Łańcuchy Markowa w szkolnej matematyce

Ireneusz Krech

ABSTRACT: We will consider certain argumentations concerning probability of events related to homogeneors Markov chains.

Łańcuchy Markowa stanowią - na pozór - trudny, a więc nie dający się adaptować na grunt matematyki szkolnej, fragment teorii prawdopodobieństwa. Stochastyczne modele tych łańcuchów są bowiem nieskończonymi przestrzeniami probabilistycznymi. Przedmiotem rozważań są pewne argumentacje dotyczące prawdopodobieństwa zdarzeń w takich przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych. Istotą tych argumentacji jest redukcja rachunków do pewnych sum skończonych.

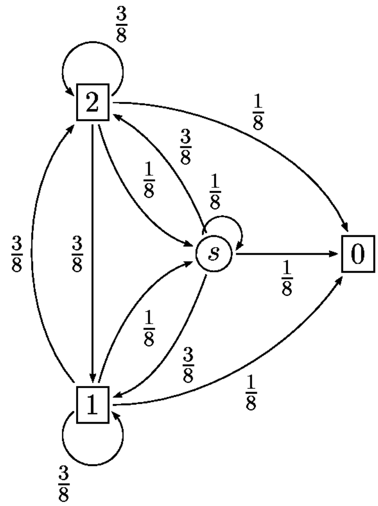
Rozważmy następującą grę losową. Plansza do gry g_{x-y} składa się z dwóch okręgów: o_v i o_w. Na początku wewnątrz okręgu o_v leży x monet a w okręgu o_w y monet, gdzie x+y=3 i y<3. W grze uczestniczy dwóch graczy: G_a i G_b. Gracze rzucają na przemian trzema monetami znajdującymi się na planszy do gry. Monety, na których wypadły orły, pozostają w kole, w którym się znajdowały, monety, na których wypadły reszki, zostają przeniesione do sąsiedniego koła. Jeśli po rzucie wszystkie monety znalazły się w kole o_w, to gracz który rzucał zwycięża. Załóżmy, że grę rozpoczyna gracz G_a.

Doświadczenie przeprowadzane w grze oznaczamy przez d_{x-y}. Niech A_{x-y} (B_{x-y}) oznacza zdarzenie: w grze g_{x-y} zwycięży gracz G_a (G_b).

Doświadczenie losowe d_{x-y} przebiega etapami. Na pojedyńczy etap doświadczenia składa się rzut monetami i rozmieszczenie monet w kołach. Stan doświadczenia po *n*-tym etapie jest parą (v_n, w_n), gdzie v_n jest liczbą monet w kole o_v a w_n jest liczbą monet w kole o_w (po *n*-tym etapie). Ponieważ $v_n + w_n$=3, więc stan doświadczenia po *n*-tym etapie jednoznacznie określa liczba v_n. Możliwe stany tworzą zbiór *S*= $\{0,1,2,3\}$. Interpretujmy te stany jako węzły grafu. Stan początkowy *x* staje się węzłem startowym, stan 0 - węzłem brzegowym (zob. [2]). Przez p_{jk} oznaczmy prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie ze stanu *j* po danym etapie przejdzie do stanu *k* po etapie następnym. Jeśli $p_{jk} > 0$, to węzeł *j* łączymy z węzłem *k* krawędzią. Liczbę p_{jk} wpisujemy obok tej krawędzi. W ten sposób otrzymujemy graf stochastyczny.

