Zlomky

Ján Kuruc

Abstract: *Sharing experiences from teaching fractions at basic school years 4 and 5 using the problem solving method. Pupils are learning about the concept of fractions, their addition, subtraction and comparison using universal models, which are shapes drawn onto a grid. Pupils are activly involved and develop thier abstract thinking.*

ÚVOD

Na rôznych matematických fórach, ako tomu bolo aj vlani na konferencii v Ružomberku, v tradícii ktorej pokračujeme, sa dosť vyhraňujú dve strany. Na strane jednej je to viac-menej požiadavka spoločnosti prezentovaná školskou inšpekciou, MŠ, zastúpená ŠPU, hovorcami ktorých sú páni Rosa, Bálint a pán Burian z Examu.
Títo páni prezentujú čoby svoje inštitúcie a snažia sa úlohu matematiky v škole zjednodušiť zavádzaním rôznych štandárd, prijímacích skúšok, písomných maturít a podobných vecí.
Na druhej strane zaznel hlas učiteľskej verejnosti, hovorcom ktorej sa stáva pán profesor Riečan. Táto strana vidí vo vyučovaní matematiky aj aspekt výchovy. Poučení históriu, kedy matematika výrazne ovplyvňovala celospoločenské myslenie a naopak celé generácie ľudí tvorili matematiku, vidia v matematike nezastupiteľný nástroj na formovanie človeka, čo sa dá ťažko merať štandardami.
Problém zrejme nebude len typicky náš.
Budem citovať nemeckých a rakúskych metodikov profesora Fischera, docentov Malleho a Bürgera vo svojej knihe Človek a matematika (SPN 1992) píšu:
Ako vyzerá úloha učiteľa vo vyučovaní dnes?
„Myslíme si, že je určená vonkajšou identifikáciou učiteľa s učivom, čo vedie k vyumelkovanosti a nepravosti vyučovania matematiky.

Terajšie vyučovanie matematiky je ovládané, určované, spravidla učivom, najmä učiteľ sa úplne podriaďuje učivu a úlohe sprostredkovateľa.“ (*Človek a matematika SPN Bratislava 1992.*)
Profesor Hejný vo svojom článku „Prečo je matematika ťažká?“ v Pokrokoch matematiky, fyziky a astronómie 1978, ročník 23 č. 2 s 85-93, hovorí podobne o nedorozumení na jednej strane medzi učebnými osnovami, učebnicou a učiteľom na jednej strane a žiakom na druhej strane.
Myslím si, že bude potrebné nejakým spôsobom toto protirečenie zblížiť. Určité východiská vidím práve v tom, čo je z obidvoch strán ponúkané.
Z jednej strany je to alternatívna možnosť určitého výberu a voľnosti pri úprave učebných osnov.
Z druhej strany to dáva určitú možnosť pedagogických experimentov, ktoré možno v nie ďalekej dobe postavia didaktiku matematiky na pevné nohy a v škole ju povýšia nad ciele, ktoré sú teraz dosť administratívne určované.
Rád by som v mojom dnešnom vystúpení vás oboznámil s výsledkami niektorých mojich experimentov, ktoré som uskutočnil na prvom a druhom stupni základnej školy. Chcem zdôrazniť, že ide o učivo, ktoré je predpísané učebnými osnovami a teda nie je rozširujúce.
Začnem teoretickými východiskami.
V spomínanom článku, prípadne „Teória vyučovania matematiky II“ sa proces vzniku poznatku nielen z hľadiska fylogenézy, ale aj ontogenézy charakterizuje piatimi etapami, ktoré sú rôzne dlhé a platia pre ne určité zákonitosti. Sú to:

- motivácia,
- separované modely,
- univerzálne modely,
- abstrakčný zdvih,
- kryštalizácia.

