Štvorčekový papier ako most medzi aritmetikou a geometriou

Milan Hejný, Karlova Univerzita, Pedagogická fakulta, Praha

ABSTRACT: Arithmetic and geometry, two fundamental structures of school mathematics, used to be regarded as two different worlds. However, by means of grid paper it is possible to start creating pupils' understanding of the arithmetic - geometry linkage at least from grade 3. Moreover, this mathematical environment allows to pose a lot of interesting non-traditional problems and serves as an effective tool in constructivistic approach to mathematics education.

1. Úvod

Štvorčekový papier je často používaný pri rôznych úlohách, hrách, popise geometrickiých situácií, výskume,... Niekoľko titulov je uvedených v literatúre. Štvorčekový papier je účinný nástroj pri zavádzaní súradníc. Súradnice prepojujú navzájom svet geometrie so svetom aritmetiky a neskôr aj algebry. Preto môžeme štvorčekový papier využiť ako nástroj, ktorý pomáha žiakom chápať súvislosti medzi tromi uvedenými svetmi. Didaktické úvahy o tomto nástroji sú predmetom nášho článku.

Štvorčekový papier sme často využívali v našom experimentálnom vyučovaní na základnej škole v 3. až 8. triede v sedemdesiatych a osemdesiatych rokoch. Systematicky sme ho potom začali využívať s kolegyňou Darinou Jirotkovou v ostatných šiestich rokoch pri príprave budúcich učiteľov - elementaristov na Pedagogickej fakulte v Prahe. V oboch prípadoch sme vo vyučovaní volili výrazne konštruktivisticky prístup. Pri príprave budúcich učiteľov sme naviac s poslucháčmi často o edukačných štýloch diskutovali. Argumentami opretými o naše skúsenosti sme ich nabádali k nadobúdaniu vlastných skúseností a k ich analýze. Cieľom takých experimentov a analýz je jednak dôvernejšie poznanie skúmaného prostredia, jednak, ba najmä, precítenie rozdielu medzi transmistívnym vyučovaním, v ktorom učiteľ vysvetľuje a žiak znalosti preberá a konštruktivistickým vyučovaním založenom na presvedčení, že **poznanie nemožno preniesť z mysle učiteľa priamo do mysle žiaka, poznanie si musí žiak konštruovať sám – učiteľ mu ale k tomu môže vytvoriť priaznivé podmienky.**

Už prvé semestre, odučené v duchu konštruktivistického použitia štvorčekového papiera, ukázali zvýšený nárast záujmu poslucháčov o matematiku. Určite k tomu prispelo aj to, že sme pri práci organicky prechádzali z úrovne matematickej do úrovne didaktickej a sústavne sme povzbudzovali poslucháčky k vlastnému experimentovaniu a k odvahe rozpovedať o svojich nových skúsenostiach kolegom. Rozprávanie poslucháčiek o pokusoch, ktoré robili so synovcami, neterami alebo deťmi od susedov, boli silný motivačný impulz pre ich kolegyne.

V roku 1999 vyšlo skriptum, ktoré sme napísali spoločne s D. Jirotkovou pod názvom vypožičaným pre titul tohto článku (pozri v literatúre). Aj tu sme sa usilovali zachovať konštruktivistický prístup a dvojúrovňovosť podania. Oboje sa snažíme prezentovať aj v tomto článku.

2. Orientácia na štvorčekovom papieri

Janko je chorý, nebol v škole. Telefonuje spolužiačke Lenke, aby mu nadiktovala domáce úlohy. Úloha z geometrie se vzťahuje k obrázku: na štvorčekovom papieri je nakreslených šesť bodov. Keby deti poznali súradnice, vedela by Lenka obrázok Jankovi nadiktovať: Zvoľ jeden mrežový bod a označ ho A(0,0). Potom ďalšie body budú B(3,1), C(4,2), D(4,4), E(3,4), F(1,3). Deti ale súradnice ešte nepoznajú. Ako asi budú postupovať?

