1. Úvod

Limitné procesy sa v školskej matematike preberajú obvykle počas 4. ročníka gymnázia. Nepatria medzi najobľúbenejšie časti školskej matematiky, pretože sú pomerne náročné na pochopenie. Jednak je to spôsobené tým, že definície pojmov obsahujú veľa kvantifikátorov a ďalej je dosť rozšíreným javom, že tieto procesy sú študentom predkladané ako súbor poučiek, definícií, viet a dôkazov. Je to dôsledok rozšíreného transmisívneho vyučovania. V súčasnosti sa v modernej teórii vyučovania matematiky prejavuje trend konštruktivistického vyučovania, ktoré kladie väčší dôraz na samostatnosť a aktivitu študenta pri získavaní nových poznatkov.

V dňoch 8 až 15. januára 2002 som mal možnosť zúčastniť sa kurzu v rámci programu Socrates Comenius CZ-01-2001-02 *Empowering Mathematics Teachers for the Improvement of School Mathematics*. V tomto článku by som chcel predstaviť niektoré zaujímavé výsledky, ktoré som získal počas projektu realizovaného v rámci modulu A tohto kurzu, ktorý viedol profesor Graham Littler z Univerzity v Derby (Veľká Británia).

2. Experiment

Tento experiment som realizoval v skupine študentiek učiteľstva pre 1. stupeň ZŠ. Študentkám boli zadané problémové úlohy, ktoré riešili samostatne. Potom prebiehala diskusia k daným problémom.

Problémy boli nasledovné:

Problém č. 1 Keď vystrelím šíp smerom k cieľu, ten musí preletieť najprv polovicu vzdialenosti medzi mnou a cieľom, potom polovicu z tej zvyšnej polovice čiže štvrtinu, potom osminu atď. Preto šíp nikdy nedoletí do cieľa. Mal Zenón pravdu?

Problém č. 2 Achilles bežal opreteký s korytnačkou. Dal jej náskok 100 metrov. Achilles beží 10 krát rýchlejšie, preto keď prebehne 100 metrov, korytnačka sa posunie o 10 metrov. Ak prejde ďalších 10 metrov, korytnačka prejde 1 meter atď. Preto Achilles korytnačku nikdy nedobehne. Mal Zenón pravdu?

Problém č. 3 Vydělil som $1 : 3 = 0,333333$ na kalkulačke. Potom som vynásobil a dostal som $0,333333 \times 3 = 0,999999$. Je $0,999999 = 1$? Keď $x = 1:3$, je potom $3x = 1$? Čo vieme povedať o čísle x ? Je $0,999999 \dots = 1$? Prečo?

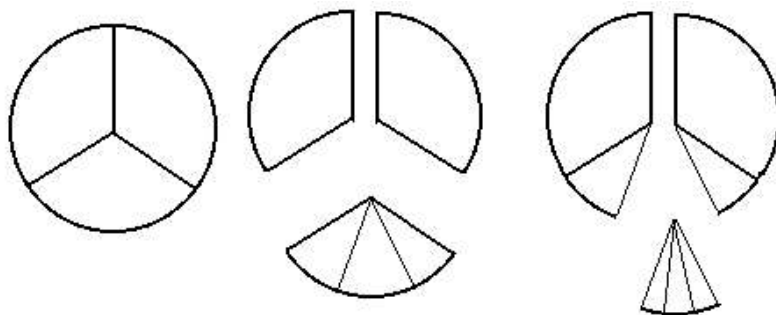
Existujú aj kalkulačky ktoré vypočítajú $0,333333 \times 3 = 1$. Sú tieto kalkulačky lepšie?

Problém č. 4 Mám tabličku čokolády. Najprv som rozdelil čokoládu na polovice a daroval jednu polovicu. Potom som daroval jednu štvrtinu, jednu osminu atď. Ako dlho môžem darovať týmto spôsobom kúsok čokolády?

