

Vyšetrovanie riešiteľnosti konštrukčných úloh pomocou trigonometrie

Božena Koreňová

ABSTRACT: In the first part, the presented paper considers the importance and mission of teaching mathematics at elementary and secondary schools. The second part gives a set of construction problems for utilising the relationship between the central angle and the angle at circumference, i. e. also the utilisation of Thales circle as well as solvability conditions under which the goniometric functions in the right-angled triangle are used. The set of the given problems is a particular example of how the indicated instructional goals can be achieved by means of an appropriate combination and sequencing of problems.

Filozofické a psychologické aspekty výučby matematiky

O tom, ako žiaci, študenti i celá verejnosť nejaví záujem o hlbšie vedomosti z matematiky sa už popísalo dosť. Ja chcem vo svojom príspevku ukázať, že situácia nie je až taká beznádejná a odstránenie nezájmu zo strany verejnosti a mládeže je plne v rukách učiteľov matematiky. Netreba hľadať príčiny mimo nás, pretože to nerieši tento problém, bolo by dobré sa však zamyslieť nad tým, ako matematiku urobiť zaujímavou a použiteľnou pre bežného človeka, dieťaťa, ktoré sa nechce matematike profesionálne venovať. Ciest a spôsobov je veľa, neexistuje univerzálny návod použiteľný na všetkých typoch škôl a všetkými učiteľmi. Každý z nás je iný a používa iné prednosti svojej osobnosti pri výklade učiva, iné témy ho oslovia, sú mu blízke. Je však dôležité, aby spôsob výkladu a obsah učiva harmonizovalo s celkovou štruktúrou jeho osobnosti, záujmov, aby kultúra jeho správania a komunikácie korešpondovala s tým, čo sa snaží na hodinách matematiky deti naučiť. Podľa môjho názoru nie je až také podstatné, aké

učivo preberieme, ale akým spôsobom ho servírujeme, či dokážeme v ňom nájsť univerzálny princíp na riešenie iných problémov a upozorniť naň študentov. Pri príprave na vyučovanie treba starostlivo zvážiť postupnosť krokov i príkladov, aby deti zaevidovali vnútornú štruktúru témy a sami dokázali predpovedať, čo bude ďalej nasledovať, čo v danej téme chýba, kde je medzera, ktorú treba zaplniť. Mali by pochopiť, ako sa tvoria príklady, ako sa na jednoduchú schému problému dajú nabaľovať ďalšie. Potrebujú poznať princípy tvorby a osvojiť si kultúru myslenia, matematici to nazývajú stratégiou myslenia. Nebudem sa zaoberať presnými definíciami, pretože obsah všetkých psychologických pojmov je závislý na aktuálnej úrovni poznania ľudstva i jednotlivca a je teda pohyblivý, neukončený, je to proces, zmena.

Vo všeobecnosti pri výučbe matematiky nám ide o kvalitu rozumovej činnosti, moderne povedané o stratégiu myslenia, no nemali by sme si ju položiť ako hlavný cieľ, ale iba ako prostriedok na ceste k zmysluplnému a šťastnému životu. Možno si ani neuvedomujeme, že umelým oddeľovaním rozumovej a citovej výchovy produkujeme v krajných prípadoch mysliace, no bezcitné bytosti, neschopné myslieť na iných, vnímať potreby iného, pre ktorých je dôležitá iba jeho vlastná úspešnosť. Vymýšľame príklady o vraždách, klamstve, podvodoch, krádežiach, matematické hry, v ktorých učíme deti vyhrávať, ale nie spolupracovať, nútime ich v každom vidieť protivníka, konkurenta. Aká je hierarchia hodnôt a citová vyspelosť autorov týchto príkladov a problémov? Nestaviame proti sebe prílišným zdôrazňovaním správnosti myslenia dve rovnako dôležité zložky osobnosti jedinca - racionálnosť a emocionalitu? Našťastie psychologická veda už natoľko pokročila, že pri hodnotení kvality človeka sa začína uvažovať nielen o inteligentnom kvociente, ale aj o emocionálnom.