Opísanú didaktickú úlohu riešia poslucháči bez problémov. Poradia Lenke, aby si zvolila jeden mrežový bod za bod A a potom pokračovala k ďalším bodom: tri kroky doprava, jeden nahor - máš bod B, ďalej jeden doprava, jeden nahor – máš bod C, dva kroky nahor – máš D, jeden doľava – máš E, dva doľava, jeden nadol – máš F. Niekdy dodajú, že možno ešte urobiť aj kontrolu, či sa z bodu F do A dostanú na príkaz: tri kroky nadol, jeden doľava. Náročnejší problém vznikne, keď treba vymysliet jednoduchý spôsob zápisu takého dlhého rozprávania. Poslucháči navrhnú viacero spôsobov zápisu. Nakoniec sa rozhodnú, že budú používať ten, v ktorom je náš obrázok zapísaný takto: A→→→↑B→↑C↑↑D←E←←↓F←↓↓↓A.

Šípkové zápisy prehlásili viaceré poslucháčky za lepšie, ako súradnice. Chválili ich jasnosť, aj to, že netaja kam treba vyniesť prvú a kam druhú súradnicu. Viaceré poslucháčky skúsili šípkové hry s deťmi a došli k poznaniu, že už tretiaci sú schopní túto symboliku spoľahlivo používať. Uveďme niekoľko úloh, ktoré boli riešené pomocou šípkových zápisov.

Úloha 1. Koľkými spôsobmi sa dá zapísať cesta od bodu A do bodu B?

Úloha 2. a) Koľko úsečiek je určených bodmi A, B, C, D, E, F ako krajnými bodmi?

b) Usporiadajte úsečky od najkratšej po najdlhšiu. c) Určete tie, ktorých stred je mrežový bod.

Úloha 3. Ktorý z troch trojuholníkov ΔABC A→→↑B↑↑←C←↓↓↓A,
ΔDEF D→→↑E→↑↑F←←←↓↓↓D, ΔGHJ
G→→↓↓H→↑↑J←←←G.
je ostrouhlý, pravouhlý, či tupouhlý. Prečo je to tak?

Úloha 4. Na našom obrázku vyznačte mrežový bod G, tak aby počet trojuholníkov XYG, kde X a Y sú niektoré dva z bodov A, B, C, D, E, F, bol 13.

Úloha 5. Zápisom K→→↓L je daná strana štvorca KLMN. Popíšte celý štvorec.

Úloha 6. Úlohu 4 riešte pre prípad a) K→→→↓L, b) K→→→→↓L, c) K→→→→→↓L.

Úloha 7. Koľko velikosťou rôznych štvorcov možno zapísať pomocou práve 12 šípok?

Pri riešení týchto a ďalších úloh došlo medzi poslucháčmi k rôznosti názorov. Napríklad pri úlohe 1 sa najprv všetci zhodli na odpovedi *štyri spôsoby*, ale neskôr, keď bola riešená úloha 6, niektorí poslucháči pripustili, že spôsobov je nekonečne veľa. Úloha 6 viedla k hádkam a potrebe vyjasniť, ako budeme chápať pojem *šípkový zápis mrežového útvaru*. Vyjasňovaniu sme venovali veľa úsilia. Zmyslom takého prístupu bolo ukázať, že matematika nie je pevne daný systém definícií a tvrdení, ale oblasť pre špekulatívne hry, kde hlavným kritériom nie je autorita, ale pravda a bezospornosť. Vyjasňovanie sme začali spísaním sporného a nejasného:

1. Musí byť na začiatku i konci šípkového zápisu písmeno?
2. Musí to byť rovnaké písmeno?
3. Je možné, aby sa v šípkovom zápise objavili vedľa seba dve opačné šípky?
4. Musí byť šípkový zápis najúspornejší možný?

