Metódy riešenia konštrukčných úloh

Martin Billich

ABSTRACT: *The article is dealing about some methods to solve the problems of plane geometry. Aplications of these methods are shown on the concrete example.*

1. ÚVOD

Metódy riešenia konštrukčných planimetrických úloh môžeme rozlíšiť podľa toho, či pracujeme s geometrickými útvarmi priamo, bez akýchkoľvek výpočtov, alebo pomocou aritmetických a algebrických operácií.

Prvá metóda je rýdzo *geometrická,* pomáha si geometrickými obrazcami, čím sa stáva veľmi názornou. Práve preto bola s obľubou používaná už v starom Grécku a dnes sa využíva najmä v elementárnych častiach geometrie. Niekedy túto metódu nazývame *syntetickou,* nakoľko skúmame geometrické útvary na základe ich vlastností, pričom postupujeme od jednoduchších vzťahov k zložitejším. Geometrickú metódu môžeme z hľadiska hlavnej myšlienky postupu konštrukcie pri riešení úloh rozdeliť na metódu *množín bodov daných vlastností* a metódu *transformačnú.* Toto rozdelenie však platí len pri riešení jednoduchých (elementárnych) úloh. Pri riešení zložitejších úloh sa oba tieto postupy navzájom kombinujú.

Druhá metóda je založená na *algebrickom* základe. Keďže vypočítavá hľadané veličiny zo zadaných, pomocou ktorých vieme zostrojiť hľadaný geometrický útvar, nazývame ju aj *analytickou* metódou.
Pri riešení mnohých úloh je vhodné použiť špeciálne vzťahy, odvodené medzi geometrickými útvarmi danými a hľadanými. V takých prípadoch nemôžeme hovoriť ani o jednej z predchádzajúcich dvoch metód, nakoľko obe sú podriadené práve týmto vzťahom. Takúto metódu nazývame podľa [1] metóda *založená na špeciálnych vzťahoch.*

2. ÚLOHA RIEŠENÁ NIEKOĽKÝMI METÓDAMI

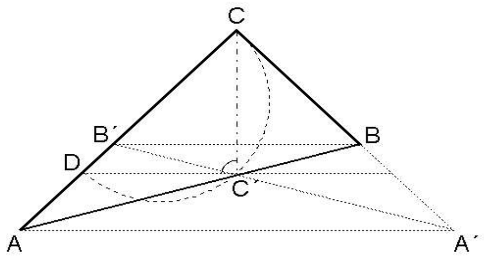
Pre lepšie pochopenie postupov pri jednotlivých metódach uvedieme konkrétnu úlohu, ktorú budeme postupne riešiť niekoľkými metódami, pričom uvidíme, že nie všetky metódy sú vždy rovnako výhodné.

Úloha: V (euklidovskej) rovine zostrojte trojuholník *ABC,* ktorý je daný dvoma stranami *a, b* a dĺžkou $o_{\ast}$ osi uhla ⁕ (pri vrchole *C*).

Riešenie:

a) K *špeciálnym vzťahom* prídeme nasledujúcim rozborom (obr. 1). V hľadanom trojuholníku *ABC* označme *AC=b, BC=a.* Zostrojením kolmíc k osi uhlu ⁕ koncovím bodom *C´* osi a vrcholmi *A, B,* dostaneme na strane *AC* body, ktoré tvoria harmonickú štvoricu, pretože platí *(AB´CD)= -1.* Vyplýva to z rovnoramenného lichobežníka *AA´BB´*, ktorý považujeme za úplný štvorroh (pozri [2], str. 257).

Konštrukciu realizujeme tak, že na danú stranu, napr. *b*, nanesieme *CB ´=a* a zostrojíme bod *D* ako štvrtý harmonický k trojici bodov *A, B´, C.* Nad priemerom *CD* zostrojíme Talesovú kružnicu (*∠CC´D=90°*), ktorá určí vrchol *C´* pomocného trojuholníka *CC´D*, v ktorom poznáme ešte jednu odvesnu $CC' = o_{\ast}$. Výsledný trojuholník *ABC* sa doplní veľmi ľahko.

