P R Á C A S N A D A N Ý M I Ž I A K M I

Anna Paruleková

ABSTRACT : This paper shows several possibilities how to form new identities, equations and formulas in the mathematical clubs without special mathematical knowledge.

1.ÚVOD

V duchu Eulerovho výroku: "Vlastnosti čísel, ktoré dnes poznáme, boli odhalené zväčša cestou pozorovania" je optimálne dať práci s nadanými žiakmi na matematickom krúžku charakter vlastného pozorovania.
Potvrdzuje to aj výrok G. H. Hardyho: "V začiatkoch matematického vzdelávania, elementárnu teóriu čísel treba pokladať za veľmi užitočný predmet. Totiž jeho budovanie vyžaduje veľmi malý počet poznatkov, jej predmet je prístupný a známy, používa jednoduché, všeobecné metódy, ktorých nie je veľa, a je na čele matematických vied v prebúdzaní prirodzenej ľudskej zvedavosti."
Prirodzene by žiaci na matematický krúžok mali radi chodiť, mali by na ňom s minimálnymi vedomosťami získavať maximálne skúsenosti a možno aj vyšliapávať chodníčky pre budúce náročnejšie matematické teórie.
Ak sa dnes hovorí o malej validite maturitnej skúšky, tak je to hlavne preto, že mnohé vysoké školy poriadajú prípravné kurzy z matematiky na prijímacie skúšky často s náplňou látky aspoň prvého semestra a z toho dôvodu môžeme s kľudným svedomím siahnuť na matematických krúžkoch aj po vysokoškolskej látke.

2.POZOROVANIE AKO JEDNA Z METÓD DÔKAZU.

V tomto prípade je dôležitý výber vhodných úloh. Môžu to byť úlohy, v ktorých môžeme postupne dosadzovať n=1, 2, 3, … ,alebo vhodne zátvorkovať dekadický rozvoj, napríklad, ak máme dokázať, že $2^n.5^{n+1}+1$ nie je prvočíslo pre žiadne n, stačí nechať žiaka pozorovať postupné dosadenia n=1, 2, 3, … ,teda v postupnosti získaných hodnôt je zákonitosť a to postupné pridávanie nuly , najskôr 501, potom 5001, 50001, 500001, atď. ,čo sú čísla deliteľné tromi, preto nemôžu byť prvočísla.

Alebo,ak máme dokázať, že číslo $\underbrace{111\ldots11}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}$ je úplný štvorec

pre každé n prirodzené, stačí opäť pozorovať, že pre

n=1: $11 - 2 = (1.10 + 1) - 2 = 9 = 3^2 = (3.1)^2$

n=2: $1111 - 22 = 10.(10^2 - 1) + (10^2 - 1) = (10^2 - 1)(10 + 1) = 99.11 = (3.11)^2$

n=3: $111111 - 222 = \ldots = 999.111 = (3.111)^2$ a teda je tu zákonitosť v postupnom pribúdaní jednotky.

3.VYTVÁRANIE ZAUJÍMAVÝCH IDENTÍT A ROVNÍC.

Budeme vychádzať zo zaujímavých čísel ako sú : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1+\sqrt{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$,ktoré sú známe ako prevrátené hodnoty zlatého, strieborného a bronzového čísla a ktoré si pre jednoduchosť označíme písmenami u, v a w.

Ľahko zistíme, že $u - \frac{1}{u} = 1$, $v - \frac{1}{v} = 2$, $w - \frac{1}{w} = 3$. Ďalej stačí vytvárať druhé, tretie a vyššie mocniny výrazov u, v , w a ich prevrátených hodnôt a dosadzovať ich do príslušných odmocnín uvedených vzťahov. Takto získame postupne identity

pre u :

$$1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \qquad (1)$$

$$1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \qquad (2)$$

$$1=\sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \qquad (3)$$

$$1=\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}} \qquad (4)$$

$$1=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} \qquad (5)$$

......

pre v :

$$2=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}} \qquad (6)$$

$$2=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \qquad (7)$$

$$2=\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} \qquad (8)$$

$$2=\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}+\sqrt[5]{41-29\sqrt{2}} \qquad (9)$$

$$2=\sqrt[6]{99+70\sqrt{2}}-\sqrt[6]{99-70\sqrt{2}} \qquad (10)$$

....

pre w :

$$3=\sqrt{\frac{11+3\sqrt{13}}{2}}-\sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{2}} \qquad (11)$$

$$3=\sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}+\sqrt[3]{18-5\sqrt{13}} \qquad (12)$$

$$3=\sqrt[4]{\frac{119+33\sqrt{13}}{2}}-\sqrt[4]{\frac{119-33\sqrt{13}}{2}} \qquad (13)$$

......

