Pojednanie o geometrickom rade

Anna Bezáková

ABSTRACT: *It is generally known that students acquire theoretical knowledge best if they know particular examples from real life, where the given problem is used. Presented article gives some suggestions of how to apply geometric series in practice.*

1. ÚVOD

Teória nekonečných radov vznikla koncom 17. storočia spolu s diferenciálnym a integrálnym počtom. Patrí k najpoužívanejším a najúčinnejším metódam matematickej analýzy a numerického počtu.

Umožňuje integrovanie funkcií, ktorých primitívne funkcie nie sú elementárne, používa sa pri riešení diferenciálnych rovníc a stala sa dôležitým prostriedkom na zostavenie tabuliek elementárnych funkcií, napr. logaritmických a trigonometrických funkcií.

Už v staroveku (287 – 212 pred n. l.) Archimedes poznal nekonečný geometrický rad, ktorý použil ku kvadratúre paraboly. Ale až zavedením infinitezimálneho počtu nastáva rozvoj teórie nekonečných radov [2]. Podieľali sa na ňom mnohí významní matematici, ale najväčšiu zásluhu o vybudovanie tejto teórie má všestranný francúzsky matematik A. L. Cauchy (1789 – 1857).

2. UPLATNENIE GEOMETRICKÉHO RADU V PRAXI

Predchádzajúci všeobecný úvod je len vstupom do problematiky nekonečných radov. Podrobnejšie sa budeme zaoberať geometrickým radom. Geometrický rad patrí do obsahu výuky stredných a odborných škôl a niektoré myšlienky tohto článku by mohli pomôcť zatraktívniť jeho výuku aplikáciami z ekonomickej oblasti, z oblasti medicíny a prírodných vied.

Geometrický rad má tvar

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}, \qquad a \neq 0,\ q \neq 0,$$

v ktorom každý nasledujúci člen vznikne z predchádzajúceho člena vynásobením číslom q, ktoré nazývame kvocientom radu. Pre n-tý člen platí

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

a n-tý čiastočný súčet pre $q \neq 1$ vypočítame zo vzťahu

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \ .$$

Geometrický rad konverguje, ak $|q| < 1$ a diverguje, ak $|q| \geq 1$. Ak rad konverguje, potom je súčet je

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q} \ .$$

Teraz uvedieme niektoré oblasti, v ktorých sa využíva teória geometrických radov.

A. Prvou oblasťou je samotná matematika, aj keď s podobným problémom sa môžeme stretnúť aj v iných prírodovedných disciplínach [2]. Pôjde o problém vyjadriť periodické číslo v tvare zlomku. Na ilustráciu použijeme konkrétny príklad.

Vyjadrime periodické číslo $r = 0{,}\overline{37}$ v tvare zlomku. Dané číslo môžeme písať nasledovne:

$$0{,}37373737\ldots = 0{,}37 + 0{,}0037 + 0{,}000037 + 0{,}00000037 + \ldots =$$
$$= \frac{37}{10^2} + \frac{37}{10^4} + \frac{37}{10^6} + \frac{37}{10^8} + \ldots \ .$$

Dostali sme geometrický rad s prvým členom $a_1 = \dfrac{37}{10^2}$ a kvocientom $q = \dfrac{1}{10^2}$. Preto jeho súčet je

$$r=\frac{37}{10^2}\cdot\frac{1}{1-0{,}01}=\frac{37}{100}\cdot\frac{1}{0{,}99}=\frac{37}{99}\ .$$

Zlomok $\frac{37}{99}$ predstavuje periodické číslo $0,\overline{37}$.

B. Zaujímavú aplikáciu geometrických radov nájdeme v oblasti medicíny pri liečebnej terapii, keď je potrebné určiť pacientovi dennú dávku lieku, alebo odhadnúť dlhodobú hladinu lieku v tele.

Predpokladajme, že pacient musí vziať napr. 100 mg určitého lieku denne. Je známe, že každý deň telo vylúči určité množstvo lieku, ktorý je prítomný v tele, nech je to napr. 20 %. Odhadnime dlhodobú hladinu lieku prítomnú v tele pacienta.

Po prvej dávke je v tele pacienta 100 mg lieku. Keď pacient berie 100 mg lieku na druhý deň, 20 % lieku z predchádzajúceho dňa je vylúčené a 80 % z neho ostalo v tele.

Preto hladina lieku na druhý deň je súčet toho čo zostalo a novej dávky, teda

$$100.0{,}8+100\ .$$

Každý nasledujúci deň hladina lieku je 80 % z hladiny predchádzajúceho dňa plus nová dávka 100 mg. Túto situáciu môžeme popísať nasledovne:

Deň	Hladina lieku:
1.	100
2.	100+100.0,8
3.	$100+[100+100.0{,}8].0{,}8=100+100.0{,}8+100.0{,}8^2$
4.	$100+[100+100.0{,}8+100.0{,}8^2].0{,}8=100+100.0{,}8+100.0{,}8^2+100.0{,}8^3$

Z uvedeného zápisu vidieť, že ktorýkoľvek deň celkové množstvo lieku prítomného v tele sa dá určiť ako n-tý čiastočný súčet geometrického radu. Dlhotrvajúci efekt lieku môže byť určený ako súčet geometrického radu s prvou dávkou $a_1=100$ a kvocientom $q=0{,}8$. Teda

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{100}{1-0{,}8}=\frac{100}{0{,}2}=500\,,$$

čo znamená, že dlhodobá hladina lieku je okolo 500 mg.