Poslucháči mali na tieto otázky odlišné názory a tak vznikli nakoniec viaceré vymedzenia pojmu *šípkový zápis mrežového útvaru*. Každý poslucháč si napísal vlastné vymedzenie a to potom musel dôsledne dodržovať. Tak sa stalo, že správná odpoveď na úlohu 6 pre jedného poslucháča bola 2, pre iného 8. Poslucháči postupne svoje vymedzenia pojmu *šípkový zápis mrežového útvaru* menili a nakoniec skoro všetci prijali rovnaké vymedzenie, dané odpoveďmi ÁNO na otázky 1, 2 a 4 a NIE na otázku 3. Teda zápis musí byť najúspornejší možný a musí začínať i končiť v tom istom vrchole mnohouholníka.

3. Idea komplementarity

Vráťme sa k telefonátu Janka a Lenky. Na začiatku kapitoly 2 sme rozhovor neukončili, zamerali sme sa iba na obrázok. Nedozvedeli sme text úlohy. Jedná sa úlohu 2. Poslucháči ju vyriešili vo všetkých troch skupinách bez vážnejších problémov. Potom sme si podrobnejšie všimli didaktickú úroveň úlohy. Predložili sme poslucháčom

Téma na diskúsiu 1. Pri riešení úlohy 2a) vznikol mezi žiakmi spor, či úsečiek je 15 nebo 30. Ako vy, učiteľka, na spor zareagujete?

Spočiatku sa poslucháči zamerali na matematickú stránku sporu. Ukazovali, že odpoveď 30 je chybná, lebo úsečka AB i úsečka BA je tá istá. Až neskôr začínali chápať, že podstata tohto problému tkvie v hladine didaktickej a začali hlbšie prenikať do kognitívnej a komunikačnej hladiny opísanej situácie. Postupne sa tak dostali k poznaniu:

- Žiaci, ktorí chápu úsečky AB a BA ako dva rôzne objekty odhaľujú procesuálny charakter svojho myslenia a dávajú učiteľovi cennú informáciu o vlastnom kognitívnom štýle . Učiteľ v budúcnosti využije toto poznanie a bude týmto žiakom otvárať matematický svet viac cestou procesu ako konceptu.
- Spor, ktorý vznikne medzi žiakmi, je silný motivačný zdroj ďalšieho intelektuálneho rastu detí, ktoré sú do sporu zaangažované – preto je nerozumné, aby učiteľ rozhodnutím sporu „úsečka AB je tá istá ako úsečka BA“ tento motivačný zdroj zničil.
- Za optimálnu považujeme reakciu učiteľa charakterizovanú slovami: Vidíme, že úsečku možno chápať aj ako jej vytváranie (v takom prípade je cesta od A do B iná ako cesta od B do A), aj ako výsledok, ako čiaru, ktorá je už na papieri nakreslená (vtedy sú AB a BA dve mená toho istého objektu, asi ako Edo Malý a Malý Edo sú dve mená toho jediného žiaka). Každý si zvolí vlastné chápanie pojmu úsečka. V ďalšom ho bude stále dodržovať.
- To čo doporučujeme v predchádzajúcom bode poznáme aj z vlastnej skúsenosti, lebo aj my sme si pojem *šípkový zápis mrežového útvaru* upresňovali rovnako.

Na úlohu **2a) bude napojovať nasledujúca úloha:**

Úloha **8**. Koľko a) trojuholníkov, b) štvoruholníkov c) paťuholníkov je určených bodmi A až F na obrázku? (Stále sa jedná o ten istý obrázok opísaný v telefonáte na začiatku článku).

Poslucháči nájdu odpovede: a) 20, b) 15, c) 6. Ak v priebehu riešenia ne**dôjde medzi poslucháčmi ku sporu, ktorý by zahájil debatu, tak im predostrieme túto výzvu:**

Téma na diskúsiu 2. A) Čo si myslíte o formulácii úlohy 2? B) Počet úsečiek v úlohe 2a) i počet štvruholníkov v úlohe 8 bol rovnaký. Bolo to 15. Je to náhoda? Ak to nie je náhoda, tak vysvetlite príčiny. C) Zvážte, ako možno toto poznanie ukázať žiakom tretej triedy.