1. Wyjdźmy od gry losowej g_{3-0}. Graf stochastyczny doświadczenia losowego d_{3-0} przedstawia rys. 1.

Przebieg gry g_{3-0} można symulować za pomocą następującego doświadczenia losowego. Mamy cztery urny: U_1, U_2, U_3, U_0, w każdej z urn U_1, U_2, U_3 są trzy kule o numerze 1, trzy o numerze 2, jedna o numerze 3 i jedna o numerze 0 a urna U_0 zawiera tylko jedną kulę o numerze 0. Na początku losujemy kulę z urny U_1 i jeśli zostanie wylosowana kula o numerze *k*, to następne losowanie odbywa się z urny U_k, gdzie *k*=0,1,2,3. Losowanie trwa tak długo, aż zostanie wylosowana kula o numerze 0. Opisane powyżej doświadczenie jest schematem urnowym jednorodnego łańcucha Markowa (zob. [2]).

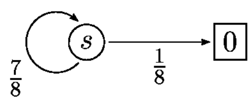


Rys. 1

Przy obliczaniu prawdopodobieństwa zwycięstwa poszczególnych graczy wygodnym środkiem argumentacji jest właśnie ten graf stochastyczny.

Stany 0,1 i 2 nazywamy wewnętrznymi. Zauważmy, że jeśli tylko doświadczenie d_{3-0} znajdzie się którymś ze stanów wewnętrznych, to po kolejnym rzucie monetami z prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{8}$ przejdzie do stanu 0 (i wówczas gra się kończy zwycięstwem gracza wykonującego rzut), lub z prawdopodobieństwem równym $\frac{7}{8}$ przejdzie do jednego ze stanów wewnętrznych.

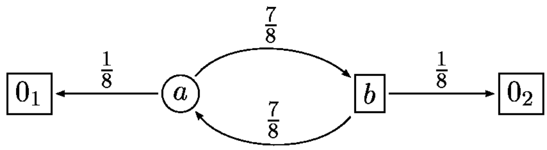
Z tych symetrii wynika, że graf z rys. 1 redukuje się do grafu z rys. 2.



Rys. 2

Przebieg gry można symulować następującym błądzeniem pionka po grafie stochastycznym z rys. 2. Z urny U_{7*1} o siedmiu kulach białych i jednej czarnej, gracze losują na przemian ze wracaniem kulę. Jeśli wylosowana kula jest czarna, to gracz, który wylosował tę kulę, przesuwa pionek do węzła 0 (i wówczas zwycięża), jeśli wylosowana kula jest biała, to pionek pozostaje w węźle startowym. Zwycięża ten z graczy, który jako pierwszy przesunie pionek do węzła 0.

Przebieg gry i jej rezultat można rejestrować, jeśli uwzględnimy czas trwania gry. Po tej modyfikacji graf doświadczenia d_{3-0} przedstawia rys. 3.



Rys. 3

Na początku stawiamy pionek w węźle a , następnie gracz G_a losuje kulę z urny U_{7*1} i jeśli wylosowaną kulą jest kula czarna, to przesuwa pionek do węzła 0_1 (wówczas zwycięża), jeśli zaś wylosowaną kulą jest kula biała, to przesuwa pionek do węzła b i wówczas kulę z urny U_{7*1} losuje gracz G_b. Jeśli gracz G_b wylosuje kulę czarną, to przesuwa pionek do węzła 0_2 (i zwycięża), jeśli zaś wylosuje kulę białą, to przesuwa pionek do węzła a i wówczas ponownie losuje kulę z urny U_{7*1} gracz G_b. Procedura ta jest powtarzana do momentu, aż pionek trafi do jednego z węzłów 0_1 lub 0_2 .

Gracz G_a zwycięży wtedy i tylko wtedy, gdy pionek dotrze po nieparzystym rzucie monetami do węzła 0 grafu z rys. 2 lub - co na jedno wychodzi – gdy dotrze do węzła 0_1 na grafie z rys. 3. Gracz G_b zwycięży, gdy pionek dotrze po parzystym rzucie monetami do węzła 0 grafu z rys. 2 lub - co na jedno wychodzi - gdy dotrze do węzła 0_2 na grafie z rys. 3. Z powyższych interpretacji wynika, że:

