O potrzebie doskonalenia dydaktyki.
(na podstawie problemów nauczania algebry liniowej)

Danuta Drygała

ABSTRACT: *This paper shows difficulties and errors with understanding conception dimension of linear space by the first year maths students of Pedagogical University. The analysis was formed on the basis of the practical activities while making out specific mathematical problems. The results of disrespect mentioned above difficulties for development mathematical consciousness among students, was discussed in the article. The way to prevent occurrence mistakes and methods to overcome difficulties was suggested in this paper.*

Matematyka, jako dziedzina wiedzy, za lat dwadzieścia różnić się będzie od dzisiejszej pewnie niewiele. Oczywiście – sformułowane i udowodnione zostaną nowe teorie, rozwiązane zostaną niektóre, dzisiaj jeszcze nierozwiązywalne problemy szczegółowe. Natomiast en bloc matematyka pozostanie instrumentem opisu i interpretacji rzeczywistości.

Zmieniać się będzie natomiast sama rzeczywistość – i ten fakt z konieczności wymaga stałego przekształcania zarówno stosunku do matematyki (wymiar i zakres nauczania matematyki, zawartość programowa właściwa dla określonych poziomów nauczania) jak i konkretnych metod wdrażania wiedzy matematycznej – również na wielu poziomach: ucznia, studenta, nauczyciela.

Dzisiejsze różnice w stosunku do matematyki różnych dziedzin wiedzy wynikają przede wszystkim z przyczyn użytkowych. Zastosowania wiedzy matematycznej w fizyce teoretycznej, ekonomii, statystyce, informatyce, medycynie itd. – w sposób naturalny różnicują zakres i sposób wykorzystania matematyki. Jednakże każdy student wymienionych wyżej dziedzin, zanim przystąpi do studiowania, winien być wyposażony w ogólny, jednorodny i sprawny agregat wiedzy matematycznej stanowiącej podstawę dalszego specjalistycznego rozwoju. Jakość tego agregatu i, ogólnie rzecz ujmując, możliwość jego budowania w poszczególnych przypadkach zależeć będzie tylko i wyłącznie od poziomu wiedzy teoretycznej oraz zdolności i umiejętności dydaktycznych nauczyciela, a idąc dalej: również nauczyciela akademickiego, prowadzącego zajęcia z przyszłymi nauczycielami matematyki.

O ile możemy stwierdzić, że fizyk, ekonomista, statystyk, informatyk itd. są pewnego rodzaju inżynierami wznoszącymi swoje budowle na matematycznych podstawach, to nauczyciel matematyki winien ich zasad owego „inżynierstwa" nauczyć. I dotyczy to nie tylko podstawowego zakresu wiedzy teoretycznej. O wiele ważniejsze wydaje się wpajanie zasad analizy problemów, poszanowania dla szczegółów, przywiązywania uwagi do faktów, logiki rozumowania, kształtowanie umiejętności wyciągania wniosków, badanie związków i zależności pomiędzy elementami wiedzy, budowanie umiejętności abstrakcyjnego myślenia, analizowania i korygowania własnych błędów.

Zakres wiedzy ogólnej przewidzianej do przyswojenia przez dzisiejszego ucznia dowolnej szkoły ponadgimnazjalnej jest bardzo szeroki. Trudno się zatem dziwić, że zwykle uczeń poprzestaje na mechanicznym zapamiętaniu treści bądź umiejętności, starając się zresztą ich zakres ograniczać do niezbędnego (jak mu się wydaje) minimum. Nie docieka znaczenia terminologii, istoty pojęć, sensu twierdzeń. Dopiero przy przechodzeniu na wyższe poziomy wiedzy wszystkie owe zaniedbania wychodzą na jaw, powodując znamienne trudności nauczania – i dla studenta, i dla nauczyciela. Jeśli w trakcie zajęć poświęconych generowaniu przestrzeni, zauważając, iż studenci wykonują zadania mechanicznie, rzucam pytanie: co oznacza słowo „generować" (brak odpowiedzi), czy ktoś może podać przykład generatora dźwięku? (brak odpowiedzi) – to właśnie odczuwam wspomniane wcześniej uczniowskie (a może nie tylko) zaniedbania. Tym bardziej, że po wyjaśnieniu znaczenia „generowania" nagle cały zakres omawianego materiału staje się dla studentów o wiele prostszy. Trywialne – ale w ten sposób problem został urealniony *(„Ach, to o to chodzi...?")*