Problém č. 5 (nadväzoval na problém č. 4) Ukázali sme, že

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 \quad \text{Koľko je} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots ?$$

Je to možné ukázať geometricky:

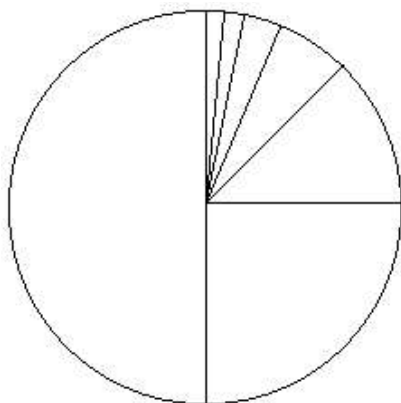


3. Výsledky experimentu

Problém č. 1

Pre niektorých študentov sa javila Zenónova argumentácia ako logicky protirečivá, pre ďalších študentov bolo podstatné to, akou veľkou silou je vystrelený šíp. Domnievali sa, že ak tá sila je malá, tak ten šíp do cieľa nadoletí a v tomto prípade má Zenón pravdu. Jedna študentka veľmi presne argumentovala, že ak by sme prijali Zenónov spôsob uvažovania, tak by sa nikto nemohol presunúť z jedného miesta na druhé. Keďže názory študentov boli rôzne, pokúsili sme sa úlohu matematizovať tým, že sme si zvolili vzdialenosť k terču 10 metrov. Tu vyvstal problém s výpočtom radu

$5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \dots$. Niektorí študenti tvrdili, že je to presne 10, iní, že je to len približne 10. Jedna študentka si pri vysvetľovaní prečo je to presne 10 pomohla aj nasledovnou geometrickou schémou:



Keďže ani tento argument študentov s opačným názorom nesprevedčil, bolo potrebné odvodiť súčet tohto radu pomocou limity čiastočných súčtov.

Problém č. 2

Všetci študenti boli síce presvedčení o tom, že Achilles korytnačku dobehne avšak ich zdôvodnenia boli rôzne. Najväčšia časť študentov argumentovala väčšou fyzickou silou Achilla. Niektorí vychádzali aj z predchádzajúceho problému, že ak šíp doletí do terča, tak potom aj Achilles musí dobehnúť korytnačku.

Jedna študentka podala zaujímavé vysvetlenie: Ak by celá dráha Achilla merala 1000 metrov, tak dráha korytnačky bude 900 metrov. Nech rýchlosť korytnačky je 1 m.s^{-1} . Potom rýchlosť Achilla je 10 m.s^{-1} . Ak vychádzame zo vzťahu $\text{dráha} = \text{rýchlosť} \times \text{čas}$, tak potom by Achilles prešiel svoju dráhu za 100 s a korytnačka za 900 s, a tak Achilles predbehne korytnačku.

Nakoniec pomocou súčtu nekonečného radu určili študenti dráhu, za ktorú prejde Achilles, kým dobehne korytnačku.

Problém č. 3

Dve tretiny študentov sa domnievalo, že kalkulačka, ktorá dáva výsledok 1 je lepšia a jedna tretina mala opačný názor. Podobne ako v probléme č. 1 bol medzi študentami spor, či číslo $0,\bar{9}$ je približne alebo presne 1. Keďže tento problém súvisel s pojmom racionálneho čísla a jeho zápisom vo forme desatinného čísla, využili sme príklad čísla $\frac{1}{3}$. Tu však u jednej študentky došlo k zaujímavej úvahe:

$$\frac{1}{3} = 0,\bar{3} \quad \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \quad 0,\bar{3} \cdot 3 = 0,\bar{9}. \text{ Ale } 0,\bar{3} \neq \frac{1}{3}, \text{ lebo } 0,\bar{3} \cdot 3 = 0,\bar{9} \text{ a } 0,\bar{9} \neq 1.$$

Táto chybná úvaha poukázala na to, ako je dôležité chápanie pojmu racionálne číslo z hľadiska limitného procesu. Je potrebné, aby študenti poznali skutočnosť, že každé racionálne číslo je súčtom nejakého nekonečného radu. Preto sme pokračovali nasledovne: Ak $5342 = 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$, potom $0,\bar{9} = 9 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,01 + 9 \cdot 0,001 + \dots = 0,9 \cdot (1 + 0,1$

$$+ 0,01 + 0,001 + \dots) = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

Problém č. 4

Tento problém, ktorý zvykne byť častým motivačným príkladom v učebniciach matematiky pre pojem súčet nekonečného radu, sa javil väčšine študentov ako príliš „akademický“. Väčšinou mali výhrady k „technickej realizácii“ takéhoto delenia čokolády a preto zaznievali aj otázky typu „Ako môže niekto jesť $\frac{1}{8192}$ čokolády?“ Tento problém bol skôr potrebný pre odvodenie vzťahu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ ktorý bol použitý}$$