Ďalšie zaujímavé čísla získame dosadzovaním do výrazu $\dfrac{k+\sqrt{4+k^2}}{2}$,

Takže ak pre k=4 označíme vzniknuté číslo p, potom platí : $p-\dfrac{1}{p}=4$
(14)

Opäť môžeme počítať druhé a vyššie mocniny p a $\dfrac{1}{p}$ a dosadzovať ich do príslušných odmocnín vzťahu (14). Pre rozdiel druhých odmocnín čísla p^2 a $\dfrac{1}{p^2}$, kde $p=2+\sqrt{5}$, dostaneme

$$4 = \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}} \qquad (15)$$

....

Ak pre k=5 označíme vzniknuté číslo q, potom platí : $q - \frac{1}{q} = 5$, kde

$q=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ a pre rozdiel druhých odmocnín druhých mocnín čísla q
a jeho prevrátenej hodnoty dostaneme

$$5=\sqrt{\frac{27+5\sqrt{29}}{2}} - \sqrt{\frac{27-5\sqrt{29}}{2}} \qquad (16)$$

....

Z identít (1), (6), (11), (15), (16) ľahko získame rovnice :

$$x = \sqrt{\frac{3+x\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-x\sqrt{5}}{2}} \qquad (17)$$

$$x = \sqrt{3+x\sqrt{2}} - \sqrt{3-x\sqrt{2}} \qquad (18)$$

$$x = \sqrt{\frac{11+x\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{11-x\sqrt{13}}{2}} \qquad (19)$$

$$x = \sqrt{9+x\sqrt{5}} - \sqrt{9-x\sqrt{5}} \qquad (20)$$

$$x = \sqrt{\frac{27+x\sqrt{29}}{2}} - \sqrt{\frac{27-x\sqrt{29}}{2}} \qquad (21)$$

Zaujímavé čísla u, v, w, p, q,...a ich prevrátené hodnoty môžeme ešte vyjadriť v tvare zložených odmocnín :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}} \qquad (22)$$

$$1+\sqrt{2} = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+...}}}} \qquad (23)$$

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2} = \sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{1+...}}}} \qquad (24)$$

$$2+\sqrt{5} = \sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{1+...}}}} \qquad (25)$$

$$\frac{5+\sqrt{29}}{2} = \sqrt{1+5\sqrt{1+5\sqrt{1+5\sqrt{1+....}}}} \qquad (26)$$

....

$$\frac{k+\sqrt{4+k^2}}{2} = \sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{1+\dots}}}} \quad (27)$$

o čom sa môžeme ľahko presvedčiť. Rovnako jednoducho odvodíme nasledujúce vyjadrenia pre tieto čísla, prípadne pre ich prevrátené hodnoty :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} \quad (28)$$

....

$$\frac{k+\sqrt{4+k^2}}{2} = \text{k}+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\dots}}} \quad (29)$$

resp.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}} \quad (30)$$

....

$$\frac{\sqrt{4+k^2}-k}{2} = \cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\dots}}} \quad (31)$$

Je známe, že pre postupnosť danú rekurentne : $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

platí : $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}} \quad (32)$$

Preto veľmi ľahko zistíme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konverguje k číslu $\frac{k+\sqrt{4+k^2}}{2}$

$$=k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\ldots}}$$

pre postupnosť danú rekurentne : $a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+1}=k.a_n + a_{n-1}$ (33)

Podobne pre postupnosť (33) platí : $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ konverguje k číslu

$$\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+....}}}$$

danému vzťahom (31). Pritom je vidieť vo všetkých vzťahoch zákonitosti.

4. ZÁVER

Podobne by bolo možné experimentovať v ostatných oblastiach matematiky. Ale ak vychádzame z myšlienok J.Stewarta, podľa ktorého matematiku možno prirovnať ku stromu, ktorý má korene v číslach, potom aj v práci s nadanými žiakmi treba vychádzať z teórie čísel.

Literatúra :

1. Andres,J.,Fišer,J.:Rez zlatý, strieborný a bronzový, Pokroky 6, roč.40/1995
2. Hejný, M. a kol.:Teória vyučovania matematiky 2, SPN Bratislava, 1990

Adresa :
RNDr. Anna Paruleková
Gymnázium sv. Andreja
nám. Andreja Hlinku 5
034 01 Ružomberok