Stratégia, kultúra a kvalita myslenia, správne, tvorivé a vedecké myslenie – to sú pojmy, ktoré sa bežne vyskytujú v metodických príručkách, v knihách o učení, poznávaní, tvorbe, nájdeme ich v rôznych publikáciách o psychológii. Definícií existuje veľa a ja som čerpala podnety z [1]. Pri vyučovaní matematiky bolo a je моjím cieľom naučiť študentov nielen riešiť príklady, ale si ich aj vymýšľať, hľadať nové súvislosti, paralely s inými oblasťami, poukazovala som na to, ako matematický prístup k problémom im môže uľahčiť život, komunikáciu s ľuďmi, ako im umožní vyhýbať sa konfliktom a nedorozumeniam, ako ich naučí šťastne a harmonicky žiť. Nie je to ľahko dosiahnuteľný cieľ, je to celoživotná púť každého učiteľa, ktorý chce zanechať trvalé stopy vo vedomí svojich študentov.

Konštrukčných príkladov v stredoškolskej matematike neustále ubúda a pritom je to téma, ktorá dokáže zaujať aj tých študentov, ktorí tradične zvyknú odolávať matematickému mysleniu. Ja som tejto téme zvykla venovať zvýšenú pozornosť. Deti prídu zo základnej školy s predstavou, že riešenie konštrukčných príkladov spočíva vo vzornom vypracovaní rozboru, postupu, diskusie a záveru, samotnú konštrukciu však málokedy dokážu dotiahnuť do konca. Vo všeobecnosti nevedia zručne narábať s rysovacími pomôckami. Touto témou som chcela odstrániť chybnú predstavu o geometrii, ktorá pramenila z prehnaného uprednostňovania formálnych zápisov. Sústavou príkladov som sledovala niekoľko cieľov: rutinné používanie rysovacích pomôcok, presne, čisto a prehľadne rysovať, rozoznávať prvky dané a hľadané – často využívali pri konštrukcii hľadané veličiny, miesto daných, objavovanie skrytých súvislostí a vzťahov na základe kvalitného náčrtku - tzv. detektívne pátranie, osvojenie jednoduchých, no výstižných zápisov postupu konštrukcie, zvyknúť si na neriešiteľnosť a vedieť ju zdôvodniť, schopnosť nájsť hraničnú situáciu, kedy sa riešiteľné stáva neriešiteľným a naopak.

Hneď na úvod bez upozornenia a komentára som dala narysovať príklad, ktorý nemal riešenie, po chvíli v triede nastal šum, dohady, hádky, osobnosť každého sa prejavovala ináč a ja som si mohla v pohode z ich reakcií prečítať charakteristiku každého študenta. Týmto krokom som vzbudila všeobecný záujem o vyšetrovanie riešiteľnosti a potrebu precízne rysovať. Príkladov som im mohla zadať akékoľvek množstvo, narysovali všetko, aby si overili správnosť podmienok, ktoré sami našli.

V uvedených príkladoch bolo treba zostrojiť trojuholník ABC z daných prvkov využitím vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom, teda špeciálne aj Thálesovej kružnice, vlastnosti trojuholníka a goniometrické funkcie som využila na určovanie podmienok riešiteľnosti. V príkladoch uvádzam trojicu zadaných prvkov, podmienku riešiteľnosti, krátke vysvetlenie postupu konštrukcie, a niekoľko variant rozmerov daných prvkov aj s počtom riešení v jednej polrovine. **Je zrejmé, že podmienky riešiteľnosti možno nájsť z hraničnej situácie, teda z prípadu, kedy nastáva jediné riešenie.** Vzhľadom na predpísaný rozsah strán neuvádzam v notoricky známych úlohách rozbor, v prípade jediného riešenia beriem približnú hodnotu, so študentmi sa dá o tom diskutovať, no pri rysovaní rozdiely rádovo vyčísliteľné v stotinách a tisícinách centimetra nemožno brať do úvahy. Postup konštrukcie je stručný a mal by stačiť pre pedagóga, so študentmi ho treba rozobrať podrobnejšie i použitím náčrtku. Predpokladám, že študenti ovládajú zostrojenie kružnicového oblúka nad danou úsečkou – tetivou

s požadovanou veľkosťou obvodového uhla. Ak nerysujú presne, riešenie im nemusí vyjsť.

