Analytická geometria a CN riešenia lineárnych nerovností

Mária Pôbišová

ABSTRACT: *The aim of the paper is to support an idea that also at secondary schools there should be certain time devoted to teaching of analytical geometry. Moreover, at the paper it is also given a concrete example concerning the division of pole-size material.*

1. ÚVOD

Keďže matematike patrí prominentné miesto v učebných osnovách väčšiny stredných škôl, je prirodzené, že pripravované zmeny sa tohto predmetu budú významne dotýkať.

Od učiteľov matematiky sa stále viac vyžaduje, aby citlivo zvažovali, akou mierou rozložiť čas výuky matematiky medzi formálne, rutinné výpočty a koľko času venovať časovo náročným aplikačným príkladom, modelujúcim konkrétne úlohy z praxe. V dnešnej dobe je už zrejmé, že výuka matematiky formou, ktorá uprednostňuje konkrétne riešenie technických problémov, je správna tým, že ukazuje mládeži priamo, načo im tá - vraj nezáživná matematika je.

Myslíme si, že školská matematika doteraz dosť podceňovala poznanie plošného vzťahu a číselné vyjadrenie tohto poznania. Preto cieľom môjho príspevku je podporiť názor, že aj na stredných školách by sa mal rozhodne určitý čas venovať výuke analytickej geometrie (AG), a to aspoň v tých najzákladnejších pojmoch.

Ukážme, ako by sme využitím súradnicovej sústavy mohli určiť všetky celé, nezáporné riešenia určitých lineárnych nerovností, ktoré sú dôležité napr. aj pre 1. etapu úloh o delení tyčového materiálu.

2. ANALYTICKÁ GEOMETRIA A CN RIEŠENIA LINEÁRNEJ NEROVNOSTI O 3 NEZNÁMYCH

Už z malej encyklopédie matematiky je známe, že: „Úlohou AG je podať pravidlá, metódy, postupy, ktorými sa geometrické úlohy prevádzajú na úlohy počtárske. Tento cieľ sa dosahuje **zavedením tzv. súradnicových sústav a opisom geometrických útvarov pomocou čísel,** resp. ich skupín, algebraických rovníc, nerovností a pod. Je pôvodnou – prvotnou časťou algebraickej geometrie, ktorá sa zaoberá štúdiom vlastností geometrických útvarov projektívneho, afinného a metrického euklídovského trojrozmerného priestoru, roviny a priamky.“

Vo výuke matematiky na stredných školách žiakom treba napr. ukázať

- všeobecný tvar rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$
- úsekový tvar rovnice roviny $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$.

  Potom sa dajú odvodiť aj tvrdenia, že :
- pre súradnice každého bodu $P[x, y, z]$ jedného (druhého) otvoreného polpriestoru určeného rovinou ρ platí ostrá nerovnosť:
  $$ax + by + cz + d > 0 \qquad (ax + by + cz + d < 0)$$
- pre súradnice každého bodu $P[x, y, z]$ jedného (druhého) uzavretého polpriestoru určeného rovinou ρ platí uzavretá nerovnosť:
  $$ax + by + cz + d \geq 0 \qquad (ax + by + cz + d \leq 0)$$
- nerovnosť $z \geq 0$ znamená polpriestor, ktorého hraničná rovina má rovnicu $z = 0$ a obsahuje každý bod $P[x, y, z] \in E_3$, pre ktorý $z_p \geq 0$. (Analogicky je to aj pre premenné x a y.)

Na základe znalostí aj týchto najzákladnejších pojmov AG dajme si za úlohu riešiť trocha zvláštny príklad:
„Určiť všetky celé nezáporné (CN) riešenia nerovnosti
$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \leq H \tag{1}$$
s doplňujúcimi podmienkami, že koeficienty $c_1,\ c_2,\ c_3,\ H$ tvoria neklesajúcu (alebo rastúcu) postupnosť
$$0 < c_1 < c_2 < c_3 \leq H \tag{2}$$
a sú to len čísla prirodzené. “

“Nerovnosť (1) prepíšme na úsekový tvar:
$$\frac{x_1}{H / c_1} + \frac{x_2}{H / c_2} + \frac{x_3}{H / c_3} \leq 1 \tag{3}$$

Ohraničenia pre x_i sú : $0 \le x_i \le [H / c_i]$ (4)
pričom [ ] je dolná celá časť podielu.
Potom je zrejmé, že pre premenné x_i platia 3 nerovnosti

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le [H / c_1] \\ x_2 + x_3 &\le [H / c_2] \\ x_3 &\le [H / c_3] \end{aligned} \tag{5}$$

Na základe teórie čísel dajú sa dokázať aj 3 nerovnosti:

$$\begin{aligned} x_1 + [c_2 / c_1]x_2 + [c_3 / c_1]x_3 &\le [H / c_1] \\ x_2 + [c_3 / c_2]x_3 &\le [H / c_2] \\ x_3 &\le [H / c_3] \end{aligned} \tag{6 }$$

ktoré nemusia byť vždy také isté ako nerovnosti (5).

