

Integrovaná výuka s matematikou

Jan Melichar

ABSTRACT: The author presents possibilities of interdisciplinary relations with mathematics. He shows the interdisciplinary relations of mathematics and mother tongue. He pays attention to correct usage of terms in connection with logic. Relations with history especially he concentrates on so called mathematical machiavelism; with biology - genotypes and phenotypes in genetics; with art - examples of creative work of pupils e.g. usage of probability when filling in a graph paper.

V České republice byl v letošním roce vydán „Národní program rozvoje vzdělávání v České republice“ nazvaný „Bílá kniha“. V tomto programu se uvádí: „Budou rozvíjeny mezipředmětové vztahy a výuka v integrovaných celcích i uplatňovány nové formy výuky, které usnadní vnitřní diferenciaci až individualizaci vzdělávání.“ Tento cíl Národního programu rozvoje vzdělávání samozřejmě musí být blízký studentům studia učitelství, aby jej mohli v budoucnosti realizovat ve své učitelské praxi. Základy vzdělání vznikají na 1. stupni základní školy a proto jsem se u studentů studia učitelství pro 1. stupeň základní školy zaměřil v předmětu didaktika matematiky na mezipředmětové vztahy s předmětem matematika, které vyúsťují v projektovém vyučování.

V mezipředmětových vztazích věnují prvořadou pozornost mateřskému jazyku, neboť jak pravil J.A. Komenský ve své Didaktice velké v kapitole XIX, článku 45c: „Kolik kdo umí, tolik ať zvyká vyjadřovat, a naopak, co pronášá, tomu ať učí se rozumět. Nikomu nebudiž dovoleno odříkávat, čemu nerozumí nebo co nedovede vyložit. Neboť kdo nedovede vyjádřit, co myslí, je němá socha, kdo tlachá čemu nerozuměl, je papoušek. My však vzděláváme lidi a chceme je vzdělávat úsporně, to se stane, když všude řeč s věcmi a věci s řečí půjdou spolu stejným krokem“. Náležitě ovládnutí mateřského jazyka mne jako matematika vede k tomu, že i v didaktice matematiky věnuji pozornost chybám v mateřském jazy-

ce, které se často ve školské matematice vyskytují. Uvádím studentům, že vyučovací hodina matematiky je současně vyučovací hodinou mateřského jazyka. Jedním z předních úkolů matematiky je rozvoj myšlení. Myšlení souvisí s jazykem, neboť věta je jazykové vyjádření myšlenky. Věnuji pozornost například tvorbě otázek, neboť jak pravil klasik české didaktiky matematiky pan profesor Karel Hruša. „Na blbou otázku, blbá odpověď“ .Vzpomínám na jeho příklad, kdy na tabuli byl zlomek $\frac{3}{12}$ a učitel se ptal: „Tak co s tím zlomkem uděláme?“ a jeden z žáků odpověděl : „Prosím, smažeme.“

Na základě pozorování studentů na pedagogické praxi chyby rozdělují na chyby v obecném jazyku a to na chyby ve výslovnosti (ortoepii), tvarosloví , chyby ve větné skladbě (syntaxi) a na chyby v odborném jazyku a to na chyby v odborné terminologii a odborné frazeologii.

Například ve větné skladbě (syntaxi) se mnoho chyb vyskytuje v zadávání slovních úloh. Například slovní úloha začínat textem: „Žáci jeli plavat autobusem“, atp.

V didaktice matematiky věnuji pozornost pojmotvornému procesu, neboť chci, aby si student učitelství pro 1. stupeň základní školy uvědomil jak je obtížné v myšlení žáka vytvořit představu o daném pojmu. Navazují na znalosti studentů z učiva psychologie, které pak aplikujeme na matematiku.