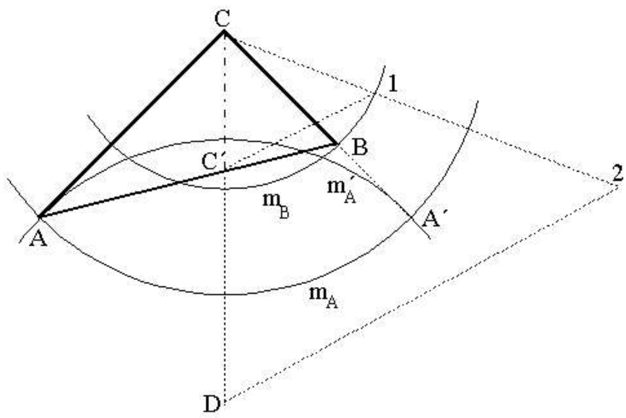


obr. 1

Podmienkou riešiteľnosti úlohy je existencia vrcholu C' pravouhlého trojuholníka. Musí teda platiť $CC' < CD$, t. j. daná dĺžka $o_{\ast}$ musí byť menšia ako harmonický priemer daných strán $CB' = a$, $AC = b$. Harmonický priemer úsečiek a, b je daný výrazom $\dfrac{2ab}{a+b}$; preto musí platiť $o_{\ast} < \dfrac{2ab}{a+b}$. Úloha je potom jednoznačná, ak neuvažujeme trojuholník súmerne združený s $\Delta\, ABC$ podľa strany b.

b) Pri riešení úlohy metódou *množín bodov daných vlastností* obyčajne chceme zostrojiť určitý bod výsledného útvaru, čím bude úloha v podstate vyriešená.

V našej úlohe budeme hľadať vrchol A trojuholníka ABC. Najskôr zostrojíme úsečku dĺžky $o_{\ast} = CC'$ (obr. 2). Z podmienky pre dĺžku strany b vyplýva, že bod A leží na kružnici $m_A(C,b)$. Podobne bod B leží na kružnici $m_B(C,a)$, z čoho môžeme odvodiť druhú množinu bodov s danou vlastnosťou pre bod A, ak berieme do úvahy známy vzťah $(A-C'):(B-C') = -b:a$. Ak bod B leží na kružnici m_B, potom súčasne bod A leží na kružnici m'_A homoteticky združenú s m_B podľa vnútorného stredu homotetie C'. Pre stred D kružnice m'_A platí $(C'-D):(C'-C) = -b:a$ a pre jej polomer $r' = a\,\dfrac{b}{a} = b$.

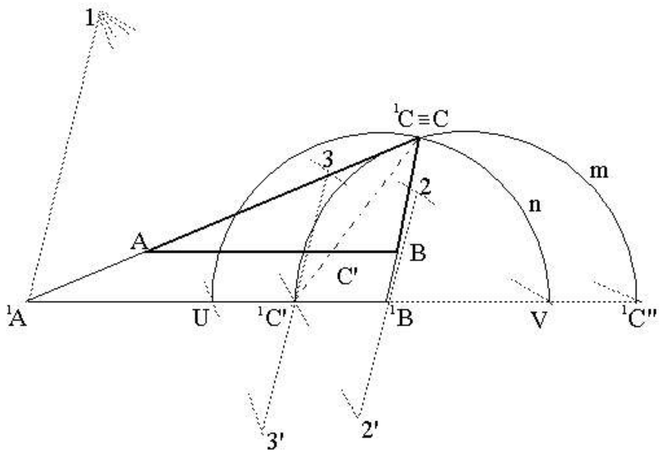


obr. 2

V konštrukcii pokračujeme tak, že na ľubovoľnú polpriamku s bodu C nanesieme postupne $C1=a$, $12=b$ a bodom 2 zostrojíme priamku rovnobežnú s $1C'$. Takto na polpriamke CC' dostaneme bod D. Hľadaný bod A bude priesečníkom kružníc (množín bodov s danými vlastnosťami) m_A a m'_A. Priamka určená druhým priesečníkom A' týchto kružníc a bodom C pretína kružnicu m_B vo vrchole B. Úloha je v podstate jednoznačná (trojuholník s výsledným vrcholom A' by bol totiž súmerne združený podľa CC') a riešiteľná, ak vzdialenosť stredov C, D kružníc m_A, m'_A je menší ako súčet ich polomerov, t. j. $2b$. Nakoľko $CD=CC'+C'D= o_{*}\,(1+\frac{b}{a})$, dostávame opäť $o_{*} < \frac{2ab}{a+b}$.

c) Pri riešení úlohy *transformačnou* metódou transformujeme dané útvary alebo ich časti tak, aby sme čo najľahšie mohli nájsť riešenie úlohy po tejto transformácii (ktorá avšak musí byť jednoznačne definovaná). Z takto získaného výsledku prejdeme spätnou transformáciou k riešeniu pôvodnej úlohy. Takáto situácia nastene pre dobre známe „pohybové“ transformácie ako sú posunutie, otočenie, osová súmernosť. Podobná situácia je aj pri transformácii na útvary homotetické, resp. podobné. V tomto prípade je výsledok pôvodnej úlohy homotetický, resp. podobný k výsledku získanému pre transformované útvary.