W procesie nauczania studentów I roku matematyki wspomniane zaniedbania, ale i ułomności zdobytej dotychczas wiedzy matematycznej, widoczne są szczególnie. I wcale nie ulegają zupełnemu zatarciu po kilku miesiącach studiowania, chociaż wydaje się, że i studenci, i nauczyciele są o tym często mocno przekonani. Tymczasem w toku dalszego nauczania okazuje się, że problemy, o których wspomniałam wcześniej, są nie tylko żywe, ale czasami ulegają wzmocnieniu przez nowe fragmenty wiedzy. Mogę to zaobserwować dokładnie na przykładzie prowadzonych ze studentami I roku zajęć z algebry liniowej.

Po półrocznym nauczaniu tego przedmiotu, kiedy wydaje się, że pojęcia liniowej zależności wektorów, przestrzeni generowanych, bazy oraz wymiaru przestrzeni liniowych są dość dobrze opanowane, nagle okazuje się, że ich rozumienie jest w zasadzie pozorne, ogranicza się jedynie do struktur powierzchniowych. Mając daną konkretną przestrzeń wektorową i wykonując mechanicznie operacje prowadzące do przedstawienia wektorów tej przestrzeni w postaci liniowej kombinacji wektorów bazy – bezbłędnie podają jej wymiar. Dalsze pytania, np. o ilość wektorów podanej przestrzeni, powoduje zdecydowaną dezorientację. Uzyskiwane najczęściej odpowiedzi to: tyle, ile otrzymali w bazie tej przestrzeni.

Oczywiście, postawione pytanie niejako wprowadza ich w błąd, ponieważ nie ma praktycznie żadnego związku z wymiarem przestrzeni. Jednakże sytuacja przekłada się na popełnianie bardzo często w kolokwiach błędów tego typu; np. w zadaniu: „Wyznacz wymiar przestrzeni (np. 3) oraz odpowiedz, czy dany element (nie należący do bazy) należy do niej – pada odpowiedź: *nie, bo w tej przestrzeni są trzy elementy, a podany nie jest żadnym z nich.*

Przeanalizujmy teraz tok pracy nad konkretnym zadaniem rozwiązywanym na ćwiczeniach.

<u>Zadanie.</u>

W przestrzeni wektorowej V(K) dany jest układ wektorów liniowo niezależnych
$X=\{x_1, x_2, x_3\}$. Zbadać czy układ wektorów $Y =\{x_1+ x_2, 2x_1+ x_3, x_1- x_2\}$ jest także liniowo niezależny w tej przestrzeni.

Studenci samodzielnie pracują nad zadaniem. Po zakończeniu pracy prezentują rozwiązanie, które wygląda następująco:

Aby X był układem wektorów liniowo niezależnych w V(K), musi spełniać warunek:

$\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in K\ [\alpha_1(x_1+x_2)+\alpha_2(2x_1+x_3)+\alpha_3(x_1-x_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1= 0$ i $\alpha_2 = 0$ i $\alpha_3 = 0]$.

Niech zatem

$$\alpha_1(x_1+x_2)+\alpha_2(2x_1+x_3)+\alpha_3(x_1-x_2) = \mathbf{0}$$

wtedy

$$\alpha_1(x_1+x_2)+\alpha_2(2x_1+x_3)+\alpha_3(x_1-x_2) = (0,0,0)$$

stąd otrzymujemy

$$(\alpha_1+ 2\alpha_2+ \alpha_3)\, x_1+ (\alpha_1 - \alpha_3)\, x_2 +\alpha_2 x_3 = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1+ 2\alpha_2+ \alpha_3 ,\ \alpha_1 - \alpha_3 ,\ \alpha_2) = (0,0,0)$$

i z definicji równości wektorów otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

czyli

$$\alpha_1 = 0 \text{ i } \alpha_2 = 0 \text{ i } \alpha_3 = 0$$

Udowodniliśmy, że układ Y jest liniowo niezależny w V(K).