Uvádím příklad, jak děti v 5. ročníku základní školy chápou pojem výroku. Slovo „výrok“ chápou jako pamětihodnou větu nějaké osobnosti, která se často cituje nebo jako usnesení (výrok soudu, komise znalců) a podobně. Žáci mají dojem, že výrok je pravdivé, nevyvratitelné tvrzení. Zde využijme mezipředmětových vztahů (integrované výuky) a zavedeme žákům výrok jako oznamovací větu, která srozumitelně sděluje něco, co může být buď jen pravdivé anebo nepravdivé. Žáci sami určí, že věty zvolací, rozkazovací a tázací nemohou být výroky. Využije se znalostí z mateřského jazyka, kde žáci probírají na 1. stupni základní školy druhy vět podle postoje mluvčího. Obdobně oznamovací věta, která něco sděluje, ovšem nesrozumitelně není výrokem. Například : „Kočka je násobkem psího ocasu.“

Například pojem vzdálenost, studenti mají na mysli pouze zpravidla vzdálenost dvou bodů v rovině. Například však vzdálenost dvou bodů na kulové ploše se obvykle rozumí délka nejkratšího z obou oblouků hlavní kružnice, jehož krajními body jsou dané body. O vzdálenosti můžeme však hovořit i v méně obvyklých případech. Třeba vzdálenost dvou stránek v knize (např. vzdálenost stránek 43 a 21 je $|43 - 21| = 22$ nebo vzdálenost dvou žáků zapsaných v třídním výkazu (žák mající pořadové číslo 8 má od žáka mající pořadové číslo 18 vzdáleno $|8 - 18| = 10$). Všechny popsané případy mají společné následující tři vlastnosti .

Označíme-li vzdálenost objektů A, B symbolem $|AB|$, pak pro $A \neq B$ je $|AB| > 0$ a pro $A = B$ je $|AB| = 0$, $|AB| = |BA|$ pro každé objekty A, B a $|AC| \leq |AB| + |BC|$ pro každé tři objekty A, B, C.

Chyby v odborné frazeologii. Matematika má svoji odbornou frazeologii neboli obraty. „Necht' je dán bod A.....“, „Budiž dána množina M.....“, „Sestrojíme kružnici k se středem S a poloměrem r“, atp. Děti, ale i studenti často říkají: „Namaluji kus přímky....“, „Vezmu do kružítka poloměr r, zapíchnu kružítko do tabule a udělám kružnici k“, atp. Když jsem mluvil o pojmu výrok, tak učíme děti v 5. ročníku fráze například negace výroků „Není pravda, že.....“ a zkrácený způsob pomocí ne. Například: „Není pravda, že dvě plus dvě se rovná pěti“ a zkrácený způsobem „Dvě plus dvě se nerovná pěti“. Na druhé straně „Není pravda, že pět je větší než tři“ a bez použití slov „není pravda, že: „Pět je menší nebo rovno třem“. Výrok: „Mám modrý svetr“. Negace je „Není pravda, že mám modrý svetr“, „Nemám modrý svetr“, ale negace není „Mám bílý svetr“. Žáci musí pochopit, uvádí-li se ve výroku jedna z několika možností, musí jeho negace zahrnout všechny ostatní možnosti. A to je krok k zavedení výroků s údaji o počtu osob a věcí. Jde o údaje vyjádřené slovy: žádný, aspoň jeden, právě jeden, aspoň dva, nejvýše pět,....., právě devět,....., každý, všichni. Údaje můžeme znázornit na číselné ose. Máme výrok: „Zvolil jsem právě pět prvočísel“. Negace tohoto výroku je: „Není pravda, že jsem zvolil právě pět prvočísel.“ nebo „Zvolil jsem nejvýše čtyři nebo aspoň šest prvočísel.“ Podobně „Aspoň deset z nás mělo vyznamenání“. Negace: „Není pravda, že aspoň deset z nás mělo vyznamenání.“ nebo „Nejvýše devět z nás mělo vyznamenání.“, atp. Samozřejmě, je špatné říkat: „Matematika český jazyk nezajímá.“, musím negovat a říkat: „Není pravda, že matematika český jazyk nezajímá.“ nebo „Matematika český jazyk zajímá“.