Súbor konštrukčných príkladov a podmienky riešiteľnosti

1. Príklad: Zostrojte trojuholník, ak je daná jedna strana, výška na túto stranu a protíahlý uhol.

Podmienka riešiteľnosti:

$$0 < v_a \leq \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$$

Postup konštrukcie: Zostrojiť

- 1/ úsečku veľkosti danej strany
- 2/ priamku p rovnobežnú s danou úsečkou vo vzdialenosti danej výšky
- 3/ kružnicu k nad úsečkou, ktorej prislúcha daný obvodový uhol
- 4/ prienik priamky p a kružnice k – hľadaný chýbajúci vrchol trojuholníka ABC

Numerické zadanie:

- | | | | | |
|----|----------------------|------------------------|---------------------|-------------------|
| a/ | $a = 6,8 \text{ cm}$ | $v_a = 2,8 \text{ cm}$ | $\alpha = 90^\circ$ | – dve riešenia |
| b/ | $c = 7 \text{ cm}$ | $v_c = 3,3 \text{ cm}$ | $\gamma = 50^\circ$ | – dve riešenia |
| c/ | $b = 6 \text{ cm}$ | $v_b = 4,4 \text{ cm}$ | $\beta = 70^\circ$ | – žiadne riešenie |
| d/ | $b = 8 \text{ cm}$ | $v_b = 2,3 \text{ cm}$ | $\beta = 120^\circ$ | – jedno riešenie |

Poznámka 1: Pri pravouhlom trojuholníku sa podmienka zjednoduší a študenti hneď prídu na to, že výška musí byť menšia nanajvýš rovná ako polovica najväčšej strany a súčasne si uvedomia, že vlastnosť Thálesovej kružnice je len špeciálnym prípadom všeobecného vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom v kružnici.

Poznámka 2: Tento, ale i nasledujúce typy príkladov môžeme obmieňať inou formuláciou úlohy tak, aby jeden zo zadaných prvkov si študenti volili sami, udáme iba počet riešení. Naučia sa tak naťahovať podmienkou a využívať ju pri tvorbe vlastných príkladov. Získavajú nadhľad a úlohy spájajú do väčších celkov so spoločným jadrom problému. Iné formulácie úloh uvediem na konci kapitoly.

2. **Príklad : Zostrojte trojuholník, ak je daná strana, ťažnica na túto stranu a protiahlý uhol**

Podmienka riešiteľnosti: Pre uhol menší alebo rovný 90°

$$\frac{a}{2} \leq t_a \leq \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$$

Pre uhol väčší ako 90° - nerovnosti platia naopak, teda

$$\frac{a}{2} > t_a \geq \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$$

Postup konštrukcie: Zostrojiť

1/ úsečku BC veľkosti danej strany a

2/ kružnicu k_1 so stredom na strane BC a

s polomerom rovným

veľkosti ťažnice

3/ kružnicu k_2 nad úsečkou BC- tetivou , ktorej

prislúcha obvodový

uhol danej veľkosti α

4/ prienikom oboch kružníc dostávame hľadaný

vrchol A

trojuholníka ABC

Numerické zadanie:

a/ $a = 7$ cm $t_a = 5$ cm $\alpha = 60^\circ$ - dve riešenia

b/ $b = 5$ cm $t_b = 3,4$ cm $\beta = 72^\circ$ - jedno riešenie

c/ $a = 7$ cm $t_a = 2$ cm $\alpha = 136^\circ$ - dve riešenia

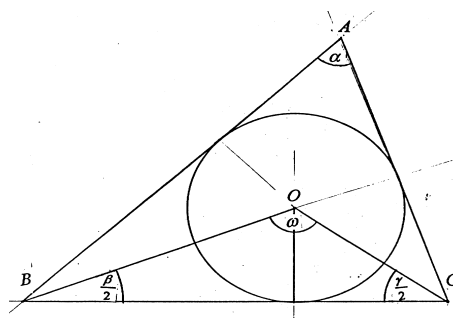
d/ $c = 7$ cm $t_c = 3,3$ cm $\gamma = 50^\circ$ - žiadne riešenie

3. **Príklad : Daná je strana, protiahlý uhol a polomer vpísanej kružnice**

Podmienka riešiteľnosti:

$$0 < \rho \leq \frac{a}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right).$$

$$\text{Rozbor: } \omega = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{180 - \alpha}{2}, \quad \omega = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$



