Stochastické paradoxy ako prostriedok aktivizácie žiakov

Adam Płocki

ABSTRACT: *The present paper deals with certain probabilistic paradoxes employed as a means of mathematical activation of a pupil.*

1. Uvod

Jeden z důležitějších problémů, které se v poslední době vyskytly v didaktice matematiky, je problém zařazení stochastických ideí do matematiky „pro každého“. Stochastické závěry jsou nyní důležitým prvkem jak matematické, tak i obecné kultury současného člověka. Obsah a forma zde představených úloh a problemů odpovídá didaktické koncepci, jejíž podstatou je matematické vzdělávání, tedy výuka matematiky nejenom pro ni samotnou, ale také pro její vzdělávací hodnoty. Stochastická problematika může byt představena v škole jako specifický prostředek matematické aktivizace žáka.

2. Stochastické intuicé a ich vzdělavaní jako duležity cel vyuki počtu pravděpodobnosti

Specifikou stochastické problematiky jsou mnohé paradoxy, které nám ukazují, jak špatné jsou naše stochastické intuice, jak chybně formulujeme závěry týkající se „světa náhody” (viz [1], [3] a [5]). Didaktika matematiky je nazývá *stochastická překvapení*. Ve „filosofii” počtu pravděpodobnosti představené v [2] a [3], jsou tyto paradoxy zvláštním prostředkem matematické aktivizace a take specifickým prvkem stochastického vzdělávání. Vysvětlování původu těchto paradoxů může vézt k odhalení nových pojmů. Paradoxy spojené s netranzitivností jistých relací ukazují pojem pravděpodobnostního prostoru jako důležitého prostředku argumentace.

Ke specifice stochastické problematiky patří role empirických údajů (zvaných *statistické údaje*) v procesu matematizace a argumentace. Statistické údaje nám mohou v mnoha případech napovědět tvar pravdopodobnostního prostoru jako stochastického modelu. Tyto údaje jsou v mnoha situacích jistým zdrojem informací o řešeni stochastické úlohy.

V mnoha případech odhalují empirické údaje překvapující fakta. Pokus o jejich vysvětlování na základě matematiky vede ke zformulování a řešení jisté matematické úlohy. Takové stochastické úlohy inspirované empirickými údaji splňují důležitou roli ve stochastickém vzdělávání. V této prace (a taki v knize [2]) je ukázána jejich zvláštní role v matematické aktivizaci žáka.

Nekteré jevy se nám na první pohled zdají stejně pravděpodobné (i když takové nejsou), někdy se zdá, že ze symetrií vyplývá spravedlivost jistých náhodných her (třebaže tyto hry spravedlivé nejsou). V knize [2] a [3] jsou shromážděny různé situace, ve kterých jsou takové intuitivní závěry (úsudky) chybné. Základem k zpochybňování pravdivosti těchto intuitivních úsudků jsou empirické údaje. Skutečnosti v nich odhalené jsou v mnoha případech překvapující. Vzniká tedy potřeba jejich matematického vysvětlení. Setkáváme se zde se zvláštními motivacemi. Organizace *reflexe a posteriori* je neobvyklou matematickou úlohou.

O této *reflexi a posteriori* se mluví, když se snažíme vysvětlit na základě počtu pravděpodobnosti:
- proč skoro v polovině tříd jsou žáci společně oslavující narozeniny, i když se zdá velmi málo pravděpodobné, aby se ve skupině kolem dvaceti osob potkaly dvě osoby oslavující narozeniny ve stejném dnu;
- proč jsou ve sportce tak často (častěji než se nám zdá) tažena dvě po sobě jdoucí čísla;
- proč v mnoha opakováních hry *rub a dva líce - dva líce a rub* jeden z hračů vítězil skoro třikrát častěji než druhý, i když - vzhledem ke zřejmým symetriím - hra vypadala jako spravedlivá.

