SÚČASNÉ PROBLÉMY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY A DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH V NÁVÄZNOSTI NA STREDNÉ ŠKOLY

Marta Pajtášová

ABSTRACT: *The article deals with questions of entrance tests and study of mathematics and descriptive geometry in the first year of the university.*

1. ÚVOD

Na istej matematickej konferencii ma zaujal citát, ktorý vyjadroval typicky matematický názor na svet.
Jeho pointa spočívala v tom, že všetkému vôkol nás sa dá priradiť číslo a odobratím čísla veci strácajú podstatu.
Je to krásna myšlienka veľkého matematika, ktorého meno si nepamätám, napriek tomu si dovolím sa k jeho názoru vyjadriť.
„Priraď vôni čísla (napríklad objemy jej zložiek), podstata ostáva, čaro sa stratí.“

Myslím, že k tomuto názoru by sa priklonilo veľké množstvo ľudí, pre ktorých je matematika veľmi obtiažnou vedou. Iste nikto nepochybuje o tom, že matematika je neodmysliteľným základom všetkých vedných disciplín s technickým zameraním. A práve preto by mala byť „pracovným nástrojom“ a nie „postrachom“ technikov, či už na úrovni odborného stredoškolského, či vysokoškolského vzdelávania.
Chcela by som poukázať na niekoľko problémov v oblasti matematiky a deskriptívnej geometrie pri prechode študentov zo strednej na vysokú školu.

2. PRIJÍMACIE KONANIE

V *Návrhu koncepcie ďalšieho rozvoja vysokoškolského školstva na Slovensku pre 21. storočie* sa v časti 2 a v bode 2. Prístup k vysokoškolskému vzdelávaniu, problematika prijímacieho konania v odseku 2.1 Súčasný stav konštatuje , citujem:
„Prijímacie konanie

Platný vysokoškolský zákon poskytuje vysokým školám, resp. ich fakultám autonómiu pri určovaní hľadísk a spôsobu overovania potrebnej spôsobilosti uchádzačov o vysokoškolské štúdium. O prijatí uchádzača na štúdium rozhoduje dekan. Overovanie spôsobilosti uchádzačov o vysokoškolské štúdium sa realizuje v rámci prijímacieho konania.

V súčasnosti si jednotlivé fakulty organizujú prijímacie konanie jednotlivo. Pre overenie spôsobilosti uchádzačov používajú obvykle formu písomných testov. V niektorých prípadoch sa pri konečnom hodnotení berú do úvahy i výsledky zo strednej školy. Pri súčasnej praxi je namieste otázka, ako , do akej miery, prípadne, či vôbec preverujú dnes používané spôsoby prijímacieho konania vlastnosti , schopnosti , úsilie , vytrvalosť a zanietenie uchádzačov, ktoré by mali byť rozhodujúcimi pre
prijatie na vysokoškolské štúdium.

Uplatnenie autonómie pri prijímacom konaní vedie v praxi k veľkej rôznorodosti v tejto oblasti medzi fakultami, a to aj medzi fakultami s príbuznými študijnými odbormi. " Koniec citátu.

Táto situácia by mala byť riešená pomocou celonárodných výkonových štandardov navrhovaných v projekte Milénium.

Kým sa však podarí uskutočniť tieto rozsiahle ciele, mali by sme sa zamyslieť nad konkrétnymi problémami riešiteľnými už v súčasnosti, akými sú napríklad zadania príkladov pri prijímacích pohovoroch. Často sa stretávame s príkladmi, ktoré majú jednoduché a rýchle riešenie, ale atypické zadanie. Priemerný študent matematiky, ktorý môže byť veľmi dobrým študentom odborných predmetov na svojej odbornej škole nemá šancu dopracovať sa k riešeniu takto zadaného príkladu, pretože nemá dostatok skúseností vzhľadom k rozsahu matematiky, s ktorou sa na strednej škole stretol. Akákoľvek netypická obmena zadania spôsobí nepochopenie a následné neriešenie príkladu. Tým sú znevýhodnení študenti odborných škôl oproti študentom gymnázií, napriek tomu , že k svojmu odboru inklinujú oveľa skôr ako študent gymnázia, ktorý sa pre tento odbor rozhodol len pri ukončení stredoškolského štúdia.