Věnuji například pozornost i tvorbě matematických říkadel a básniček s matematickým námětem. Například: „To je ruka s prstíčky, kolik jich má maličký? Jeden, dva, tři, čtyři, pět, a co vidí, chytí hned.“ Například jedna studentka jednu z matematických říkadel zhudebnila a tím jsme došli i integrované výuce s hudební výchovou.

Uvedl jsem několik drobných ukázek integrované výuky s mateřským jazykem, další možnosti jsou integrovaná výuka s dějepisem, hlavně v oblasti dějin matematiky. Takovým příkladem je ukázka matematického machiavelizmu.

Niccolo Machiavelli (1469 - 1527) byl florentský spisovatel, politik a filozof. Jak již bylo zvykem za renesance se dalo vynikat v mnoha oborech. Jedním z jeho nejznámějších děl je Vladař (Il Principe), ve kterém uvažuje mj. o sjednocení Itálie a o prostředcích jak toho dosáhnout.

Odtud také pochází výraz machiavelizmus-označení pro politické kroky, při nichž účel světí prostředky, a přeneseně pak pro manipulaci s lidmi.

Časopis Chip (viz literatura) uvádí velice vtipné postřehy, jak pomocí matematiky manipulovat s davem, ať už skrytě a nepozorovaně, či zcela veřejně a na nejvyšších postech.

Podívejme se tedy do statistiky, vědu, která vždy byla potřebná státu, o čemž svědčí i její název.

Jedna moudrost praví, že existuje několik druhů lží- malá lež, větší lež, největší lež a statistika. Ve státě byly sloupce čísel, které měly výpočetní hodnotu blízkou nule, zavedlo se několik vzorců a odborných výrazů a vznikla samostatná matematická disciplína-statistika. Věda je to exaktní, tedy její závěry považujeme za nenapadnutelné a samozřejmě za pravdivé. Je však nutno mít na paměti, že stejně jako vše ostatní, co člověk vytvořil pro své potřeby, tedy i statistika je pouze prostředek. Prostředek, který je lidmi využíván a stejně jako vše ostatní může být i zneužíván pro potřeby těch, kteří mu rozumí a dokonale znají všechny aspekty a možnosti, které skýtá.

Asi nejnámějším pojmem z oblasti statistiky je průměr. Obvykle jde o průměr aritmetický. Zde vždy záleží jaký budeme volit statistický soubor. Zda si za statistický soubor zvolíme dva občany, kde jeden snědl kuře a druhý občan byl hladový, pak oba občané se najedli v průměru půlkou kuřete. Když budu zjišťovat průměrný plat železničářů, zda si do statistického souboru zahrnu i pracovníky různých ředitelství železnic a příslušného ministerstva. V nedávné statistice jsem četl, že průměrný plat na vysokých školách je 16 000 korun, nevím kdo byl do statistického souboru zařazen. Je to plat jen učitelů, patří do statistického souboru provozní zaměstnanci?

Další známý pojem ze statistiky jsou procenta.

Vychází vysoká inflace? Nebudeme tedy do základu počítat uvolňování cen nájemného a energií a nazveme to třeba "čistá inflace" a výsledek hned vypadá lépe.

Velmi často se ukazuje, že například výroba něčeho vzrostla o 300 procent, tedy na čtyřnásobek, zatím co v zemi s rozvinutým průmyslem pouze o 3 procenta. No když vyrábím jedno auto a pak vyrobím čtyři, tak výroba vzrostla o 300 procent, když však vyrábím 100 aut a pak vyrobím 103 auta, tak výroba vzrostla jen o 3 procenta. V obou případech vzrostla výroba o 3 auta. Ostatně hovořit o procentech a neuvádět základ je tradiční propagandistický manévr.