Tieto nerovnosti (5) a hlavne (6) môžeme dobre využiť aj pre určenie CNriešení nerovnosti (1), pričom k tomu ešte využijeme aj znalosti z AG. V trojrozmernej súradnicovej sústave si môžeme všetko dobre nakresliť, len miesto x, y, z budeme používať súradnice x_1, x_2, x_3 .

Platí tvrdenie:

Určiť všetky CN riešenia nerovnosti (1) je úloha ekvivalentná s určením všetkých CN bodov 3-bokého ihlana (resp. štvorstena) ABOC, ktorého podstava ABO a 2 steny OAC a OBC sú pravouhlé trojuholníky v troch konkrétnych rovinách súradnicovej sústavy (o rovniciach $x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0$) a stena ABC je rovina ρ , určená rovnicou

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = H \quad \text{alebo} \quad \frac{x_1}{H / c_1} + \frac{x_2}{H / c_2} + \frac{x_3}{H / c_3} = 1$$

Preto $A = [H / c_1;\ 0;\ 0],\ B = [0;\ \mathrm{H/c_2};0],\ C = [0;0; H / c_3],\ 0 = [0;0;0]$.

Pre ilustráciu uveďme aj konkrétny príklad.

Príklad 1.

Určiť CN riešenia nerovnosti $30x_1 + 60x_2 + 95x_3 \le 200$ (7)

(Najlepšie graficky.)

Riešenie:

a) Prepíšme si nerovnosť (7) na úsekový tvar: $\frac{x_1}{6{,}666}+\frac{x_2}{3{,}333}+\frac{x_3}{2{,}105}\le 1$

b) Maximálne hodnoty premenných x_1, x_2, x_3 sú zaradom 6, 3, 2, t.j. [6,666], [3,333], [2,105].

c) Pre CN riešenia nerovnosti (7) sú platné aj nerovnosti:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 6 \\ x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_3 &\le 2 \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 6 \\ x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_3 &\le 2 \end{aligned} \qquad (8)$$

d) Na základe AG stačí nám v 3-rozmernej súradnicovej sústave nakresliť štvorsten ABOC, kde
$A = [6{,}666; 0; 0]$, $B = [0;\ 3{,}333; 0]$, $0 = [0; 0; 0]$ a $C = [0; 0; 2{,}15]$
a v ňom môžeme

d₁) najprv na hrane x_1 a

d₂) potom postupne na CN priamkach $p_i // x_1$

hľadať jednotlivé CN body štvorstena, ktoré sú zobrazením všetkých CN riešení danej nerovnosti (7), (viď obr. 1).

Poznámka: CN priamky sú len priamky, ktoré prechádzajú cez CN body.

Celkove je výhodné, keď aj s využitím nerovností (8) určovanie CN bodov štvorstena ABOC (resp. CN riešení nerovnosti (7))

1. začneme v rovine ABO, t.j. pre $x_3 = 0$ a

2. prejdeme postupne cez CN priamky $p_i // x_i$ v rovinách rovnobežných s podstavou ABO, t.j. v rovinách pre $x_3 = 1$ a pre $x_3 = 2$.

Takto dostaneme 23 CN riešení danej nerovnosti (7), sú napísané v tabuľke 1, ktorá je rozdelená na 3 časti podľa toho, ako sa mení premenná x_3. Do jedného riadku vždy patria vektory, čiže CN riešenia, ktoré majú rovnakú hodnotu x_2 (t.j. príslušné CN body štvorstena ABOC sú z 1 niektorej roviny, rovnobežnej s podstavou ABO).

tab.1

	Pre $x_3 = 0$	Pre $x_2 = 1$	Pre $x_2 = 2$
$x_2 = 0$	(6; 0; 0) - (0; 0; 0)	(3; 0; 1) - (0; 0; 1)	(0; 0; 2)
$x_2 = 1$	(4; 1; 0) – (0; 1; 0)	(1; 1; 1) – (0; 1; 1)	
$x_2 = 2$	(2; 2; 0) – (0; 2, 0)		
$x_2 = 3$	(0; 3; 0)		