3. Paradox společnich narozenin

Jev nazývejme *prakticky nemožný*, pokud jeho pravděpodobnost je menší než číslo $\alpha = 0{,}05$. Jev nazývejme *prakticky jistý*, pokud jeho pravděpodobnost je větší než 0,95. Náhodně se setkalo n osob ($2 ⦸ n ⦸ 365$). Zajímá nás, ve kterém dnu každá z nich slaví narozeniny. Předpokládejme (což je tady jistým zjednodušením), že rok má 365 dnů (narození 29. února můžeme považovat za narození 1. března). Uvažujme jevy:

A_n = {*každá z n osob slaví narozeniny v jiném dnu*},

B_n = {*nejméně dvě z nich slaví narozeniny ve stejném dnu*}.

Zda se, že jev B_{25} je prakticky nemožný, že jev B_{50} je malo pravděpodobný.

Do autobusu s 50-ti cestujícími nastupuje člověk a nabízí cestujícím sázku: - *Jestli každý z vás slaví narozeniny v jiném dnu, dám každému korunu. Ale jestli jsou mezi vámi alespoň dvě osoby slavící narozeniny ve stejném dnu, dá mi každý z Vás korunu.* Přijal bys takovou nabídku, kdybys byl jedním z cestujících? Jednal tento člověk rozumně? Jaké je riziko, že prodělá 50 Kč (pokud cestující přijmou jeho nabídku)? Jaké jsou jeho šance na získání 50 Kč? Než vyřešíš poslední úlohu, zjisti, v kolika třídách tvé školy jsou dva žáci oslavující společně narozeniny. Autor této prace nezná tvoji školu, ale přesto tvrdí, že skoro v polovině tříd jsou takoví žáci. Odkud myslíš, že autor mohl získat takové vědomosti o tvé škole? Není snad tato skutečnost odhalená ve tvé škole překvapující?

Skoro v polovině tříd se vyskytují žáci společně oslavující narozeniny, což se zdá být úplně nepravděpodobné. Zjisti, že v skupině 50 (nahodně setkanych) lídi jsou nejméně dvě osoby, které slaví narozeniny ve stejném dnu. To jsou překvapující empirické fakty. Vznika tady otázka: jak vysvětlit te paradoxalní fakty pomocí matematiky?

Platí: $P(B_{25}) > 0{,}5$, $P(B_{30}) \approx 0{,}706$, $P(B_{50}) \approx 0{,}994$ a
$P(A_n) = 1 - P(B_n)$ pro $2 \oslash n \oslash 365$.

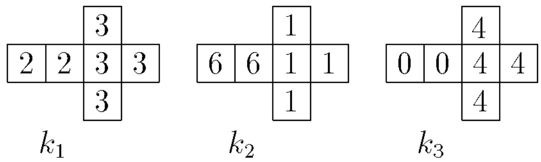
Jev B_{50} je tedy prakticky jistý, jev A_{50} je prakticky nemožný. Je to snad překvapující fakt, je to stochastický paradox. Člověk, který riskoval 50 Kč nabízeje cestujícím sázku, si může být prakticky jistý tím, že vydělá (a ne prodělá) 50 Kč.

4. „Netranzitivní" kostky - netranzitivní relace

Rekvizitou ve hře jsou tři kostky: k_1, k_2 a k_3. Hráč G si volí jednu z těchto kostek, hráč H jednu ze dvou zbývajících. Na znamení každý hází svou kostkou. Vítězí ten, kdo hodí větší počet teček. Ze dvou kostek je *lepší* ta, která dává svému hráči větší šanci na vítězství.

Pokud hráči již mají své kostky, můžeme vypočítat, jaká je pravděpodobnost, že zvítězí jeden z nich a jaká, že zvítězí druhý. Je-li šance hráče G v takové hře větší než šance hráče H, říkáme, že kostka, kterou hází hráč G je *lepší* než kostka, kterou hází H. Dále ukážeme, že se dá najít takové kostky k_1, k_2 a k_3, že kostka k_1 je lepší než kostka k_2 a kostka k_2 je lepší než kosta k_3. V této chvíli bychom chtěli říct: - *Kostka k_1 je nejlepší, protože je lepší než kostka k_2 i než kostka k_3*. Zdá se to samozřejmé. Kdyby hráč G měl nárok na přednostní volbu kostky, určitě bys mu poradil volbu kostky k_1 (protože je nejlepší!). Taková rada může být špatná, co se zda paradoxni.