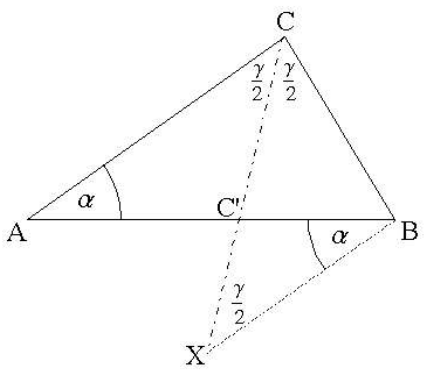
Vráťme sa teraz k našej úlohe, ktorú vyriešime pomocou homotetie (rovnoľahlosti). Najskôr zostrojíme trojuholník $^{1}A^{1}B^{1}C$, v ktorom poznáme pomer ${}^1a{:}{}^1b{:}{}^1\ o_{*} = a{:}b{:}o_{*}$, teda trojuholník podobný s výsledným Δ *ABC*. Jeho konštrukcia je nasledovná (obr. 3).



obr. 3

Zostrojme ľubovoľnú stranu ${}^1c={}^1A{}^1B$. Nakoľko poznáme pomer ďalších dvoch strán, tak vrchol ${}^1C$ bude ležať na Apolloniovej kružnici *m* zostrojenej (pozri [2], str. 76) nad priemerom ${}^1C'{}^1C''$ pre daný pomer *b:a.* Podobne v pomocnom trojuholníku ${}^1A{}^1B{}^1C$ poznáme pomer strán ${}^1A{}^1C{:}\ {}^1C'{}^1C = b{:}\ o_{*}$. Bod ${}^1C$ bude teda ležať aj na Apolloniovej kružnici *n* nad priemerom *UV*. V priesečníku týchto dvoch kružnic je teda hľadaný bod ${}^1C$. výsledný trojuholník *ABC* zostrojíme ako trojuholník homotetický s Δ ${}^1A{}^1B{}^1C$ podľa stredu ${}^1C$❺C.

d) Najrýchlejšou cestou k výsledku našej úlohy je riešenie *algebrickou* metódou.



Hľadajme dĺžku $x=C'X$ (obr. 4). Vrcholom *B* výsledného Δ *ABC* vedieme rovnobežku so stranou *AC* , ktorá pretína polpriamku *CC′* v bode *X.* Z podobnosti trojuholníkov *AC′C* a *BC′X* (podľa vety *uu*) vyplýva: $AC{:}C'C=BX{:}C'X$. Nakoľko Δ *CXB* je rovnoramenný (oba uhly pri základni *CX* sa rovnajú $\frac{\gamma}{2}$), máme $BX=BC=a$. Predchádzajúci pomer môžeme teda napísať v tvare $b{:}\ o_{*} = a{:}x$, podľa čoho môžeme zostrojiť úsečku dĺžky x. Zostrojenie $\Delta\ ABC$ je potom veľmi jednoduché. Z $\Delta\ CXB$, ktorý zostrojíme ako prvý, vyplýva aj riešiteľnosť úlohy. $\Delta\ ABC$ sa dá jednoznačne zostrojiť, ak platí $CX<CB+BX$. Dosadením za $CX= o_{*} + x$ dostaneme opäť podmienku $o_{*} < \dfrac{2ab}{a+b}$.

3. ZÁVER

Z uvedených metód a riešení konkrétnej úlohy v tomto článku môžeme vidieť pestrosť elementárnej euklidovskej geometrie, s ktorou by sa mohli oboznámiť žiaci už na stredných školách pri riešení mnohých zaujímavých úloh, napríklad v rámci matematických krúžkov, čím by si rozšírili obzor svojich vedomostí z tejto časti matematiky. Riešenie jednej úlohy viacerými metódami zároveň nabáda žiakov pozerať sa na problém z viacerých pohľadov, a tak pomáha rozvíjať ich tvorivé myslenie.

Literatúra:

[1] Holubář J. : *O methodách rovinných konstrukcií.* Praha, Jednota čs. matem. a fys. 1949.

[2] Šedivý O. , Božek M. , Duplák J. , Kršňák P. , Trenkler M. : *Geometria 2*, Bratislava, SPN 1987.

Adresa:
Mgr. Martin Billich
PF KU v Ružomberku
Hrabovská 1
034 01 Ružomberok
e-mail: billich@ku.sk