Postup konštrukcie: Zostrojiť

1/ stranu BC danej veľkosti

2/ kružnicový oblúk k nad tetivou BC

s obvodovým uhlom

$$\omega = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

3/ $p \parallel BC$ vo vzdialenosti polomeru ρ

4/ prienik $k \cap p = \{O\}$ - stred vpísanej kružnice

5/ bod A využitím uhlov β, γ

Numerické zadanie:

a/ $c = 6 \text{ cm}$ $\gamma = 90^\circ$ $\rho = 2,1 \text{ cm}$ - žiadne riešenie

b/ $a = 6,2 \text{ cm}$ $\alpha = 48^\circ$ $\rho = 1,7 \text{ cm}$ - dve riešenia

c/ $b = 7 \text{ cm}$ $\beta = 56^\circ$ $\rho = 2,1 \text{ cm}$ - jedno riešenie

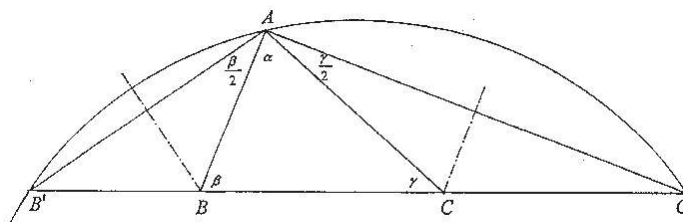
Poznámka: Postup konštrukcií dostaneme cyklickou zámenou.

4. **Príklad: Zostrojte trojuholník, ak je daný obvod, výška na jednu stranu a protíľahlý uhol k tejto strane.**

Podmienka riešiteľnosti:

$$0 < v_a \leq \frac{o}{2} \cotg\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$$

Rozbor: $\omega = \alpha + \frac{\beta + \gamma}{2} \Rightarrow \omega = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$



Postup konštrukcie: Zostrojiť

1/ úsečku veľkosti obvodu $B'C'$

2/ kružnicový oblúk k nad tetivou $B'C'$

s obvodovým uhlom $\omega = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

3/ priamku $p \parallel B'C'$, ich vzdialenosť je rovná výške v_a

4/ prienik $k \cap p = \{A\}$

5/ vrcholy B, C pomocou osí úsečiek $B'A, C'A$

Numerické zadanie:

a/ $o = 15,8 \text{ cm}$ $v_a = 2,8 \text{ cm}$ $\alpha = 90^\circ$ - dve riešenia

b/ $o = 16 \text{ cm}$ $v_b = 4 \text{ cm}$ $\beta = 72^\circ$ - jedno riešenie

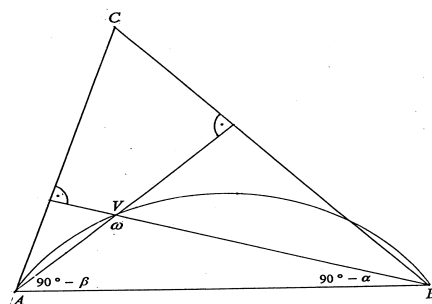
c/ $o = 15 \text{ cm}$ $v_c = 4,2 \text{ cm}$ $\gamma = 68^\circ$ - žiadne riešenie

5. Příklad: Zostrojte trojuholník, ak je daná jedna strana, protíahlý uhol a vzdialenosť ortocentra V – priesečníka výšok od tejto strany.

$$\text{Podmienka riešiteľnosti: } 0 < m \leq \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

kde m je vzdialenosť ortocentra od danej strany.

$$\text{Rozbor: } \omega = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta \Rightarrow \omega = 180^\circ - \gamma$$



Postup konštrukcie: Zostrojit'

- 1/ stranu AB
- 2/ kružnicový oblúk k nad tetivou AB
s obvodovým uhlom $\omega = 180^\circ - \gamma$
- 3/ priamku $p \parallel BC$ vo vzdialenosti m
- 4/ $p \cap k = \{V\}$
- 5/ použitím výšok v_a a v_b vrchol C

Numerické zadanie:

- | | | | | |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| a/ | $a = 7,6 \text{ cm}$ | $\alpha = 110^\circ$ | $m = 5 \text{ cm}$ | - dve riešenia |
| b/ | $b = 8 \text{ cm}$ | $\beta = 70^\circ$ | $m = 2,8 \text{ cm}$ | - jedno riešenie |
| c/ | $c = 6,8 \text{ cm}$ | $\gamma = 52^\circ$ | $m = 2 \text{ cm}$ | - žiadne riešenie |