3. MATEMATIKA

Situáciu podstatne rôznej úrovne vedomostí z matematiky, ktorú je naozaj obtiažne zvládnuť, by mohli riešiť intenzívne doučovacie kurzy matematiky organizované v prvom mesiaci zimného semestra v prvom ročníku vysokej školy.
Konkrétna vysoká škola by si vyrovnala úroveň vedomostí svojich prijatých poslucháčov, ale už len vo veľmi špecifickom smere. A to podľa zamerania jednotlivých fakúlt a odborov. Napríklad pri technických odboroch sú často u poslucháčov stredných odborných škôl veľmi slabé vedomosti z oblasti analýzy (integrál, derivácia, logaritmus). Tým by sa predišlo problémom , ktoré vznikajú tým, že študent prestáva po prvých prednáškach rozumieť učivu a po niekoľkých ďalších prestáva prednášky navštevovať. Samozrejme

tento deficit nemá šancu v skúšobnom období samostatným štúdiom vyrovnať. Tak sa stáva , že nám školy opúšťajú mladí ľudia , ktorí by mohli vo svojom zvolenom odbore úspešne pokračovať, nebyť toho, že nezvládli v prvom ročníku vysokej školy skúšku z matematiky , pretože nemali rovnaké východzie podmienky vzhľadom na strednú školu , ktorú navštevovali.

4. DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA

Situácia v oblasti deskriptívnej geometrie je ešte zložitejšia. Budúci technickí inžinieri potrebujú zvládnuť počas prvého semestra niekoľko zložitých zobrazovacích metód a pritom mnohí z nich si zo strednej školy neprinesú absolútne žiadne vedomosti z daného predmetu. Myslím si, že situáciu by značne zlepšilo, keby každý študent odbornej strednej školy , ktorý sa rozhodne pre štúdium na vysokej škole, absolvoval aspoň jednoročné štúdium predmetu deskriptívna geometria, ideálne v treťom ročníku strednej školy. Som toho názoru, že preberanie viacerých zobrazovacích metód , ako je kótované premietanie , Mongeova projekcia, prípadne kosouhlé premietanie, je pre stredoškolských študentov zbytočne zaťažujúce. Som si vedomá, že mnoho pedagogických odborníkov v oblasti deskriptívnej geometrie mi bude oponovať, že z didaktického hľadiska systematicky nadväzujúce.

Myslím si, že by bolo úplne postačujúce , aby študenti strednej školy zvládli základy pravouhlej axonometrie. Tá totiž podľa môjho názoru spĺňa pedagogicko-psychologický cieľ – ukázať zmysel deskriptívnej geometrie ako nástroja zobrazovania predmetov. Pričom pravouhlú axonometriu z dôvodu jej najlepšej názornosti považujem za ideálnu.

5. ZÁVER

V súčasnej dobe, keď je študentom sprístupnené obrovské množstvo informácií , považujem za veľké pedagogické majstrovstvo práve výber príkladov z matematiky a rovnako i z deskriptívnej geometrie. Keďže je veľkou pravdou , že najjednoduchšie riešenie je to najdokonalejšie, budú vždy aktuálne zásady J.A. Komenského :od jednoduchšieho k zložitejšiemu , zásada názornosti a zásada primeranosti. Ich dodržiavaním by sa dalo vo veľkej miere predísť všeobecnému strachu z matematiky a deskriptívnej geometrie a následnej neúspešnosti v týchto predmetoch z psychologických dôvodov.

A práve o to by nám ako pedagógom malo ísť predovšetkým.

Literatúra:

[1] *Návrh koncepcie ďalšieho rozvoja vysokého školstva na Slovensku pre 21. storočie , 1999*

[2] Rosa,V. – Turek,I. – Zelina, M.: *Návrh koncepcie rozvoja výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike (Projekt „Milénium"),1999*

Adresa:
RNDr. Marta Pajtášová
KMDG DF
Technická univerzita
960 53 Zvolen

O NIEKTORÝCH ASPEKTOCH VÝUKY MATEMATIKY NA LF TU VO ZVOLENE

RNDr. František Pánek, CSc.