Na základe uvedeného príkladu môžeme riešiť aj opačnú úlohu. Potrebujeme stanoviť dennú dávku lieku tak, aby dlhodobá hladina dosahovala určitú konkrétnu hodnotu. Táto úloha sa dá vyriešiť opäť použitím vzťahu pre súčet geometrického radu.

Napr. nech požadovaná dlhodobá hladina lieku v tele pacienta je 200 mg a vieme, že v tomto prípade každý deň telo vylúči 25 % z prítomného lieku v tele. Aká bude denná dávka tohoto lieku ?

Súčet radu bude $s = 200$, kvocient $q = 0{,}75$. Potom platí

$$200 = \frac{a_1}{1 - 0{,}75}$$

a odtiaľ

$$a_1 = 50\,.$$

Vypočítali sme, že denná dávka lieku pre pacienta je 50 mg.

C. Tretia – ekonomická oblasť sa bude zaoberať financiami. Budeme hovoriť o zloženom a spojitom úrokovaní, ktoré môže byť predmetom záujmu každého z nás [1]. Aj keď v tomto prípade ide o geometrickú postupnosť, úzka súvislosť s geometrickým radom nás oprávňuje zaradiť ju na toto miesto.

Uvažujme začiatočný vklad K_0, úrokovú periódu 1 rok, p % ročnú úrokovu mieru, teda úrokovú sadzbu $i = \frac{p}{100}$. Pôvodná hodnota vkladu sa za jeden rok zúročí na hodnotu

$$K_1 = K_0 + i\,K_0 = K_0(1+i)\,.$$

Za dva roky to bude

$$K_2 = K_0(1+i) + i\,K_0(1+i) = K_0(1+i)^2\,.$$

Za t rokov nadobudne hodnotu

$$K_t = K_0(1+i)^{\,t}\,.$$

Banky však zvyšujú frekvenciu úrokovania. To znamená, že úroky pripisujú n-krát do roka. Potom platí

$$K = K_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}. \qquad (*)$$

Je prirodzené očakávať, že zúročená hodnota vkladu sa bude zvyšovať, ak sa bude zvyšovať frekvencia úrokovania. Ak čisto teoreticky uvažujeme, že úroky sú pripisované každým okamihom, potom hovoríme o spojitom úrokovaní [3]. Budúcu hodnotu vkladu pri spojitom úrokovaní vypočítame ako limitu výrazu $(*)$ pre $n \to \infty$, teda

$$K = \lim_{n\to\infty} K_0 \left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = \left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ \frac{i}{n} = \frac{1}{z} \\ n = iz \\ z \to \infty \end{array} \right| = K_0 \lim_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z\,it} =$$

$$= K_0 \lim_{z\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} \right]^{it} = K_0\, e^{it}.$$

Teda pri spojitom úrokovaní platí

$$K = K_0\, e^{it}.$$

Uvedieme ilustračný príklad: Uvažujme začiatočný vklad $K_0 = 10\,000$ Sk pri 8 % ročnej úrokovej miere, teda úrokovej sadzbe i i=0,08. Porovnajme, ako sa zúročí náš vklad za 10 rokov, ak budeme úročiť a) 1-krát ročne, b) štvrťročne, c) mesačne a d) spojite.

Pre prípady a), b), c) dostávame vzťah

$$K = 10000\left(1+\frac{0{,}08}{n}\right)^{10n},$$

pričom $n = 1, 4, 12.$ Vzťah pre spojité úrokovanie d) bude mať tvar

$$K = 10\,000\, e^{0{,}08.10}.$$

Výsledné hodnoty sú:

a) $K = 10\,000\left(1+0{,}08\right)^{10} = 10\,000\,.\,2{,}158\,925 = 21\,589{,}25\ \text{Sk}$,

b) $K = 10\,000\left(1+\dfrac{0{,}08}{4}\right)^{40} = 10\,000\,.\,2{,}208\,040 = 22\,080{,}40\ \text{Sk}$,

c) $K = 10\,000\left(1+\dfrac{0{,}08}{12}\right)^{120} = 10\,000\,.\,2{,}219\,640 = 22\,196{,}40\ \text{Sk}$,

d) $K = 10\,000\, e^{0{,}8} = 10\,000\,.\,2{,}225\,541 = 22\,255{,}41\,\text{Sk}$.

Získané hodnoty potvrdili náš predpoklad.

3. ZÁVER

Aj keď článok nevyčerpal všetky zaujímavé možnosti použitia geometrickej postupnosti a geometrického radu, poskytol niekoľko námetov, ako spestriť výuku a priblížiť ju študentom.

Literatúra:

[1] Harshbarger, R., Reynolds, J.: *Mathematical Applications for Management, Life, and Social Sciences, D.C. Heat and Company, 1989, USA.*

[2] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1986.*

[3] Špirková, J.: *Spojité úrokovanie – zdroj motivačných príkladov, Zborník 25. konferencie VŠTEP, Trnava 7. – 10. 9. 1998.*

ADRESA:
RNDr. Anna Bezáková
Technická univerzita
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Masarykova 24
960 53 Zvolen