

Treść i forma szkolnych zadań z rachunku prawdopodobieństwa

Maciej Major

ABSTRACT: *This article discusses the content and format of problems currently used in Polish high school math textbooks to assess students competence in probability theory.*

Wprowadzenie do szkoły rachunku prawdopodobieństwa zrodziło konieczność wypracowania sposobów kontroli i oceny probabilistycznej wiedzy uczniów. Podstawowym narzędziem sprawdzania wiadomości w matematyce są zadania. Mając na uwadze kontrolę organizacji nie tylko fazy rachunków, ale również fazy matematyzacji i interpretacji przy analizie zadań z rachunku prawdopodobieństwa proponowanych

I			II				
Zadania sformułowane z użyciem terminów spoza matematyki			Zadania matematyczne				
I-1	I-2	I-3	II-1		II-2	II-3	II-4
Zadania, których rozwiązywanie jest ilustracją procesu stosowania matematyki	Zadania, których rozwiązywanie obejmuje wszystkie fazy procesu stosowania matematyki, ale nie są ilustracją tego procesu	Zadania pozornie ilustrujące proces stosowania matematyki	Zadania sformułowane w terminologii schematów urnowych		Zadania, w treści których łączy się różne dziedziny matematyki	Zadania na dowodzenie własności pewnych szczególnych przestrzeni probabilistycznych	Zadania kontrolujące fragment teorii
			II-1a Zadania na obliczanie prawdopodobieństwa bądź wartości oczekiwanej	II-1b Zadania, w których poszukuje się wartości pewnego parametru			

uczniom w podręcznikach i zbiorach zadań w Polsce będziemy posługiwać się klasyfikacją zadań z rachunku prawdopodobieństwa zawartą w tabeli 1.

Kryterium podziału zadań jest ich rola (udział) w kontroli organizacji fazy matematyzacji, fazy rachunków i dedukcji oraz fazy interpretacji.

I. Zadania sformułowane z użyciem terminów spoza matematyki

Do tej grupy zaliczamy wszystkie te zadania, w których sformułowaniu pojawiają się obiekty niematematyczne. W grupie tej wyróżniamy trzy podgrupy zadań oznaczane dalej przez I-1, I-2 i I-3.

I-1. Zadania, których rozwiązywanie jest ilustracją procesu stosowania matematyki

Proces stosowania matematyki rozumiany jest w sensie przedstawionym w [3].

I-2. Zadania, których rozwiązywanie obejmuje wszystkie fazy procesu stosowania matematyki, ale nie są ilustracją tego procesu, a jedynie (i ewentualnie) jego symulacji

Istotę tego rodzaju zadań ilustruje poniższy przykład.

Zad. 1. Trzej bracia Arek, Bartek i Czarek dostali jeden bilet na mecz. Postanowili, że o tym kto pójdzie na mecz, zadecyduje los. Każdy z nich, w kolejności alfabetycznej rzuci monetą. Wygra ten, który pierwszy wyrzuci orła. Jeżeli pierwsza seria rzutów nie będzie rozstrzygająca, nastąpi druga, ale chłopcy będą rzucać monetą w odwrotnej kolejności. Jeżeli żaden z nich nie wyrzuci orła, to na mecz pójdzie ich tata.

a) Jakie szanse wygrania ma każdy z braci?

b) Zaproponuj inne losowanie, które dawałoby każdemu z chłopców równe szanse wygrania i wykluczałoby oddanie biletu tacie.

O tym czy dane zadanie zaliczamy do tej grupy decydują dwa fakty:

- sformułowanie zadania dotyczy pozamatematycznego problemu,
- rozwiązywanie zadania obejmuje wszystkie fazy procesu stosowania matematyki, ale nie jest ilustracją tego procesu.

Treść zadań zaliczanych do tej grupy jest na ogół długa (w tekście zadania zawarty jest np. opis pewnej sytuacji, opis pewnej gry itp.), a dotyczy gier hazardowych, podejmowania decyzji w sytuacjach niepewności i warunkach ryzyka itp. Problemy przedstawione w zadaniach z tej grupy nie opisują konkretnej rzeczywistej sytuacji (nie są to więc zadania, których rozwiązywanie jest ilustracją procesu stosowania matematyki), niemniej można wyobrazić sobie sytuacje, w których z tego typu zagadnieniami można się spotkać. Rozwiązanie każdego z tych zadań wymaga przekładu problemu na język matematyki, a więc formułowania odpowiedniego probabilistycznego zadania, konstrukcję modelu probabilistycznego dla doświadczenia opisanego w zadaniu, wykonania rachunków i interpretacji uzyskanych wyników

liczbowych. Zadania zaliczane do tej grupy pozwalają kontrolować i oceniać nie tylko pewną wiedzę (znajomość definicji i twierdzeń), ale także umiejętności organizacji fazy matematyzacji i fazy interpretacji. Organizacja faz, o których tu mowa, obejmuje ważne dla stochastyki wnioski.