Podobná manipulace je i dnes, podívejme na rok 1994, kdy byly již problémy s financováním zdravotnictví. Kdosi Významný sdělil v televizi, no samozřejmě, že chybí peníze, když počet zdravotnických

zařízení vzrostl ve srovnání s rokem 1989 o plných 900 procent. Znamená to, že se zdesateronásobil počet lékařů, počet sester, ale vůbec ne, sester spíše ubylo. Prostě Okresní ústavy národního zdraví (známé jako OÚNZ) se rozdělily na řadu menších zařízení. Například všichni zubaři v našem městě se zařídili jako soukromníci. Vlastně stejný dům, stejní lidé, vlastně ne, protože ubyly administrativa, ale počet zdravotnických zařízení vzrostl, vždyť každý zubař má své vlastní IČO.

Dalším problémem jsou absolutní čísla. Například se uvedlo, že vláda vynaloží na zvýšení důchodů 2 miliardy korun. Vypadá to ohromně, ale při jednom miliónu důchodců a 12 měsících v roce to představuje zvýšení v průměru o necelých 170 korun měsíčně.

Zprávy jsou to hezké, ale vždy je třeba se nad nimi zamyslet.

Snad ještě jeden příklad z novin, kde je uvedeno: Pachatelé byli za svoji trestnou činnost odsouzeni k úhrnnému trestu celkem na 115 let. Neříká se kolik jich bylo, jak byl trest rozdělen, za co, zda je to trest mírný nebo tvrdý. Zpráva neříká vlastně nic, ale zní hezky jak jsme s kriminalitou zatočili.

Podívejme se na závěr na počítač, někdo moudrý řekl: Počítač je úžasná věc. Pomáhá mi mnohem rychleji dělat věci, které bych býval dělat nemusel, nemít počítač. Lze rozeznávat dva přístupy k počítači a to bezmeznou důvěru v počítačovou přesnost a neovlivnitelnost a to, že na počítač lze svést jakoukoliv chybu. Jako statistika, tak i počítač je pouze nástroj. Nedokáže zázraky, záleží zase na nás na lidech, jak jej použijeme. Existuje dokonce i speciální pojem pro chybnou aplikaci a to GIGO - z anglického "garbage in, garbage out", česky smetí dovnitř, smetí ven. Často slyšíme oblíbený argument "Je to tak v počítači...", ale, že nastoupil chybný lidský faktor, nechce nikdo přiznat.

V předmětu statistika mne jde tímto tématem nejen o stránku vzdělávací, ale i o stránku výchovnou. K čemu by nám byly některé znalosti, když se dají zneužít.

Podívejme se na příklad na integraci s biologií.

A nyní již příklad z výuky, kde je čerpáno ze zkušeností výuky v Polsku na Pedagogické akademii v Krakově a výuka je rozšířena o můj námět.

Studentům jsme zadali známou úlohu:

Úloha: Hrají dva hráči. Házíme dvěma stejnými mincemi. Váš úkol je zvolit si předem na stálo jednu z možností, které padnou a za tuto příznivou možnost dostanete bod. Obdobně učiní protihráč. Kdo získá více bodů vyhraje. Kterou z možností je výhodné typovat?

Řešení: Jsou možné tři výsledky hodu stejnými mincemi: h_1 - padnou dva ruby (RR), h_2 - padnou dva líce (LL), h_3 - padne rub a líc (RL a LR).

Prostorem výsledků této hry je množina $M = \{ h_1, h_2, h_3 \}$. Pravděpodobnost jevu h_1 je tedy $1/4$, jevu h_2 je $1/4$ a jevu h_3 je $1/2$.

Studenti si hru zahrají a ověří si strategii, že výhodné je typovat jev padne rub a líc.

Studentům jsme se zmínili o známém pokusu křížení hrachu moravského botanika J. G. Mendela (1822-1884), kdy gen **A** je nositelem červené barvy květu a gen **a** bílé barvy květu. Rostliny o genotypu **Aa** mají květy růžové. J. G. Mendel měl na pokusném pozemku v určitém roce květy růžové, červené a bílé. Květů červených **AA** bylo právě tolik jako bílých **aa** a květů růžových **Aa** bylo dvakrát více než červených (bílých).