Výzvu sme položili poslucháčom v troch skupinách a v každej došlo k plodnej debate:
A) Vo všetkých troch prípadoch navrhli poslucháči sobrátiť poradie bodov a), b), c) úlohy 8: Začať ľahkým a prípadom c) a skončiť náročným prípadom a). Ich experimenty s deťmi to plne potvrdili.
B) Ani v jednej skupine poslucháči neodhalili ideu komplementu: ak úsečke AB priradím štvoruholník CDEF, úsečke AC štvoruholník BDEF atď, budem mať navzájom jednoznačne priradené štvoruholníky a úsečky. Preto je oboch množín rovnako. Ideu komplementu sme poslucháčom neprezradili, ale položili sme im návodnú úlohu:

Úloha 8*. Počet paťuholníkov je rovaný ako počet bodov. Je to náhoda?

V dvoch skupinách táto úloha ihneď pomohla objaviť ideu komplentarity a aplikovať ju aj na prechádzajúci prípad komplementarity množiny úsečiek a množiny štvoruholníkov. Jedna poslucháčka dokonca potom doma prišla na to, ako sa myšlienka komplementarity dá použiť na zistenie počtu trojuholníkov. Nakreslila si desať kópií nášho obrázku v každom vyznačila dva trojuholníky. Jeden červenou a druhý modrou farbičkou. Trojuholník, ktorý obsahoval vrchol A bol vždy vyfarbený červenou. Potom povedala, že stačí zistiť koľko je červených trojuholníkov, teda tých čo obsahujú vrchol A, a toto číslo zdvojnásobiť.
C) V jednej skupine sa rozprúdila veľmi podnetná debata o tom, ako najlepšie vysvetliť ideu komplementu žiakom. Poslucháči upozornili, že treba zvážiť vek žiakov, a ustanovili sa, že budú pracovať so štvrtákmi. Navrhli, aby sa idea komplementu najprv ukázala na iných príkladoch. Po našej otázke, či je to prístup konštruktivistický ihneď pozmenili svoje riešenie. Pochopili, že nie je rozumné čokoľvek vysvetľovať, ale treba žiakom predložiť vhodné úlohy. Ani my sme im ideu komplementu neprezradili, ale pomocou úlohy 8* sme im otvorili cestu k tejto znalosti. Poslucháči začali vymýšľať vhodné návodné úlohy, ktoré otvoria štvrtákom ideu komplementu. Napríklad: Učiteľ napíše poprehadzovane na tabuľu všetkých desať čísel od 0 po 9. Potom časť tabule zakryje, takže žiaci uvida iba čísla 7, 0, 4. Učiteľ sa opýta, aký je súčet chýbajúcich číslic. Poslucháči túto úlohu riešili tak, že si napísali

chýbajúce čísla a tie potom spočítali. Keď sme im ale zakryli všetky čísla okrem jedného, jedna poslucháčka objavila, že stačí od súčtu 0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45 odrátať to číslo, ktoré ostalo nezakryté. Tak bola objavená idea komplementu a tú potom poslucháči preniesli i na prípady, keď odkryté ostali dve či tri čísla.
Po istej dobe poslucháči hlbšie prenikli do situácie naznačenej uvedenými úlohami. Objavili, že z vrcholov n-uholníka možno vytvoriť toľko k-uholníkov koľko (n-k)-uholníkov. Tým objavili model kombinatorickej identity C(k,n) = C(n-k,n). Neskôr svoje tvrdenie vylepšili spresňujúcou podmienkou: pôvodný n-uholník musí byť konvexný. Začali rozoberať prípady, keď pôvodných n bodov netvorí konvexný n-uholník, napríklad prípad, keď tri z týchto bodov ležia na priamke. Tie poslucháčky, ktoré samostatne začali tieto úlohy riešiť, začali objavovať matematiku samostatne. Motivujúca pre ne nebola snaha vyriešiť vlastnú úlohu, ale radosť z prípravy úloh pre svojich budúcich žiakov, na ktorých sa už teraz tešia.