I-3. Zadania pozornie ilustrujące proces stosowania matematyki

Ten typ zadań ilustruje poniższy przykład.

Zad. 2. W sklepie znajduje się 12 magnetofonów: 8 sprawnych i 4 uszkodzone. Spośród nich wzięto w sposób przypadkowy 6 magnetofonów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 5 magnetofonów wziętych jest sprawnych?

Zacytowane zadanie nie jest sformułowane w języku matematyki, niemniej nie jest to zadanie, którego rozwiązywanie ilustruje proces stosowania matematyki. W zadaniach zaliczanych do tej grupy należy obliczyć prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń, czy też wartości oczekiwane pewnych zmiennych losowych. Użycie w sformułowaniu tych zadań terminów spoza matematyki nic nie wnosi do sposobu (metod i narzędzi) rozwiązywania zadania. Matematyzacja sprowadza się tu do przekładu pozamatematycznych obiektów, procedur i zagadnień na język matematyki, tj. zastąpienie osób, magnetofonów, biletów odpowiednimi urnami. Zadania te są w zasadzie zamknięte na dane, na konstrukcję przestrzeni probabilistycznej oraz na organizację fazy rachunków i dedukcji. W zadaniach tego typu na ogół nie interpretuje się uzyskanych wyników liczbowych. Brak zatem motywacji do organizacji fazy rachunków i dedukcji. Są to więc w istocie zadania probabilistyczne sformułowane z użyciem terminów świata realnego a ich rozwiązywanie jest w istocie rozwiązywaniem zadań probabilistycznych. Problematyka wielu zadań zaliczanych do tej grupy jest w istocie oderwana od rzeczywistości. Zadania te kontrolują znajomość i umiejętność stosowania podstawowych definicji (schemat Bernoullego, rozkład zmiennej losowej, wartość oczekiwana zmiennej losowej) i podstawowych twierdzeń (twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym). Ponadto zadania tego typu pozwalają na pewną kontrolę organizacji fazy rachunków i dedukcji oraz w niewielkim stopniu na kontrolę organizacji fazy matematyzacji. Każde z zadań zaliczonych do tej grupy można sformułować w języku schematów urnowych, a rozwiązywanie tego nowego zadania sprawdza probabilistyczną wiedzę w takim samym zakresie jak zadanie wyjściowe.

II. Zadania „czysto matematyczne”

Do grupy II zaliczono wszystkie te zadania, w których nie występują obiekty świata realnego. W grupie tej wyróżniamy cztery dalsze typy (II-1, II-2, II-3 i II-4).

II-1 Zadania sformułowane w terminologii schematów urnowych

W grupie tej wyróżniamy dwie podgrupy.

II-1a. Zadania na obliczanie prawdopodobieństwa bądź wartości oczekiwanej

Przedstawimy jedno zadanie zaliczone do tej grupy.

Zad. 3. W każdej z dwóch urn jest 5 kul czarnych, 10 czerwonych i 6 białych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losując po jednej kuli z każdej urny, wyciągniemy dwie kule tego samego koloru.

Problematyka zadań zaliczanych do grupy II-1a dotyczy schematów urnowych, rzutów monetami, rzutu kostką, losowania karty z tali kart itp. W zadaniach chodzi o obliczanie prawdopodobieństw pewnych zdarzeń, o znajdowanie rozkładu pewnej zmiennej losowej lub też o obliczanie wartości oczekiwanej pewnej zmiennej losowej. Wyznaczanie zbioru wyników sprzyjających danym zdarzeniom nie stwarza większych trudności, gdy zostały opanowane podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa (na ogół nie jest tu niezbędna znajomość kombinatorycznych wzorów). Faza matematyzacji ogranicza się do konstrukcji odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej jako modelu rozważanego doświadczenia losowego. W rozwiązywaniu tych zadań brak jest fazy interpretacji. Chociaż zadania tego typu, sprawdzają probabilistyczną wiedzę w takim samym stopniu jak zadania zaliczone do grupy I-2, to odróżniamy je od zadań tej grupy, gdyż ich sformułowania nie budzą merytorycznych zastrzeżeń.

II-1b. Zadania, w których poszukuje się wartości pewnego parametru

Przytoczymy jedno z zadań zaliczanych do tej grupy.

Zad. 4. W urnie znajdują się m kul, w tym 6 czerwonych. Wybieramy losowo dwie kule. Dla jakich liczb m prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule będą czerwone, jest większe od $1/3$?