3. PRVÁ ETAPA ÚLOH O DELENÍ TYČOVÉHO MATERIÁLU

Uvedený príklad 1 o CN riešeniach lineárnej nerovnosti o 3 neznámych som vybrala do príspevku úplne zámerne. Ak k nerovnosti (7) pridáme aj druhú nerovnosť

$$30x_1 + 60x_2 + 95x_3 \geq 180,$$

pričom platí ohraničenie

$$200 - 180 < \min(30, 60, 95),$$

tak predložené 2 nerovnosti

$$30x \ \ + 60x_2 + 95x_3 \leq 200$$

$$30x_1 + 60x_2 + 95x_3 \geq 180 \qquad (9)$$

(z ktorých chceme len CN riešenia) nás vedú na konkrétnu praktickú úlohu z praxe. Je to vlastne 1. etapa úlohy lineárneho programovania (LP) o delení tyčového materiálu, ktorá je najjednoduchšou úlohou zo skupiny úloh o rezných plánoch. Riešenie týchto úloh je dvojetapové, pričom
l. etapa spočíva vo vytvorení katalógu vhodných rezných plánov – aby sme vôbec mohli určiť model úlohy a
2. etapa je určenie optimálnej skladby rezných plánov simplexovou metódou – za účelom zvýšenia výťažnosti použitého materiálu resp. minimalizácie odpadu.

Táto problematika je už dlhší čas aj súčasťou učebníc LP, ale zvykne sa redukovať iba na 2. etapu. Preto si myslím, že nie je celkom zbytočné, ba priam je potrebné aktívne zamerať pozornosť aj na 1. etapu, a to práve pre 3 neznáme, keď môžeme veľmi dobre využiť aj AG a CN riešenia 2 nerovností o 3 neznámych určiť graficky.

Pomocou CN riešení nerovností (9) a podobných iných nerovností takéhoto typu je teda vyjadrený „**katalóg vhodných rezných plánov**“. Pritom zo základného formátu materiálu o dĺžke $H = 200\,cm$ máme narezávať tri rôzne prírezy P_1, P_2, P_3 o dĺžkach $c_1=30\ cm$, $c_2=60\ cm$, $c_3=95\ cm$ a pri realizácii týchto rezných plánov vzniká odpad kratší, ako je dĺžka najkratšieho uvažovaného prírezu. Čiže hodnota $D = 180\ \ cm$ bola zvolená na základe podmienky
$H - D < \min(c_1, c_2, c_3)$.

Je zrejmé, že pre určenie CN riešení sústavy nerovností (9) nám stačí opäť analytická geometria a podobná metóda ako v príklade 1. Konkrétne to znamená, že (na osi x_1 a na CN priamkach $p_i \,//\, x_1$) stačí nám otestovať len niektoré CN body štvorstena $ABOC$, ktoré sú blízko steny ABC. Je to celkom jednoduché, lebo platí tvrdenie:

Na osi x_1 a aj na každej CN priamke $p_i \,//\, x_1$ štvorstena ABOC

a) stačí pre určenie CN riešení otestovať najviac 2 CN body najbližšie položené ku stene ABC, pričom
b) môže existovať vždy najviac 1 CN bod priamky, ktorý je CN riešením sústavy nerovností (9) , (viď obr. 1).

Preto sústava nerovností (9) má 7 CN riešení:
(6; 0; 0), (4; 1; 0), (2; 2; 0), (0; 3; 0), (3; 0; 1), (1; 1; 1), (0; 0; 2).

3. ZÁVER

Cieľom tohto príspevku bolo rozhodne podporiť názor, že výuke základov AG je potrebné venovať určitý čas už na stredných školách. Zámerne som písala o lineárnych nerovnostiach s CN koeficientami i CN neznámymi hlavne preto, že takéto nerovnosti (okrem 1. etapy úloh o delení tyčového materiálu) sú potrebné aj pre mnohé iné konkrétne úlohy z lineárneho programovania.

Literatúra:
1. Šalát, T. a kolektív autorov: *Malá encyklopédia matematiky, OBZOR, Bratislava, 1967.*
2. Gass, S.L.: *Lineárne programovanie metódy a aplikácie, ALFA, Bratislava, 1972.*
3. Pôbišová, M.: *Die Aufgaben über die Teilung des Stangenmaterials. Aplikace Matematiky, č. 23, ČSAV Praha 1978.*
4. Pôbišová, M.: *Algoritmus určenia katalógu nárezových schém v úlohách minimalizácie odpadu, Zborník vedeckých prác, DF-VŠLD, Zvolen, 1989/II.*

Adresa:
RNDr. Mária Pôbišová
Technická univerzita
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Masarykova 24
960 53 Zvolen