Dále pokračovala výuka určováním frekvence genotypů a fenotypů krevních skupin v populaci a tím i ukázkou jedné z metod při vylučování otcovství v soudních sporech.

Tabulka výskytů genotypů a fenotypů v současné populaci České republiky:

Genotyp	Fenotyp	Frekvence genotypu	Frekvence fenotypu
AA	A	0,08	0,41
A0		0,33	
BB	B	0,02	0,18
B0		0,16	
AB	AB	0,08	0,08
00	0	0,33	0,33

Před narozením dítěte lze s určitou pravděpodobností určit jakou bude mít dítě krevní skupinu na základě krevní skupiny otce a matky (genotypů a fenotypů). Lze říci, že dítě přebírá jedno písmeno z genotypu matky a jedno písmeno z genotypu otce. Matematicky řečeno: Má-li matka krevní genotypovou skupinu xx a otec krevní genotypovou skupinu xy , pak dítě může mít genotypovou krevní skupinu xx s pravděpodobností $0,5$. Pro frekvenci genotypů platí $f_{xx} + f_{xy} = 1$.

Sestavíme tabulku genotypů a fenotypů otce, matky a dítěte:

matka	A		B		AB	00
	0,41		0,18		0,08	0,33
	AA 0,08	A0 0,33	BB 0,02	B0 0,16		

A 0,4 1	AA 0,08	AA 1	AA 0,5 A0 0,5	AB 1	AB 0,5 A0 0,5	AA 0,5 AB 0,5	A0 1
	A0 0,33	AA 0,5 A0 0,5	AA 0,25 A0 0,5 00 0,25	AB 0,5 B0 0,5	AB 0,25 A0 0,25 B0 0,25 00 0,25	AA 0,25 AB 0,25 A0 0,25 B0 0,25	A0 0,5 00 0,5
B 0,1 8	BB 0,02	AB 1	AB 0,5 B0 0,5	BB 1	BB 0,5 B0 0,5	AB 0,5 BB 0,5	B0 1
	B0 0,16	AB 0,5 A0 0,5	AB 0,25 A0 0,25 B0 0,25 00 0,25	BB 0,5 B0 0,5	BB 0,25 B0 0,5 00 0,25	AB 0,25 A0 0,25 BB 0,25 B0 0,25	B0 0,5 00 0,5
	AB 0,08	AA 0,5 AB 0,5	AA 0,25 A0 0,25 B0 0,25 AB 0,25	AB 0,5 BB 0,5	AB 0,25 A0 0,25 BB 0,25 B0 0,25	AA 0,25 AB 0,5 BB 0,25	A0 0,5 B0 0,5
	00 0,33	A0 1	A0 0,5 00 0,5	B0 1	B0 0,5 00 0,5	A0 0,5 B0 0,5	00 1

Z tabulky vidíme například: Má-li otec genotypovou krevní skupinu **AA** a matka genotypovou krevní skupinu **A0** nemůže mít dítě genotypovou krevní skupinu **BB**, **B0**, **AB** a **A0**. Pravděpodobnost výskytu těchto skupin je nulová. Má-li otec fenotypovou krevní skupinu **A** a matka také **A**, nemůže mít dítě fenotypovou krevní skupinu **B** nebo **AB**.

Je zajímavé, že spočítáme-li pravděpodobnost frekvence genotypů v nové generaci dojdeme ke stejné jako měla původní populace.

Například: Frekvence genotypu **AA** v populaci je 0,08. Tedy $f(\text{AA}) = 0,08$. Spočítáme frekvenci genotypu **AA** v nové generaci. Jde o nezávislé jevy.