ABSTRACT: *The paper deals with the possibility of using the credit system in the process of teaching mathematics at the Faculty of Forestry. Further it analyses and concentrates on the connection between the guaranteed grade and the figure of points acquired by the entrance exam. The paper points at the possibility of using the analyses to reach better results in the process of teaching mathematics at the Faculty of Forestry of the Technical University in Zvolen.*

Zdá sa byť pravdepodobné, že za určitých podmienok existuje súvislosť (vzťah) medzi prospechom na strednej škole, prospechom z maturity, výsledkom prijímacích skúšok, garantovanou známkou (garantovaná známka je podmienená získaním dostatočného počtu bodov z písomných prác, pričom

70 - 80 % odpovedá známke 3
81 - 90 % -“- 2
91 – 100 % -“- 1).

Poslucháči, ktorí nedosiahnú aspoň 70 % bodov z písomných prác počas semestra sa podrobujú skúške. Poslucháči, ktorí nie sú spokojní s garantovanou známkou si môžu túto známku zlepšiť absolvovaním skúšky. Keď neuspejú, ostáva im garantovaná známka.

Tento systém je obmenou kreditného systému, ktorý je uplatňovaný na VŠE v Prahe. Ešte si dovoľujem podotknúť, že na LF TU vo Zvolene je matematika jednosemestrovým predmetom a ja som jej gestorom.
Obsahom predmetu sú základy lineárnej algebry a lineárneho programovania. Ďalej je to diferenciálny a integrálny počet s aplikáciami v rozsahu gymnaziálnych osnov. Predmet pozostáva z trojhodinových prednášok a trojhodinových cvičení po dobu 12 týždňov, pričom spravidla dve a niekedy i viac prednášok i cvičení z rôznych dôvodov pravidelne odpadávajú – dekanské a rektorské voľná, štátne sviatky a pod.

Z informácií, ktoré už niekoľko rokov mám k dispozícii – priemer z matematiky na strednej škole, počet bodov získaných z prijímacej skúšky z matematiky, celkový počet bodov získaný na prijímacej skúške, počet bodov z písomných prác počas semestra, druh absolvovanej strednej školy – mohol by som robiť rôzne rozbory. Vzhľadom na požadovaný rozsah referátu max. 6 strán sa obmedzím na skúmanie vzťahu (asociáciu) medzi počtom bodov získaných z príjmacej skúšky z matematiky a počtom bodov z písomných prác v priebehu semestra u poslucháčov lesného inžinierstva v roku l996.

Triedenie dosiahnutých výsledkov vo zvolených bodových skupinách sa nachádza v tabuľke 1.

Tabuľka 1.

Prijímacie	*Semestrálne písomné práce*				
skúšky	0 - 30	31 - 35	36 - 40	41 - 45	*Spolu*
0 – 60	34	9	13	1	57
61 – 70	12	4	9	4	29
71 – 80	13	10	1	6	30
81 – 96	5	1	5	3	14
Spolu	64	24	28	14	130

Zvolené bodové rozpätie 31-35 (resp. 61 - 70) zodpovedá približne garantovanej známke „dobre“, rozpätie 36 - 40 (resp. 71 - 80) známke „veľmi dobre“ a rozpätie 41 - 45 (resp. 81 - 96) známke „výborne“.
V tejto tabuľke by sme za normálnych okolností očakávali najvyššie početnosti okolo hlavnej diagonály a v jej najbližšom okolí. Početnosti ďalej od diagonály by sa mali znižovať. Pohľadom na tabuľku zistíme, že tomu tak nie je. Ďalej sa pokúsime túto neočakávanú skutočnosť zdôvodniť:

- Celkový počet triedených poslucháčov je malý. Tento nedostatok by bolo možné odstrániť zlúčením niekoľko po sebe idúcich zoznamov poslucháčov, čo by podľa môjho názoru bolo možné, nakoľko sa nemenia kritéria prijímacích skúšok ani semestrálnych písomných prác.

- Rad študentov sa po prijímacích skúškach nechával doučovať, resp. priebežne študujú počas semestra. To vysvetľuje skutočnosť, že existuje pomerne veľký počet študentov so slabými výsledkami pri prijímacích skúškach a dobrými výsledkami zo semestrálnych písomných prác (viď 1. riadok tabuľky).