6. Príklad: Zostrojte trojuholník, ak je daná jedna strana, protiľahlý uhol a rozdiel zvyšných strán.

Podmienka riešiteľnosti: $0 < |a - b| < c$

Rozbor: $\omega = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \omega = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$



2/ kružnicový oblúk k_I nad tetivou AB

s obvodovým uhlom

3/ kružnicu $k_2 = (B, r = a - b)$

4/ $k_1 \cap k_2 = A'$

5/ kružnicový oblúk k_3 nad tetivou AB

s obvodovým uhlom γ

6/ bod C – predĺžením polpriamky BA'

Numerické zadanie: $a/$ $c = 6 \text{ cm}$ $a - b = 3 \text{ cm}$ $\gamma = 70^\circ$ - jedno riešenie

b/ $c = 6,5 \text{ cm}$ $b - a = 4 \text{ cm}$ $\gamma = 48^\circ$ - jedno riešenie

c/ $c = 5,8 \text{ cm}$ $a - b = 3,5 \text{ cm}$ $\gamma = 100^\circ$ - jedno riešenie

Iné formulácie konštrukčných úloh: Výsledky sú v približných hodnotách.

7. Příklad: Doplňte chýbajúci údaj tak, aby úloha mala jedno riešenie.

Numerické zadanie:

a/ $a = 5,8 \text{ cm}$ $\alpha = 50^\circ$ $v_a = ?$ ($6,2 \text{ cm}$)

$$b/b = 4,8 \text{ cm} \quad v_b = 3 \text{ cm} \quad \beta = ? \quad (43,6^\circ)$$

$c/c = 6 \text{ cm} \quad \gamma = 90^\circ \quad t_c = ? \quad (3 \text{ cm})$

$$d/c = 6,8 \text{ cm} \quad t_c = 2 \text{ cm} \quad \gamma = ? \quad (118^\circ)$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{e/ } c = 6,8 \text{ cm} & \gamma = 110^\circ & \rho = ? & (1 \text{ cm}) \\
 \text{f/ } o = 14 \text{ cm} & v_a = 4,9 \text{ cm} & \alpha = ? & (40^\circ) \\
 \text{g/ } m = 2 \text{ cm} & \gamma = 80^\circ & c = ? & (4,8 \text{ cm})
 \end{array}$$

8. Príklad: Doplňte chýbajúci údaj tak, aby úloha mala 2 riešenia.

Numerické zadanie:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a/ } a = 5 \text{ cm} & \alpha = 72^\circ & v_a = ? & (v_a < 3,44 \text{ cm}) \\
 \text{b/ } b = 6 \text{ cm} & t_b = 2,5 \text{ cm} & \beta = ? & (\beta < 50^\circ) \\
 \text{c/ } \gamma = 60^\circ & \rho = 1,5 \text{ cm} & c = ? & (c > 5,19 \text{ cm}) \\
 \text{d/ } \alpha = 52^\circ & v_a = 3 \text{ cm} & o = ? & (o > 9,6 \text{ cm}) \\
 \text{e/ } m = 3 \text{ cm} & c = 8 \text{ cm} & \gamma = ? & (\gamma > 73,7^\circ)
 \end{array}$$

9. Príklad: O koľko musím zmenšiť výšku (ťažnicu, polomer vpísanej kružnice, vzdialenosť ortocentra), aby úloha mala aspoň jedno riešenie?

Numerické zadanie:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a/ } c = 3,5 \text{ cm} & \gamma = 50^\circ & \text{zmenši výšku} & v_c = 3 \text{ cm} \\
 \text{b/ } a = 7,4 \text{ cm} & \alpha = 60^\circ & \text{zmenši ťažnicu} & t_a = 7 \text{ cm} \\
 \text{c/ } b = 6,6 \text{ cm} & \beta = 44^\circ & \text{zmenši polomer vpísanej kružnice} & \rho = 3 \text{ cm} \\
 \text{d/ } c = 6 \text{ cm} & \gamma = 80^\circ & \text{zmenši vzd. ortocentra od strany c} & m = 3 \text{ cm}
 \end{array}$$

10. Príklad: Aké príklady na danú tému by napadli Vás?

Adresa:

Mgr. Božena Koreňová
 Technická univerzita
 Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
 Masarykova 24
 960 53 Zvolen
 e-mail: korenova@vsld.tuzvo.sk