Výpočet:

$$\begin{aligned}
 f(\text{AA}) \cdot f(\text{AA}) \cdot 1 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 1 = 0,0064 \\
 f(\text{AA}) \cdot f(\text{A0}) \cdot 0,5 &= 0,08 \cdot 0,33 \cdot 0,5 = 0,0132 \\
 f(\text{AA}) \cdot f(\text{AB}) \cdot 0,5 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0320 \\
 f(\text{A0}) \cdot f(\text{AA}) \cdot 0,5 &= 0,33 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0132 \\
 f(\text{A0}) \cdot f(\text{A0}) \cdot 0,25 &= 0,33 \cdot 0,33 \cdot 0,25 = 0,027225 \\
 f(\text{A0}) \cdot f(\text{AB}) \cdot 0,25 &= 0,33 \cdot 0,08 \cdot 0,25 = 0,0066 \\
 f(\text{AB}) \cdot f(\text{AA}) \cdot 0,5 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0032 \\
 f(\text{AB}) \cdot f(\text{A0}) \cdot 0,25 &= 0,08 \cdot 0,33 \cdot 0,25 = 0,0066 \\
 f(\text{AB}) \cdot f(\text{AB}) \cdot 0,25 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,25 = 0,0016
 \end{aligned}$$

Sečteme frekvence genotypů **AA** u nové generace:

$$\begin{aligned}
 &0,0064 + 0,0132 + 0,0320 + 0,0132 + 0,027225 + 0,0066 + 0,0032 + \\
 &0,0066 + 0,0016 = \\
 &0,081225 = \mathbf{0,08} \text{ (zaokrouhleno)}
 \end{aligned}$$

V nové generaci je frekvence genotypu **AA** rovna 0,08, je stejná jako frekvence genotypu **AA** v původní populaci.

Dalším příkladem je ukázka integrované výuky matematiky s výtvarnou výchovou.

Při výuce výtvarné výchovy s využitím matematickou statistickou a pravděpodobností si děti určí možnosti vybarvení daného čtverce, tak aby pravděpodobnost každého vybarvení byla stejná.

Pak si vytvoří losovací zařízení na kterém losují jednotlivé možnosti vybarvení a dle tohoto losování postupně vyplňují čtvercovou síť. Jde zde o tvůrčí činnost dětí. V projektovém vyučování je rámec předmětu matematika překračován v integrované výuce již s více předměty.

Projektové vyučování je založeno na řešení komplexních teoretických nebo praktických problémů na základě aktivní činnosti žáků. Snažíme se překonávat nedostatky běžného vyučování jako je jeho izolovanost, roztržitost vědění, jeho odtrženost od životní praxe, nízkou motivaci, atp. Chápeme jej jako komplementární doplněk vyučování, který umožňuje prohlubovat a rozšiřovat kvalitu učení a vyučování. Projektové vyučování orientujeme na zkušenosti žáků. Při realizaci projektu žáci rozhodují o volbě tématu, pozorují, identifikují shromážděný materiál, provádí klasifikaci (úplnost, disjunktnost, podle téhož znaku), zaznamenávají a vyhodnocují poznání, provádí zpětnou konfrontaci (opakují postup, uvědomují si čeho dosáhli a proč vlastně zkoumali) a veřejně zhodnotí zkoumané, neboť žáci potřebují vidět užitečnost své práce a její ocenění.

Nejlépe jak pochopit problémové vyučování je, aby studenti studia učitelství projekty vypracovali sami. Tím poznají obtížnosti jejich zpracování a při zadávání projektů svým žákům se vlastně vžijí do jejich role.

Literatura:

Melicharová Jana: Černá a bílá trochu jinak (seminární práce), Katedra výtvarné výchovy Pedagogické fakulty UJEP, Ústí nad Labem, 2000

Melichar J. a kol.: Cvičenia z matematiky pre 5. ročník základných škol, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1993

Płocki Adam: Prawdopodobienstwo wokół nas, Wydawnictwo Dla szkoły, Bielsko-Biala, 1997, ISBN 83-901421-5-5

Virus Miroslav: Machiavelli by záviděl, In Chip 11/98 (str. 69-72)

Virus Miroslav: Machiavelli podruhé, In Chip 12/98 (str. 38-42)

melichar@pf.ujep.cz