4. Metóda uvoľňovania parametrov - propedeutika algebry

Algebra vstupuje do školskej matematiky na druhom stupni základnej školy a jej hlavnou náplňou je naučiť žiakov techniku manipulácie s algebraickými výrazmi. Vyučovanie tejto partie je inštruktívne a imitatívne: učiteľ ukáže ako treba postupovať, a žiaci to opakujú a nacvičujú. Nazdávame sa, že účinnejšia cesta k algebre ide cez konštruktivistické prístupy: vhodné problémové situácie vedú žiakov k samostatným objavom algebry ako jazyka, ktorý dovoľuje zovšeobecňovanie série aritmetických vzťahov. Jeden taký postup, s ktorým možno začať už v treťom ročníku, je založený na ceste, ktorej cieľom je riešenie nasledujúcej úlohy:

Úloha 9. Vo štvorci KLMN poznáme body K(j,k) a L(m,n). Nájdite súradnice bodov M, N, tak, aby KLMN bol štvorec. (Tu i ďalej uvažujeme iba o kladne orientovaných štvorcoch.)

Úlohu možno poľahky vyriešiť pomocou silného aparátu vektorov. Šiestaci ho nepoznajú, no napriek tomu si dokážu s úlohou poradiť, ak sú dobre vedení . Už ako tretiaci vyriešia úlohu:

Úloha 9a. Daná je mrežová úsečka KL (K→→↑L). Zostroj štvorec KLMN a zapíš ho.

Keď žiaci vyriešia viacero takých úloh, objavia návod na ich riešenie: Zober danú úsečku, nech je to napríklad K→→→→→↑↑L. Tá je daná číslami 5 a 2. Postupuj pomocou týchto čísiel po ráme hľadaného štvorca, teda: zvoľ bod K, choď 5 krokov vpravo, 2 nahor označ L, pokračuj 5 krokov nahor, 2 vľavo označ M, ďalej 5 krokov vľavo 2

nadol, označ N. Urob kontrolu: z bodu N choď 5 krokov nadol a 2 vpravo, máš byť v bode K. Šípkový zápis je: K→→→→→↑↑L↑↑↑↑↑←←M←←←←←↓↓N↓↓↓↓↓→→K.
V návode je štyrikrát použité číslo 5. Keď všetky štyri výskyty čísla 5 zameníme za iné prirodzené číslo, znova dostaneme štvorec. Rovnako možno zmeniť i štyri výskyty čísla 2 za iné číslo. Máme teda vlastne všeobecný návod na konštrukciu mrežového štvorca s danou stranou KL. Uvedené riešenie leží na *protoalgebraickej* úrovni: ešte nie je použitý znak, ale už je tu formulovaná všeobecná situácia. K algebraickej úrovni sa priblížime v štvrtej triede, keď čísla 5 a 2 nahradíme znakmi, napr. O a : K→O→↑ ↑L↑O↑← ←M←O←↓ ↓N↓O↓→ →K. Koliečko i štvorček sú *miesta pre čísla,* pritom čísla v štvorčekoch (koliečkach) sú rovnaké.
V piatom ročníku sa ku konštrukcii štvorca vrátime, tentoraz s použitím súradníc. Začneme riešiť úlohu 9 pre špeciálne prípady. Najprv položíme vrchol K do počiatku K(0,0) a meníme iba polohu bodu L, teda súradnice m, n. Nebudem meniť naraz obe, ale iba jednu z nich:

Úloha 9b. Vo štvorci KLMN poznáme bod K(0,0) aj druhú súradnicu bodu L(?,0). Ak vám prezradím aj prvú súradnicu, budete vedieť napísať súradnice bodov M a N?