1) W przypadku grafu z rys. 2 jest

$$P(A_{3-0}) = \frac{1}{8} + (\frac{7}{8})^2 \cdot \frac{1}{8} + (\frac{7}{8})^4 \cdot \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1-(\frac{7}{8})^2} = \frac{8}{15} \quad \text{oraz}$$

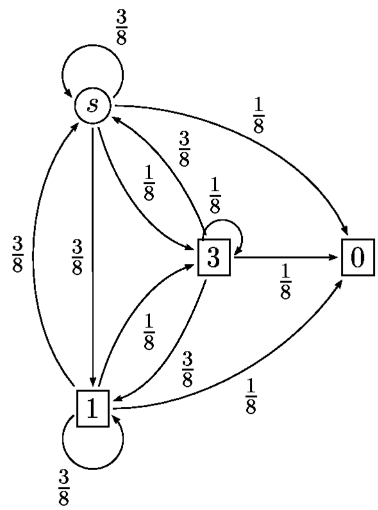
$$P(B_{3-0}) = \frac{7}{15.}$$

2) Niech $P(A_{3-0}) = x$ oraz $P(B_{3-0}) = y = 1 - x$. Z grafu z rys. 3 wynika, że:

$$x = \frac{1}{8} + x \cdot (\frac{7}{8})^2,$$

czyli, że $x = \frac{8}{15}$, a zatem $y = \frac{7}{15}$.
Gracz rozpoczynający grę ma więc większe szanse na zwycięstwo.

2. Rozważmy grę g_{2-1}. Stanem początkowym doświadczenia d_{2-1} jest stan 2. Graf stochastyczny doświadczenia d_{2-1} przedstawia rys. 4.



Rys. 4

Analogicznie, jak dla gry g_{3-0}, jeśli tylko doświadczenie d_{2-1} znajdzie się w którymś ze stanów wewnętrznych, to po kolejnym rzucie monetami z prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{8}$ przejdzie do stanu 0 (i wówczas gra się kończy zwycięstwem gracza wykonującego rzut), lub z prawdopodobieństwem równym $\frac{7}{8}$ przejdzie do jednego ze stanów wewnętrznych. Wynika stąd, że:

$$P(A_{2-1}) = \frac{8}{15} \quad \text{i} \quad P(B_{2-1}) = \frac{7}{15}.$$

Nietrudno zauważyć, że rozważając grę g_{1-2} dostajemy:

$$P(A_{2-1}) = \frac{8}{15} \quad \text{i} \quad P(B_{1-2}) = \frac{7}{15}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$P(A_{3-0}) = P(A_{2-1}) = P(A_{1-2}) = \frac{8}{15} \quad \text{i} \quad P(B_{3-0}) = P(B_{2-1}) = P(B_{1-2}) = \frac{7}{15}.$$

Z rozważań wynika zaskakujący wniosek: Szanse graczy na zwycięstwo nie zależą od stanu początkowego, przy czym gracz rozpoczynający grę zwycięża z prawdopodobieństwem równym $\frac{8}{15}$, natomiast drugi z graczy zwycięża z prawdopodobieństwem równym $\frac{7}{15}$.

Rozważania są propozycją adaptacji jednorodnych łańcuchów Markowa na grunt matematyki szkolnej.

Literatura:

[1] A. Płocki, *Gry Penneya i paradoksy stochastyczne*, Matematyka **1** (1999), 12-18.
[2] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.
[3] M. Major, B. Nawolska, *Gry Penneya i wartość oczekiwana*, Matematyka **1** (1999), 19-22.
[4] I. Krech, *Rachunek prawdopodobieństwa i sumowanie szeregów*, Matematyka **1** (2000), 19-24.
[5] A. Engel, T. Varga, W. Walser, *Strategia czy przypadek? Gry kombinatoryczne i probabilistyczne*, WSiP, Warszawa 1979.

Ireneusz Krech
Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna w Krakowie
Ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
e-mail: ikrech@wsp.krakow.pl