Wszyscy studenci zgadzają się z referującym rozwiązanie zadania.

A oto fragment dyskusji w czasie zajęć ukazujący sposób rozumowania studentów:

N - *Spróbujmy dowiedzieć się czegoś o podanej przestrzeni V(K). Co możemy powiedzieć o podanej przestrzeni? Jaką postać mają jej elementy?*

Nie pada żadna odpowiedź.

N – *W takim razie spójrzmy na przedstawione przez was rozwiązanie. W jakiej postaci elementy tej przestrzeni występują w jego zapisie?*

S – *Są one postaci* $(x_1 + x_2, 2x_1 + x_3, x_1 - x_2)$.

N – *Czyli są to trójki uporządkowane?*

S – *Tak.*

N – *Ile wektorów ma podany układ Y ?*

S – *No, jedną trójkę uporządkowaną, czyli jeden element.*

N – *Czemu zatem w kombinacji liniowej użyliście trzech skalarów* α_1, α_2 *i* α_3 *? To by wskazywało, że w Y są 3 wektory.*

Słuchacze jeszcze raz analizują układ Y i dalsza dyskusja doprowadza do ustalenia, że w Y są trzy wektory.

N - *Jaki co najmniej wymiar ma przestrzeń V(K) ?*

Otrzymuję dwie odpowiedzi:

1. dim V(K) ≥ 1
2. dim V(K) ≥ 3

Analizujemy oba przypadki.

Ad.1 – Studenci, którzy podali tę odpowiedź, uzasadniają ją następująco: *gdyby wymiar był równy 0, to byłaby to przestrzeń zerowa, a ponieważ podane są tu trzy wektory, to nie jest zerowa.* Pytam ich więc, czy te trzy wektory nie mogą być wektorami zerowymi? Jeśli np. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, to...?

Z jednej strony cieszy fakt, że słuchacze bezbłędnie stosują metodę dowodu nie wprost dla postawionej przez siebie tezy, z drugiej jednak martwi to, że sama teza jest fałszywa. Wprowadzeni moją sugestią w błąd, nie potrafią obronić swojego stanowiska, nie dostrzegają faktu, że x_1 ,x_2 ,x_3 to wektory liniowo niezależne, więc żaden z nich nie może być zerowy. Mają zbyt mało wiadomości i wynikającej stąd intuicji, by swobodnie operować wszystkimi elementami definicji wymiaru przestrzeni wektorowej. Myślowa korelacja między liniową niezależnością wektorów i wymiarem przestrzeni jeszcze nie funkcjonuje. Dla tej grupy osób istota definicji wymiaru przestrzeni nie jest jeszcze związana z maksymalną ilością liniowo niezależnych wektorów tej przestrzeni. Potrzeba jeszcze wielu przykładów i zadań, aby wspomniana wcześniej korelacja mogła zafunkcjonować, aby operacje myślowe dotyczące poszczególnych elementów analizy mogły powiązać się w jedną spójną, do końca uświadamianą rozumowo metodę.

Ad. 2 – Ta grupa studentów uzasadnia swoją odpowiedź następująco: *skoro są podane w tej przestrzeni 3 wektory liniowo niezależne, to z definicji wymiaru wynika, że dim V(K)=3.*

Należy przypuszczać, że różnica pomiędzy podanymi przez studentów wymiarami V(K) – **dim V(K) $\geq$ 3** i **dim V(K) = 3** – spowodowana została formą postawionego przeze mnie pytania („jaki co najmniej wymiar...”), bowiem zapytani, czy wymiar tej przestrzeni może być równy 4, zdecydowanie odpowiadają: *nie, bo są podane 3 wektory, a nie 4.*

Można sądzić, analizując wypowiedzi studentów, że posiadają oni pewien podstawowy zakres wiedzy dotyczącej rozważanego zagadnienia, jednakże abstrakcyjna przestrzeń podana w zadaniu w pewien sposób burzy tę wiedzę, ujawnia w niej luki związane z liniową niezależnością bądź zależnością nadukładu podanego układu wektorów. Niemniej jednak kilka naprowadzających pytań nauczyciela pozwala im zauważyć potrzebne zależności i w konsekwencji poprawnie rozwiązać postawiony problem.