Nebudem ich tu rozoberať, lebo v podstate na nich ste boli odchovaní v škole. Predovšetkým vy mladší.
Pokiaľ sa tento proces z nejakého dôvodu nedodrží dochádza k formálnym poznatkom.
Ukážem jednoduchý príklad na zistenie formalizmu.
<u>Zlomky:</u>
Pre prácu v univerzálnych modeloch treba žiakov motivovať tak, aby to bol silný stimul pre prácu. Volil som rozprávku o černokňažníkovi. Tento býval v dome pri škole a lákal tam deti veľmi silnou vôňou koláčikov, ktoré piekol. Veľmi im chutili. Černokňažník do každého dával zvláštne látky, ktoré mu pomáhali vládnuť nad deťmi tak, že tieto mu museli posluhovať. Po čase objavili spôsob ako nad ním zvíťaziť. Každý

koláčik bol rozdelený na dve časti. Keď zistili aké veľké sú tie časti, tak moc černokňažníka sa stratila.
To bola základná osnova rozprávky, ktorá sa rozširovala a prispôsobovala podmienkam úloh, ktoré žiaci riešili.
Univerzálnymi modelmi koláčikov boli geometrické tvary kreslené v štvorcovej sieti.
Ako vyzerajú koláčiky, ukážem žiakom pomocou meotaru. Časť presvieteného tvaru prekryjem farebnou fóliou.
Prvé reakcie bývajú rôzne. Niektoré odpovede: polovina, jedna celá dve, polovica.
Farebnú časť preložímináč, aby to zodpovedalo rovnakému zlomku, ale iného tvaru.
Odpovede sa zhodnú v tom, že je to polovica.
Zobrazím jednu tretinu. Odpoveď je nejasná. Pri zobrazení dvoch tretín sa situácia komplikuje.
Prechádzam preto do nižšej etapy poznatkov a to do separovaných modelov.
Lámem kriedu, krájam jabĺčko na časti. Najväčší úspech má čokoláda, aj keď jej delenie nie až také presné. Pomáhame si pojmom spravodlivé rozdelenie.
Jednotlivým prípadom dávame číselné vyjadrenia a žiaci sú prekvapení, lebo každému musíme priradiť dve čísla. Až potom znova prechádzam na štvorcovú sieť.
Predstavy zlomkov vytváram čo najbohatšie a najrôznorodejšie. Tu tiež nechávam dostatočný priestor pre fantáziu detí.
Počet všetkých štvorčekov, z ktorých sa koláčik skladá je kľúčom k určeniu menovateľa a počet farebných štvorčekov udáva čitateľa.
Robíme úlohy s polštvorčekmi alebo inými menšími časťami, čo je vlastne rozširovaní zlomkov. Samozrejme, že nehovoríme o rozširovaní a krátení, len o inom rozdelení koláčikov.

Podľa tradičného vyučovaniam sa po zavedení zlomkov pokračuje v porovnávaní zlomkov, čo je pre mňa veľká záhada, prečo je tomu tak. Veď ak chcem porovnávať, potom predovšetkým musím vedieť počtové výkony, nakoľko sa porovnáva buď odčítaním alebo delením. Predpokladám, že autori to zaraďujú preto, lebo majú ľahké šípkové pravidlo. Je to však vrchol formalizmu, ak niečo robím a neviem prečo to robím. Je zrejmé, že aj v histórii vzniku poznatku o zlomkoch sa najskôr sčitovalo a až potom sa porovnávalo. Moje rozhodnutie pre postup najskôr robenie sčítania a odčítania a až potom porovnávania potvrdili samotné výsledky.

Sčitovanie

Prvý príklad, ktorý som zadal na sčitovanie zlomkov bol v abstraktnej podobe. Bol som zvedavý aká bude reakcia žiakov.
Úlohu som formuloval: Koľko je jedna tretina a jedna tretina?
Žiaci nesiahli po pomôckach a ich odpoveď bola tiež v abstraktnej úrovni.
Väčšina sa zhodla na dvoch šestinách. Niekoľko žiakov sa priklonilo k jednej polovici a jeden povedal, že je to jedna celá.
K výsledku dve šestiny sa dostali zrejme tým, že ak majú sčitovať, potom dôsledne sčitovali nielen čitatele, ale aj menovatele. Ostatné odpovede boli skôr odhadom, alebo hádaním.
Úlohu som formuloval do úrovne univerzálneho modelu: Jožko dostal 1/3 koláčika a Števko tiež 1/3 koláčika. Nakreslite koláčiky a povedzte koľko dostali spolu?
Paľko sebavedome pred tabuľou prehlásil, že z obrázka je jasné, že to musia byť dve tretiny a že je to isté ako štyri šestiny, keď si koláčik ináč rozdelíme.
Univerzálny model sa ukázal ako prostriedok na riešenie úlohy.
Po sčitovaní zlomkov s rovnakým menovateľom sme prešli k zlomkom so súdeliteľnými menovateľmi. To bolo trošku ťažšie, ale nakoľko sme už robili rozširovanie zlomkov tak aj to pomerne ľahko zvládli.
Horšie to bolo so zlomkami s nesúdeliteľnými menovateľmi.
Zaujímavé bolo to, že ak prišli na nejaký spôsob riešenia úloh, tento pri iných neplatil a oni zatiaľ nevedeli prísť na to, čo o tom rozhoduje.