Žiaci nakreslia niekoľko prípadov štvorca KLMN: za utajené číslo ? postupne dosadia čísla 1, 2, 3, 4, a nájdu odpoveď: M(?,?), N(0,?). Znak "?" sa niektorým žiakom nepáčil a písali namiesto neho " tajné číslo", alebo štvorček, alebo iba "taj. č", alebo "nez.č." ako neznáme číslo. Tak sami žiaci zaviedli do našich zápisov písmená a ukončili tak dlhodobý proces: činnostné poznanie → verabalizácia → symbolizácia. Nasledujúca úloha už používa písmená.

Úloha 9c. Vo štvorci KLMN poznáme bod K(0,0) ale pri vrchole L(m,1) je prvá súradnica neznáma. Ak vám ju prezradím, budete vedieť napísať súradnice bodov M a N?

Aj teraz nakreslia žiaci viacero prípadov, zistia, že pre vrchol N je N(-1, m), ale s vrcholom M budú ťažkosti. Stačí však výsledky z obrázkov prepísať do tabuľky a riešenie sa ukáže samo:

Neznáme číslo m	1	2	3	4		m
Prvá súradnica bodu M	0	1	2	3		m – 1
Druhá súradnica bodu M	2	3	4	5		m + 1

Tab. 1

(O vstupe písmena na scénu je viacej písané v uvedenom skripte.) Pokračujeme úlohou

Úloha 9d. Vo štvorci KLMN poznáme bod K(0,0) a druhú súradnicu bodu L. Tá je 2, 3, 4 alebo 5. Prezradím vám aj prvú súradnicu bodu L. Napíšte súradnice bodov M a N?

Pre každé z čísel 2, 3, 4 a 5, ktoré vystupujú ako druhá súradnica bodu L, urobia žiaci tabuľku podobnú tabuľke 1. Posledné stĺpce týchto tabuliek napíšu do novej tabuľky. V nej sa objavia už dve písmená, dve súradnice bodu L(m,n) .

n – druhá súradnica bodu L	1	2	3	4		n
Prvá súradnica bodu N	-1	-2	-3	-4		-n
Druhá súradnica bodu N	m	m	m	m		m
Prvá súradnica bodu M	m – 1	m – 2	m – 3	m – 4		m – n
Druhá súradnica bodu M	m + 1	m + 2	m + 3	m + 4		m + n

Tab. 2

Tieto úvahy sú schopní uskutočniť šiestaci samostatne. Dokážu v uvoľňovaní súradníc samostatne pokračovať: uvolniť prvú a napokon i druhú súradnicu bodu K. Princíp metódy, ktorú sme opísali už v knihe Hejný a kol. (1989) a ktorej sme dali meno *metóda uvolňovania parametrov (súradníc)* podrobnejšie osvetlíme.

V úlohe 9 vystupujú štyri premenné j, k, m, n, súradnice vstupných bodov K a L. Úlohou riešiteľa je vyjadriť pomocou týchto parametrov súradnice bodov M a N. Proces riešenia rozložíme do etap. Najprv fixujeme čísla j, k, n a *uvolníme* iba parameter m. Dostaneme prvú čiastočnú odpoveď – pozri Tab. 1. Potom v druhej etape uvolníme druhý parameter. V našom prípade to bola súradnica n. Pre každé n = 1, 2, 3, 4, meníme parameter m, nájdeme súradnice bodov M a N. Tak dostaneme odpoveď pre prípad, že súradnice bodu K sú pevné a súradnice bodu L ľubovoľné – pozri Tab. 2. Mohli by sme pokračovať uvolňovaním prvej a napokon i druhej súradnice bodu K, teda treťou a štvrtou etapou. To robiť nebudeme, pretože nám nejde o riešenie úlohy, ale o osvetlenie metódy, ktorá výrazne pomáha riešiteľom prežiť proces abstrakcie a zovšeobecňovania.