Uvažujme tři kostky: k_1, k_2, k_3, jejichž sítě představuje obr. 1.



Obr. 1

Lze dokazat, že kostka k_1 je lepší než kostka k_2, že kostka k_2 je lepší než k_3 a že kostka k_3 je lepší než k_1 (viz [4]). Pro každou kostku existuje kostka, která je lepší. Jak vysvětlit tento paradox?

Soupeř hráče s předností (při volbě kostky) je v lepší situaci. Ať si 1. hráč zvolí kteroukoliv kostku, jeho soupeř má vždy možnost zvolit si lepší kostku, čili takovou, která mu dává větší než poloviční šanci na vítězství. Nárok na přednost zde není výhodou, ale naopak, v popsané situaci je lepší se této výsady vzdát. Žádná z kostek k_1, k_2 a k_3 není nejlepší. Jak se vysvětlí tento paradox?

Děvčata se hádají o to, který ze tří jejich známých je nejlepším kandidátem na manžela. - *Bořek je lepší než Cyril, protože je vyšší!* - říká jedna. - *Aleš je lepší než Bořek, protože lépe tančí!* – říká druhá. Vyplývá snad z těchto hodnocení, že Aleš je nejlepší, protože je lepší než Bořek, a Bořek je lepší než Cyril? Samozřejmě, že ne!

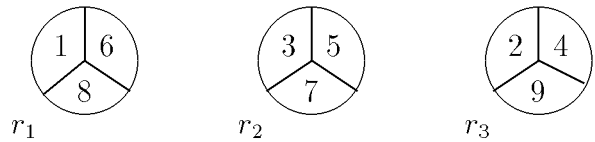
Otázka na nejlepší z kostek je stejně nesmyslná, jako je otázka na nejlepšího kandidáta na manžela. O tom, která z kostek: k_1 nebo k_2 je lepší, se rozhoduje v stochastickém modelu pro házení dvou kostek, k_1 a k_2. Srovnávání kostek k_2 a k_3 se koná v úplně jiném pravděpodobnostním prostoru, stejně tak jako porovnávání Bořka a Cyrila se koná podle úplně jiného kritéria než v případě Aleše a Bořka. To, že žádná z kostek není nejlepší, nás už nepřekvapuje, pokud si uvědomujeme skutečnost, že v případě každých dvou kostek se setkáváme s jiným pravděpodobnostním prostorem (viz [4]).

Hry se účastní tři hráči a každý má jednu ze tří kostek k_1, k_2 a k_3 z obr. 1. Každý hází svojí kostkou a vítězí ten, kdo hodí nejvíce teček. Byl jsi pozván k takové hře. Nabízejí ti nárok na přednost ve volbě kostky. Bereš tuto nabídku? Jak vysvětlíš své rozhodnutí?

V situaci, když hráči jsou tři (a ne dva, jako předtím) a každý hází jinou kostkou, je kostka k_3 nejlepší.

5. Paradoxni „netranzitivní" ruletky

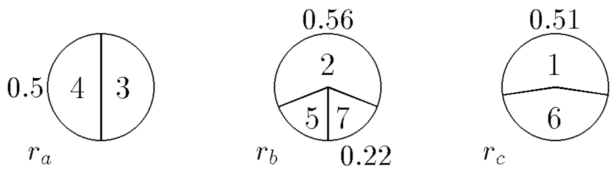
Ruletky, onichž zde budeme mluvit, slouží k losování čísla. Vylosovaným číslem je číslo sektoru, na kterém se zastavila šipka.



Obr. 2

Ruletky, jejichž terče představuje obr. 2, jsou rekvizitou ve hře. Každý ze dvou hráčů si volí jednu z ruletek a pak losuje číslo pomocí své ruletky. Vítězí ten, kdo vylosuje větší číslo. Lze dokazat, že žádná z těchto ruletek není nejlepší.