Porovnávanie

Porovnávanie zlomkov som do vyučovania zaradil preto, aby sa u žiakov prehĺbili predstavy zlomkov, upevnilo sa učivo o sčítaní a odčitovaní zlomkov a aby sa naďalej prehlbovali rozumové operácie, ktoré sa dajú práve na matematike najvýraznejšie využívať.
Černokňažník upiekol koláčik, ktorý rozdelil tak, že Lacko dostal jednu polovicu a Alenka jednu tretinu koláčika. Kto dostal väčší kúsok koláčika?
Úloha nebola formulovaná do činnostnej podoby a preto aj odpovede boli v patričnej úrovni.
Väčšina si napísala zlomky a bez väčšieho uvažovania vyslovili odpovede:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

To boli tri riešenia, s ktorými prišli a súčasne tri skupiny.

Žiaci prvej skupiny svoje riešenie odôvodňovali tým, že dva je menej ako tri a preto aj ½ je menej ako 1/3. Svoje riešenie nepodporili žiadnou predstavou. Odvolávali sa na svoje predchádzajúce vedomosti. Odmietali porozumieť problému.

Druhé riešenie vzniklo preto, že si nakreslili dva rôzne koláčiky. Polovicu vymodelovali z koláčika skladajúceho sa z dvoch štvorčekov a tretinu z iného koláčika skladajúceho sa z troch štvorčekov.

V obidvoch prípadoch im vyšiel jeden štvorček a to pre nich znamenalo rovnosť zlomkov.

Tretia skupina mala riešenie správne, lebo si nakreslila jeden koláčik z troch štvorčekov a na ňom vymodelovali aj polovicu aj tretinu. Ich argumentácia bola jednoznačná: „Nemôžete porovnávať časti koláčikov, ktoré nie sú rovnaké.“

O koľko viac dostal Lacko ako Alenka?

Je to vnucujúca sa otázka, ktorá súvisí s porovnávaním.

Boli to hodiny polemík, omylov, mnohých nápadov a radosti z práce, ak sa im niečo vydarilo a ak prišli na nejaký nový poznatok.

Najnedôverčivejšie pracoval Martin. Bol ľavákom v práci bol veľmi pomalý a o jeho prácu v škole sa starli jeho staršie sestry, ktoré ho aj doúčali. Tieto ho naučili tradičný spôsob práce so zlomkami. Martin mal nielen pri písaní, ale aj pri kreslení značný handicap, preto uprednostňoval radšej abstrakciu.

Lucia, prirodzená autorita triedy raz pred hodinou vstala a v mene celej triedy predniesla takúto sťažnosť – lepšie povedané žiadosť: „Pán učiteľ, Martin znevažuje naše počítanie a tvrdí, že jeho počítanie je lepšie a rýchlejšie. Dajte Martinovi a Paľovi taký príklad, ktorý Paľo vypočíta naším spôsobom a Martin ho nevypočíta.“

Požiadavka bola veľmi jednoznačná a aj napriek mojim pochybnostiam vyhovieť žiakom predsa som zadal príklad.