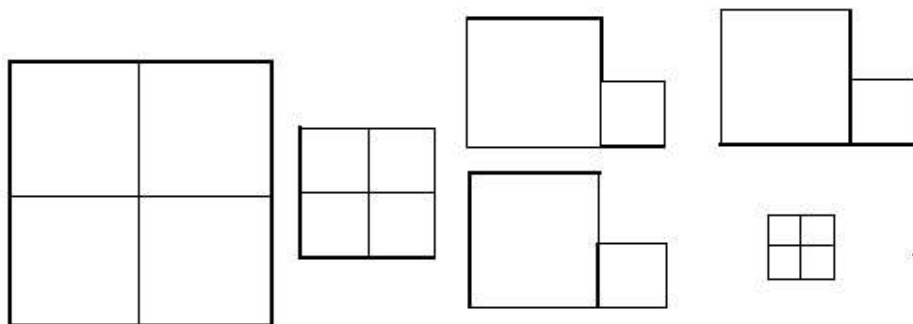
v nasledujúcom probléme.

Problém č. 5

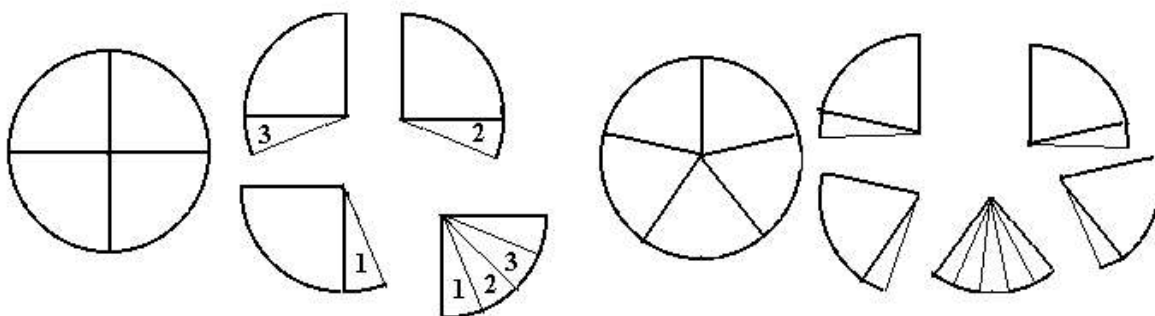
V tomto probléme išlo hlavne na ukávanie možnej geometrickej interpretácii pojmu súčet nekonečného radu, na ktorú sa často zabúda. Študenti sa snažili najprv nájsť vzťah pre $q = 4, 5$ a potom vzťah zovšeobecniť. Nebolo cieľom tejto úlohy nájsť presný matematický dôkaz.

Bolo zaujímavé, že polovica študentov využila pri riešení model štvorca alebo obdĺžnika:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$



Druhá polovica študentov zostala pri modeli kruh:



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots = \frac{1}{4}$$

Nájsť vzťah $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \dots =$ vedela tretina študentov.

Záver

Spomínané problémy sú len malou ukážkou toho, ako možno využiť problémové vyučovanie pri zavedení pojmov limitných procesov. Súčasťou experimentu bola aj anketa, v ktorej mohli študenti napísať svoje postrehy k vyučovaniu. Viacerým študentkám nevyhovovala koncentrovaná podoba vyučovania a uprednostnili by, keby sa jednotlivé problémy riešili postupne v rámci väčšieho počtu vyučovacích hodín. Experiment totiž pozostával zo 6 problémov a bol realizovaný v rámci 4 vyučovacích hodín.

Viac informácií a zaujímavých problémov k propedeutike limitných procesov možno nájsť aj v [1].

Literatúra:

- [1] Eisenmann, P.: Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu ve výuce matematiky na střední škole I, II, III, IV, Matematika, Fyzika, Informatika, 1997, č.7, č.8, č.9, č.10 (řada čtyř článků), Praha, Prometheus
- [2] Hejný M., Kuřina F.: Dítě, škola a matematika. Praha, Portál 2001
- [3] Fulier J.: Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy. Nitra, UKF 2001
- [4] Hejný M., Michalcová A.: Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Bratislava, MC 2001
- [5] Gavora P.: Úvod do pedagogického výskumu. Bratislava, UK 2001