Hry se účastní tři hráči, každý losuje číslo pomocí jedné ze tří ruletek a vítězí ten, kdo vylosuje největší číslo. Lze dokazat, že v této situaci ruletka r_2 je nejhorší, ruletky r_1 a r_3 davají hračům stejné šancí (jsou stejně dobre).

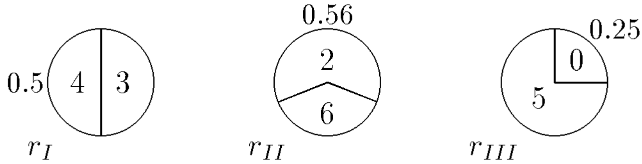


Obr. 3

Hry se účastní dva hráči. Jeden z nich volí jednu ze tří ruletek, jejichž terče představuje obr. 3. Druhý hráč volí jednu ze dvou zbylých ruletek. Každý losuje číslo pomocí své ruletky. Vítězí ten, kdo vylosuje větší číslo. Jsi jeden z hráčů. Dostal jsi přednost při volbě ruletky. Jak se rozhodneš, pokud jde o volbu ruletky? Je v této situaci pro tebe přednostní volba výhodou? Lze dokazat, že ruletka r_a je nejlepší.

Hry se účastní tři hráči a každý má jinou ze tří zmíněných ruletek. Každý losuje číslo pomocí své ruletky a vítězí ten, kdo získá největší číslo. Kterou ruletku by sis zvolil, kdybys měl přednost a znal řešení dvou posledních úloh?

Zdá se, že měl bys zvolit ruletku r_a, protože to je nejlepší ruletka. Takový úsudek naznačuje řešení úlohy, avšak tato odpověď, což nás zde trochu překvapuje, je špatná. Snadno lze ukazat, že v situaci, kdy se hry účastní tři hráči, je nejlepší ruletka r_c. Ruletka, která v předešlé situaci (dva hráči) byla nejhorší, je nyní (tři hráči) nejlepší.



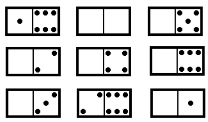
Obr. 4

Každý ze dvou hráčů si volí jednu ze tří ruletek r_I, r_{II} a r_{III} z obr. 4., každý losuje číslo pomocí své ruletky a vítězí ten, kdo vylosuje větší číslo. Lze dokazat, že žádná z těchto ruletek není nejlepší.

Hry se účastní tři hráči. Každý z nich má jednu z ruletek z obr. 4. Každý losuje číslo. Vítězí ten, kdo získá největší číslo. Teď je nejlepší ruletka r_2.

6. Netranzitivni soubory kamenů domina

Vezměme soubor 9 kamenů domina v pořadí zobrazeném na obr. 5. Kameny v řádcích tvoří „vodorovné" soubory: w_1,w_2 a w_3. Kameny v sloupcích tvoří „svislé" soubory s_1,s_2 a s_3.



Obr. 5

Každý ze dvou hráčů má jiný ze tří vodorovných souborů kamenů. Každý obrací své kameny tečkami dolů, míchá je a jeden vytáhne. Vítězí ten, kdo má na svém vylosovaném kameni víc teček. Lze dokazat, že soubor w_1 je lepší než soubor w_2, že soubor w_2 je lepší než w_3 a že soubor w_3 je lepší než w_1 (žádný z vodorovných souborů není nejlepší).

Jestliže v popsané hře si každý ze dvou hráčů volí jeden ze svislých souborů, pak žádný z těchto souborů není nejlepší.

Všimni si, že čtverec vytvořený z počtu teček na dominových kamenech v uložení z obr. 5. je magický čtverec.

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Obr. 6.

Hry se účastní tři hráči. Každý má jiný ze tří vodorovných souborů dominových kamenů (obr. 5.). Každý losuje kámen ze svého souboru. Vítězí ten, kdo vylosuje kámen s největším počtem teček. Soubor w_2 je v této situaci nejhorší. Soubory w_1 a w_3 dávají hráčům stejné šance (jsou stejně dobre).