5. Meranie – od manipulácie ku špekulácii

Na náš obrázok, ktorý bol predmetom telefonátu Janka a Lenky, pozrime z iného konca. Začnime merať vzdialenosti medzi jednotlivými bodmi obrázku. Aby naše meranie malo zmysel, musí byť obrázok narysovaný veľmi presne: vzdialenosť ľubovoľných susedných mrežových bodov musí byť presne 10 mm.

V prvej etape zisťujeme vzdialenosti bodov manipulatívne. Meráme s presnosťou na mm a horným indexom “+”, “–“, alebo “!” upresníme, či je skutočná vzdialenosť voči uvedenej väčšia, menšia, alebo presná.

Napríklad $|DE| = 10^!$, $|BC| = 14^+$, $|AB| = 32^-$.
V druhej etape objavia žiaci myšlienku predlžovania a delenia úsečky. Napríklad, keď úsečku BC predĺžime 5-násobne, zistíme , že táto má mieru 71^-. Preto úsečka BC, ktorá je jej pätinou, má dĺžku menšiu ako 14,2.
V tretej etape dôjde ku sporom. Predmetom sporu bývajú najčastejšie dĺžky úsečiek AE a AH, kde bod H je daný zápisom $F \rightarrow H$. Niektorí žiaci tvrdia, že $|AE| = 50^!$, iní tvrdia, že $|AE| = 50^+$ a iní, že $|AE| = 50^-$. Podobne sú tri názory na dĺžku úsečky AH: $36^!$, 36^+, 36^-. V našom experimentálnom vyučovaní spor dlho ostal otvorený. O rok neskôr, pri skúmaní ťažníc a výšok trojuholníka, mali žiaci nájsť výšky v trojuholníku UVW, kde U(0,0), V(5,0), W(3,4). Jeden chlapec si spomenul na nedoriešený problém s dĺžkami a predviedol krásny dôkaz tvrdenia $|UW| = 50^!$. Označme Q stred úsečky VW. Je to bod Q(4,2). Úsečky UQ a VW sú navzájom kolmé a teda UQ je výška v trojuholníku UVW a trojuholníky UVQ a UWQ sú zhodné (symetrické podľa priamky UQ). Preto je $|UW| = |UV| = 50^!$.
Prípad úsečky AH naďalej ostal otvorený.
Štvrtá etapa začala v okamžiku, keď si žiaci uvedomili, že dĺžku hociakej úsečky KL možno zistiť pomocou obsahu štvorca KLMN, zostrojeného nad úsečkou KL. V tej dobe to boli už siedmaci a poznali odmocninu. Zistili, že štvorec nad úsečkou AH má obsah 13 cm^2 a preto je $|AH| = \sqrt{1300} = 36{,}0555... = 36^+$. Toto poznanie dalo odpoveď na všeobecnú otázku – dĺžku každej mrežovej úsečky už vedia nielen odmerať, ale i vypočítať.

Literatúra

Burjan, V., Burjanová, Ľ.: Matematické hry. *Pytagoras, Bratislava, 1991.*
Gatiaľ, J., Hejný, M., Hecht, T.: Hry takmer matematické. *53. zväzok MO edície Škola mladých matematikov, Mladá fronta, Praha, 1982.*
Hejný, M., Jirotková, D.: Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrii a aritmetikou. *Univerzita Karlova v Praze Pedagogická fakulta, Praha 1999.*
Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. *SPN, Bratislava, 1989.*
Hejný, M., Kuřina, F.: Matematika, dítě a škola. *Portál, (v tlači).*
Hiele van, P., M.: Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education. *Academic Press, New York 1986.*

Luwel, K., Verschaffel, P., Onghena, P., De Corte, E.: Childrens strategues for numerosity judgement in square grid, *Proceedings of the 25 conference of PME, Utrecht, Freudenthal Institute, 2001.*
Močalov, L., P.: Hlavolamy. *Praha, Mladá fronta 1987.*
Polya, G.: Mathematical Discovery I., II., *New York, John Wiley 1962, 1965*.
♠