W zadaniach zaliczanych do grupy II-1b poszukuje się wartości nieznanego parametru, przy których prawdopodobieństwo pewnych zdarzeń, bądź wartość oczekiwana pewnej zmiennej losowej, spełnia zadane warunki. Zadania te charakteryzują się tym, że nie można wypisać wszystkich wyników doświadczenia losowego chociaż zbiór wyników doświadczenia jest skończony. Rozkład prawdopodobieństwa

na tym zbiorze jest funkcją szukanego parametru. Rozwiązywanie tych zadań różni się od rozwiązywania zadań z grupy II-1a tym, że w organizacji fazy rachunków i dedukcji wykorzystuje się wiadomości z innych dziedzin matematyki (np. badanie przebiegu funkcji, rozwiązywanie równań z parametrem). Na fazę rachunków i dedukcji składa się ułożenie i rozwiązanie pewnego równania bądź też badanie przebiegu funkcji. Należy tu odwoływać się do wiadomości z innych działów matematyki (analizy, algebry). Wykorzystywanie tych wiadomości odbywa się tu w naturalnym kontekście. Zadania tej grupy pozwalają zatem w szerszym zakresie niż zadania grupy II-1a kontrolować umiejętności organizacji fazy rachunków i dedukcji.

II-2. Zadania, w których łączy się różne dziedziny matematyki

Mamy tu na uwadze zadania typu:

Zad. 5. Ze zbioru $Z = \{x \in \mathbf{C} : 3 \cdot 9^x - 82 \cdot 3^x + 27 \leq 0\}$ losujemy kolejno bez zwracaniem współczynniki a, b, c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A- funkcja jest parzysta,

B- funkcja f jest malejąca w całym zbiorze $\mathbf{R}$,

C- wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(0, 2)$ i funkcja f osiąga minimum w pewnym punkcie.

Większość zadań zaliczanych do tej grupy dotyczy losowania liczb z pewnych zbiorów. Przy rozwiązywaniu tego typu zadań aktywność rozwiązującego jest ukierunkowana głównie na wyznaczenie elementów rozważanych zbiorów. Są to zadania raczej z teorii zbiorów, analizy matematycznej, logiki, kombinatoryki a z rachunkiem prawdopodobieństwa mają niewiele wspólnego. Problematyka stochastyczna zawarta w takim zadaniu jest na ogół marginalna. W większości tego typu zadań chodzi o obliczenie prawdopodobieństwa, że wylosowana ze zbioru liczba spełnia pewien warunek, bądź też o znalezienie rozkładu pewnej zmiennej losowej. Zadania tego typu kontrolują zatem jedynie znajomość twierdzenia o prawdopodobieństwie klasycznym i w pewnych przypadkach umiejętność konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

II-3. Zadania na dowodzenie własności pewnych szczególnych przestrzeni probabilistycznych

Ten typ zadań zilustruje następujący przykład.

Zad. 6. Obliczyć $P(B|A):P(B)$ wiedząc, że $P(A|B) = 1/3$.

Do grupy II-3 zaliczono zadania na obliczanie prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń, gdy znane są prawdopodobieństwa innych, zadania, w których należy udowodnić

pewne własności szczególnych przestrzeni probabilistycznych. W zadaniach zaliczanych do tej grupy przestrzeń probabilistyczna jest już zadana, nie ma w nich mowy o doświadczeniach losowych. Zadania zaliczane do tej grupy kontrolują znajomość podstawowych definicji i twierdzeń z rachunku prawdopodobieństwa a także umiejętności ich stosowania.

II-4. Zadania kontrolujące fragment teorii

Do grupy II-4 zaliczono wszystkie te zadania, które kontrolują określony fragment teorii. Są to zadania typu:

Zad. 7. Podać definicję prawdopodobieństwa i jego własności.

Z przeprowadzonej analizy danych liczbowych wynika, że:

- wśród zamieszczonych w zbiorach zadań z rachunku prawdopodobieństwa brak jest takich, których rozwiązywanie można uznać za ilustrację procesu stosowania matematyki;
- duża liczba zadanie z rachunku prawdopodobieństwa została zaliczona do grupy II-2, tym samym kontrolują one stosunkowo niewielki wycinek probabilistycznej wiedzy;
- najwięcej zadań maturalnych i egzaminacyjnych, to zadania z grupy II-1;
- stosunkowo często na egzaminach wstępnych, maturach oraz wśród zadań ze zbioru pojawiają się zadania z grupy I-3.
- bardzo mało zadań, zarówno tych rozwiązywanych w szkole jak i tych z egzaminów wstępnych, spełnia kryteria przynależności do grupy I-2.

Literatura:

1. Major, M., Nawolska, B.: *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, 1999.
2. Płocki, A.: *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.
3. Treliński, G.: *Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1982.

Maciej Major

Instytut Matematyki

Akademia Pedagogiczna w Krakowie (Pol'sko)

30-084 Kraków

e-mail: **mmajor@wsp.krakow.pl**