Každý ze tří hráčů má jiný ze svislých souborů s_1, s_2 a s_3 (obr. 5.). Každý losuje kámen ze svého souboru a vítězí ten, kdo má na svém vylosovaném kameni nejvíc teček. Nyní je soubor s_2 nejlepší.

7. Lepší a horší výsledky hodu mincí

Všechny výsledky trojího hodu mincí jsou stejně pravděpodobné. To je samozřejmé. A máme jich osm. Nazýváme je *série líců a rubů délky 3*. Písmeno *o* označuje výsledek *padne líc,* písmeno *r* – výsledek *padne* rub. Hod mincí (není podstatné, kdo hází) je opakován ve hře tak dlouho, až po rubu dvakrát za sebou padne líc (...*roo*) – pak zvítězí Aleš, nebo když po dvou lících za sebou padne rub (...*oor*) – tehdy vítězí Bořek. Z faktu, že výsledky *roo* a *oor* jsou stejně pravděpodobné, jakoby (samozřejmě) vyplývá, že šance obou hráčů jsou stejné (že tato hra *rub a dva líce - dva líce a rub* je spravedlivá).

Než pomocí matematiky rozhodneme, jak je tomu doopravdy, opakujme hru mnohokrát. Tato hra se dá simulovat pomocí tabulky náhodných čísel. Každou z číslic: 0, 2, 4, 6, 8 interpretujme jako „líc” (*o*), každou z číslic: 1, 3, 5, 7, 9 – jako „rub” (*r*). Zde je takto přeložený začátek tabulky náhodných čísel z konce knížky [2] (vzal se ohled na 5 počátečních řádků). Vodorovná čára znamená konec hry.

ooor-rorrroo-rrrrroroo-rroo-oor-rorrrroo-orororrroo-
orrororrroroo-rrrororrroroo-oor-oor-ororoo-rorrrrrrroo-
oroo-rrororrrrrrroo-oroo-oor-oor-oroo-roo-roo-oroo-
oroo-rororoo-ooor-roo-rrrrrrrroo-roo-rrroroo-ooor-
rrrrroo-rrroo-orrorroo-orrroo-rroo-rroo-oooooor-oooor-
orororoo-orrrrrrororroroo-ooor.

Prvních pět řádků tabulky náhodných čísel stačilo na opakování hry 41 krát. Aleš zvítězil 30 krát, Bořek - jenom 11 krát. Je to překvapující.

Kdyby byla hra spravedlivá - jak to zpočátku vypadalo - pravděpodobně by rozdíly v četnosti vítězství nebyly tak markantní. Rozdíly četnosti se zde zdají podstatné. Statistické údaje nás vedou k pochybnostem o spravedlnosti hry.

Otázka spravedlivosti hry se týká pravděpodobnosti, s jakou zvítězí ve hře každý z hráčů. Ukážeme zvláštní argumentace týkající se této pravděpodobnosti.

Ve hře se hod mincí opakuje tak dlouho, až výsledky posledních tří hodů vytvoří výsledek *roo*, anebo výsledek *oor*.

1) Předpokládejme, že při prvním hodu padl rub. Bude tomu tak s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Získání série *oor* (vítězství Bořka) je v této situaci nemožné. Abychom se po „rubu” dočkali série *oor*, musel by líc padnout dvakrát za sebou a po něm pak rub. Jenomže po druhém líci se házení mincí ukončí, protože jsme získali sérii *roo* (zvítězil Aleš).

2) Předpokládejme, že při prvním hodu padne líc a při druhém rub. Bude tomu tak s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. V této situaci získání série *oor* (Bořkovo vítězství) není možné (ze stejného důvodu jako předtím).

3) To, že se dočkáme série *oor* (vítězství Bořka), je možné jenom tehdy, když při prvních dvou hodech padne líc (to stane se s pravděpodobností $\frac{1}{4}$).

Pravděpodobnost získání série *roo* (vítězství Aleše) se tedy rovná $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, takže $\frac{3}{4}$. Pravděpodobnost získání série *oor* (pravděpodobnost vítězství Bořka) se rovná $\frac{1}{4}$.