Začal som rozprávkou: Kde bolo tam bolo bol jeden zázračný les, v ktorom žili mravce a tie sa správali tak, že každý čo našiel čo aký malý kúsok potravy vždy zjedol len polovicu z nej a zvyšok nechal ostatným. Cez horu išla Marienka a tá stratila kocku cukru. Prvý mravček zožral polovicu, druhý zase zo zvyšku polovicu a tak to pokračovalo ďalej, čo sa dá zapísať takto: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1/8 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$

Úlohou je vypočítať súčet zlomkov, ktorý nie je ukončený.

Hneď sa ozval smiech s argumentáciou, ako môže mravček zožrať pol kocky cukru?

Mali pravdu, lebo reálna situácia nemohla zodpovedať tomuto zadaniu. Situáciu som zachránil tým, že som zdôraznil, že to bol zázračný, rozprávkový les a tam žili mravce rôznej veľkosti. To prijali a venovali sa riešeniu úlohy.

K obidvom aktérom sa pridali na pomoc, povzbudzovanie a pozorovanie rôzni kibici. Trieda sa rozdelila na tri skupiny. Tretiu tvorili tí, ktorí sa neangažovali a čakali ako súťaž dopadne.
Prví prišli Martinovi priaznivci s tým, že Martin to nevie, ale povedal, že to je asi jedna alebo jedna jednina. Martin bol teda neúspešný, aj keď výsledok vlastne uhádol.
Paľko riešil úlohu tak, že si nakreslil štvorček, čo bola stena kocky o veľkosti asi jeden centimeter a začal ho deliť na polovice. Po niekoľkých deleniach však mu to nešlo, lebo tie časti boli veľmi malé, tak si zobral čistý papier a nakreslil si štvorček o strane asi jeden decimeter. O chvíľu prišiel s tým, že asi osemnásty mravec dostane tak málo, že ani nebude vedieť či dačo zožerie. Pre neho sa premenná blížila veľmi rýchlo k nule. Predstavy zlomkov však fungovali správne.
S formalizovaním takýchto geometrických radov sa stretávajú žiaci základných škôl v triedach s rozšíreným vyučovaním matematiky.
Aj tu im bol bližší geometrický univerzálny model, na ktorom úspešne šiestaci riešili súčty geometrických radov.
Po takejto skúsenosti sme riešili množstvo úloh zadaných v univerzálnych modeloch na aritmetické rady.
Ako posledné spomeniem prípravu žiakov na násobenie desatinných čísel.

ZÁVER

V univerzálnych modeloch si žiaci vytvárajú predstavy abstraktných pojmov akými sú číselné vyjadrenia zlomkov a plne pochopia prečo a ako sa s nimi robia určité operácie. Na základe nich sú schopní sami dôjsť k zovšeobecneniu a abstrakciám. Pri riešení úloh v univerzálnych modeloch robia žiaci analýzu príkladu, zdôvodňujú a robia syntézu, čo považujem za vážny výchovný cieľ pre utváranie produktívneho myslenia žiakov.

Problémy pri vyučovaní :

- Čas na dosiahnutie výsledkov merateľných tradičným spôsobom je dlhší ako povoľujú učebné osnovy. Učivo som preto rozvrhol do viacerých nižších ročníkov.
- Štruktúra stavby učiva v učebniciach nevyhovuje problémovej metóde. Chýbajú kvalitné zbierky príkladov vhodných na riešenie v jednotlivých úrovniach. V doterajších zbierkach je jednoznačne preferované mechanické počítanie.
- Náročnejšia príprava učiteľa.
- Nový netradičný vzťah medzi učiteľom a žiakom, ktorý kladie na psychiku učiteľa zvýšené nároky.

Klady:
- Vysoká aktivizácia žiakov.
- Zabezpečenie rozvoja produktívneho a abstraktného myslenia.
- Uplatňovanie neformálneho výchovného cieľa.

Literatúra:
Bürger, H. – Fischer, R. – Malle, G.: Človek a matematika. SPN Bratislava 1992.
Hejný, V. – Hejný, M. : Pracovné materiály školiaceho strediska TMM. KPÚ Banská Bystrica 1977.
Hejný, V. – Hejný, M.: Prečo je matematika ťažká? Pokroky matematiky, fyziky, astronómie 1978, r. 23, č. 2, s. 85 – 93.
Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky II. SPN Bratislava 1990.