Co więcej, okazało się, że ustalenie wymiaru rozważanej przestrzeni na co najmniej równy 3 oraz sugestia abstrahowania od jakiejkolwiek znanej przestrzeni pozwoliła słuchaczom przełamać bariery abstrakcyjnego myślenia i przedstawione zadanie przestało być problemem. Zadanie rozwiązują teraz bezbłędnie, z komentarzem, widać, że czują się pewnie w tym, co robią. Przyjemnie jest widzieć, że poczynione zabiegi dydaktyczne przyniosły oczekiwany efekt, dając zadowolenie obu stronom.

Zwróćmy jednak uwagę, że przy rozwiązywaniu podanego zadania wystąpił szereg zjawisk związanych z mechanizmem przyswajania przez studentów nowego zakresu wiedzy – w tym przypadku z algebry liniowej:

- odwoływanie się do poznanych wcześniej przykładów przestrzeni wektorowych,

Studenci nie otrzymują żadnych informacji na temat podanej przestrzeni. Jedyne skojarzenia związane z ilością wektorów układu X kierują ich intuicje na przestrzeń $K^3(K)$ / a dokładniej $R^3(R)$ /, która jest im bliższa z powodu częstego operowania na jej elementach. Ma to istotny związek z pojawieniem się w rozwiązaniu wektora (0,0,0) w charakterze wektora zerowego przestrzeni V(K). Skupienie się na znanym przypadku powoduje w tej sytuacji ograniczenie ich horyzontów myślowych, a co za tym idzie przeszkodę w kreatywnym rozwiązaniu problemu.

- „dopasowywanie” rozwiązania do znanych schematów,

Słuchacze niejako mechanicznie przedstawiają skalary $\alpha_1+ 2\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1 - \alpha_3$, α_2 występujące w liniowej kombinacji podanych wektorów w postaci trójki uporządkowanej, aby możliwe było porównanie jej z wektorem zerowym (0,0,0). Należy zatem sądzić, że utworzona kombinacja liniowa jest dla nich tylko nic nie kryjącym w sobie zapisem.

- skupienie całej uwagi na podanej liczbie wektorów w X, z pominięciem istotnego
założenia o ich liniowej niezależności.

Mimo, że definicja układu wektorów liniowo niezależnych zapisana została poprawnie, to jednak przebieg rozwiązania wskazuje na bezmyślne jej stosowanie. Fakt, że X jest układem liniowo niezależnym, nie został wykorzystany w przebiegu rozwiązania. W szczegółowych uzasadnieniach dotyczących tej kwestii to założenie explicite nie pojawia się. Otrzymany układ równań zbudowany został nie na podstawie istotnych przesłanek, ale przy pomocy definicji równości sztucznie utworzonych wektorów.

- automatyczne potraktowanie liczby podanych w układzie X wektorów jako
wymiaru przestrzeni V(K).

Pojęcie wymiaru przestrzeni łączy w sobie wiele elementów i w zależności od przyjętej definicji związki pomiędzy maksymalnym układem wektorów liniowo niezależnych oraz minimalnym układem generatorów w danej przestrzeni wymagają dość zaawansowanej wiedzy operatywnej. Nieliczni słuchacze pierwszego rocznika studiów matematycznych posiadają umiejętność sprawnego łączenia poszczególnych ogniw wiedzy w spójną całość.

Intuicyjne znaczenie określenia „wymiar przestrzeni” jest oczywiste choćby ze względu na jego występowanie w języku potocznym. Dotyczy to jednakże tylko przestrzeni jedno, dwu i trzywymiarowej. Począwszy od wymiaru czwartego, jak pisze Sierpińska [3], studenci muszą pokonać przeszkodę „nadpoziomową”. Wymiar przestrzeni przestaje być już rzeczą znaną. Spotykamy się zarówno z traktowaniem R^n jako przestrzeni nieskończenie wymiarowej, jak i przestrzeni, która ma n elementów.