Alešova šance je v této hře třikrát větší než Bořkova. Vypočítané pravděpodobnosti dvou jevů zároveň vysvětlují, proč Aleš vítězil skoro třikrát častěji než Bořek. Pravděpodobnost dovolila pomocí matematiky vysvětlit jistou empirickou skutečnost, která nás překvapila.Hra tedy není spravedlivá, což se zdá poněkud paradoxní. Špatně jsme zde spojili jisté symetrie s rovností pravděpodobností.

Máme 8 stejně pravděpodobných sérií líců a rubů délky 3 (výsledků trojího hodu mincí): *ooo,oor,oro,orr,roo,ror,rro,rrr*. Předpokládejme, že každý ze dvou hráčů si volí jeden z těchto osmi výsledků jako svou sérii. Každý si volí jiný výsledek. Házení mincí se opakuje tak dlouho, až tři poslední hody utvoří jeden ze zvolených výsledků. Vítězí ten hráč, jehož výsledek utvořily tři poslední hody. Takovou náhodnou hru nazýváme *Penneyova hra*.

Hra *rub a dva líce - dva líce a rub* je zvláštní případ výše popsané Penneyovy hry. Ze dvou výsledků (sérií) *roo* a *oor* je lepší výsledek *roo*, protože poskytuje hráči 3 krát větší šanci na vítězství než výsledek *oor* poskytuje jeho soupeři. Označujeme to *roo* $\succ$ *oor*. Ze skutečnosti, že *roo* $\succ$ *oor*, a také z jistých symetrií, pokud jde o role líce a rubu, vyplývá, že *orr* $\succ$ *rro*.

Jeden hráč si zvolil sérii *orr*, druhý sérii *rrr*. Lze dokazat (viz [2], s. 224), že pravděpodobnost vítězství hráče, který zvolil sérii *rrr*, se rovná $\frac{1}{8}$ a pravděpodobnost vítězství jeho soupeře, který si zvolil sérii *orr*, se rovná $\frac{7}{8}$.

Předpokládejme nyní, že jeden hráč si zvolil sérii *oor* a jeho soupeř sérii *rro*. Tato Penneyova hra je spravedlivá. Rovné šance každého hráče vyplývají z jistých symetrií. Série (výsledky) *oor* a *rro* jsou tedy stejně dobré. Označujeme to *oor* $\approx$ *rro*. Zda se zamozřejme, že relace $\succ$ a $\approx$ jsou tranzitivni. V knize [2] dokazano, že to neni pravda.

Pro každy výsledek existuje výsledek, který je lepší. Žádný výsledek není nejlepší. Je to stochastický paradox.

Zavěr

Cílem vyučování počtu pravděpodobnosti nemůže být jenom vybavit žáka souborem definic, pojmů, vět a rozvíjení početních technik spojených s výpočtem pravděpodobnosti jevů. Tym cílem by mělo být stochastické vzdělávání, k němuž patří nejenom soubor pojmů, ale také zvlaštni metodologie. Jedná se o schopnost formulování závěrů specifických pro stochastiku, vyplývajících z velikosti pravděpodobnosti nějakého jevu a týkajících se rozhodování, verifikací hypotéz a hodnocení rizika atd. Jedná se také o utváření stochastických intuicí, které jsou původně špatně rozvinuté (zformované), o čemž svědčí stochastické paradoxy shromážděné v této praci.

Literatúra:

1. Gardner, M.: *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W.H.Freeman and Company, New York 1988.
2. Płocki, A.: *Pravděpodobnost kolem nas – počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*, Acta Universitatis Purkynianae, Ústi nad Labem 2001.
3. Płocki, A.: *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.
4. Płocki, A.: *Zvlaštni matematické objekty, nástroje a postupy v počtu pravděpodobnosti*, Matematika-Fyzika-Informatika, 4-1988 (s. 193-201) a 5-1999 (s. 257-263).
5. Székely, J.G.: *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Müszaki Könyvkiadó, Budapest 1982.

Adressa:
prof. dr hab. Adam Płocki
Akademia Pedagogiczna, Instytut Matematyki, ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków (Pol'sko)
E-mail: **adplocki@wsp.krakow.pl**