Analiza błędów zasygnalizowanych w przedstawionym materiale prowadzi do kilku spostrzeżeń mających na celu eliminację występujących nieprawidłowości:

a) Wydaje się celowe, aby zadania podanego typu rozwiązywane były w miarę możliwości dość wcześnie, co pozwoli zminimalizować naturalną skłonność słuchaczy do stosowania wprowadzających w błąd analogii.
b) Przeprowadzenie wnikliwej analizy różnic i podobieństw przestrzeni V (K) i R^3(R) pozwoli studentom uświadomić sobie fakt, że w szczególnym przypadku te dwie przestrzenie można utożsamić.
c) Analiza toku rozumowania studentów nie może mieć na celu bezpośredniego poprawiania przez nauczyciela popełnionych przez nich błędów. Należy dążyć do tego, aby mieli pełną świadomość punktu, w którym błąd został popełniony, istoty błędu i jego przyczyny.
d) Korzystne efekty przynosi rozwiązywanie tego samego zadania różnymi metodami w zależności od wyboru określenia pojęcia;
e) Zasadą, ważną z punktu widzenia kształtowania właściwych nawyków do przyszłej pracy w szkole, winno być stawianie różnorodnych problemów i dążenie do rozwiązywania ich najprostszymi metodami /dobierając najkorzystniejszą dlań definicję pojęcia/.

Jednakże, mimo iż „diabeł tkwi w szczegółach”, warto na koniec zasygnalizować wniosek ogólniejszej natury. Nabyta przez studentów po półrocznym studiowaniu intuicja matematyczna (bardzo, jak się okazuje, ułomna) skłania ich niejako do poruszania się na obszarze „zaliczonej” (w formie kolokwium czy egzaminu) wiedzy, w ich mniemaniu, swobodnego. Można to przyrównać do sytuacji niedoświadczonego kierowcy, który nauczył się na pamięć drogi do wybranych miejsc i przestał uważać za konieczne zwracanie uwagi na znaki drogowe. Potrzeba natomiast przejazdu w inne miejsca – sytuacja nietypowa – stwarza mu ogromne problemy, stanowiąc zagrożenie dla bezpieczeństwa ruchu.

Omawiając definicję wymiaru przestrzeni, studenci potrafią sformułować ją, przeprowadzić poprawną jej analizę, tzn. powiązać ze sobą wszystkie elementy w niej występujące. Natomiast w pytaniu bądź zadaniu sformułowanym nietypowo wszystkie elementy tego logicznego rozumowania zostają zachwiane, niedostrzeżone, nie wiążą się w całość. Odnieść można wrażenie, że samo sformułowanie zadania pochłania całą ich uwagę, koncentruje myślenie tylko na formie problemu – przy czym nietypowość sformułowania sprawia, że zadanie wydaje im się tak trudne, iż nie są w stanie wykorzystać do jego rozwiązania posiadanej wiedzy.

Odpowiadają więc nielogicznie, nie łączą ze sobą znanych informacji, nie są w stanie wyciągnąć oczywistych, wydawałoby się, wniosków.

Wynika stąd konieczność zwrócenia szczególnej uwagi w pracy dydaktycznej na ciągłe doskonalenie tej kardynalnej, a jednocześnie najprostszej zasady analizy problemów: odwoływanie się do podstaw, do istoty określeń, kształtu i znaczenia definicji i aksjomatów. Realizacja tego postulatu w znaczącym stopniu eliminować będzie wszelkie problemy związane z nietypowością sformułowań i zadań.

Bibliografia:

[1] Freundental H.:1989 Błędy nauczyciela – analiza dydaktyczna samego siebie, Dydak tyka Matematyki 11, 109-115

[2] Krygowska Z.:1989, Zrozumieć błąd w matematyce, Dydaktyka Matematyki 10, 141-147

[3] Sierpińska A.: 1994, Perspektywa diachroniczna w badaniach nad rozumieniem w matematyce - użyteczność i ograniczenia pojęcia przeszkody epistemologicznej, Dydaktyka Matematyki 16, 73-101

[4] Turnau S.:1986, Dlaczego szkolne lekcje matematyki nie uczą matematyki, Dydaktyka Matematyki 6, 161-173