- Pomerne veľký počet študentov s dobrými výsledkami pri prijímacích skúškach neuspeje pri semestrálnych písomkách. To môže byť spôsobené nielen zanedbaním priebežného štúdia behom semestra, ale aj inými skutočnosťami. V tabuľke sa to prejavuje v riadkoch 2., 3., 4.

Zo stručného popisu problematiky vidno, že skúmanie niektorých súvislostí a ich pochopenie by mohlo viesť k lepším výsledkom pri výuke matematiky. Z tabuľky vidíme skutočnosť, že poslucháči so zlými výsledkami z prijímacích skúšok z matematiky majú zlé výsledky pri semestrálnych písomkách ku garantovanej známke. V ročníku je pomerne veľká skupina študentov so slabými vedomosťami z matematiky, ktorí sú vďaka zvoleným prijímacím kritériám prijatí na štúdium, nakoľko z matematiky majú nedostatočné vedomosti. Je totiž prijatá zásada, že o prijatí na Lesnícku fakultu rozhoduje celkový počet bodov získaný pri prijímacej skúške, pričom nie je stanovený limit na minimálny počet požadovaných bodov z jednotlivých predmetov. Do l. ročníku sú často prijatí študenti, ktorí pri prijímacej skúške z matematiky získajú „nula“ bodov, čo považujem za nesprávne. Na túto skutočnosť som už aj upozornil, no zatiaľ bezvýsledne.

Adresa autora:

RNDr. František Pánek, CSc.
Technická univerzita
Katedra matematiky a
deskriptívnej geometrie DF
Masarykova 24
960 53 Zvolen

NÁZORNOSŤ A ABSTRAKCIA VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

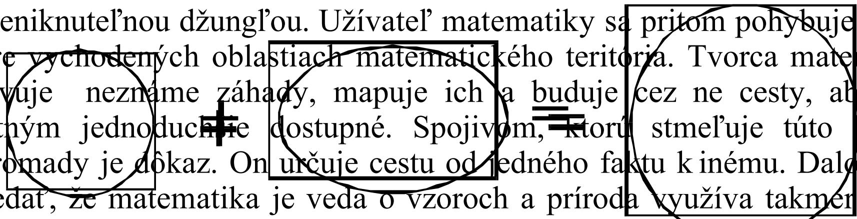
Anna Paruleková

ABSTRACT: *Present article discusses about art of teaching and some visual and abstract problems.*

André Gide hovorí: „Umenie to je výsledok spolupráce človeka s Bohom. Väčšinu práce pritom musí urobiť Boh.“

Určite toto tvrdenie neplatí len pre umenie hudobné alebo výtvarné ale možno ho zovšeobecniť, teda môžeme hovoriť aj o umení učiť. Ak použijem z myšlienok slávneho slovenského matematika, študenti by si mali spomínať na svojho učiteľa matematiky ako na ostrov láskavosti, tolerantnosti, trpezlivosti a porozumenia v mori základného i rozširujúceho stredoškolského učiva. Táto krásna charakteristika bola vznesená konkrétne už na zosnulého popredného slovenského matematika, ktorý sám povedal: „Čím sa vyznačuje duša matematiky ? . . . je to bezpochyby výchova človeka k túžbe po hľadaní pravdy.“ Na pojem základné stredoškolské učivo – nevyhnutné minimum možno hľadieť z rôznych hľadísk. (Po monitore v šk. roku 1999/2000 je ťažko ho definovať.) Všetky hľadiská - užitočnosti pre rôzne profesie, nemožnosti učiť niekoho viac a niekoho menej – možno zosumarizovať do otázky : Čo je v matematike cenné pre každého? Do určitej miery môže byť odpoveďou, ktorú dostal mladý Galois, keď sa pýtal, čo sa má učiť z matematiky: „Je jedno, na ktorej konkrétnej časti matematiky sa ju budeš učiť, pokiaľ sa budeš učiť dobre.“ Zo skúsenosti vieme, že neraz po vynaložení veľkého úsilia, aby bolo čo najlepšie vysvetlené sa nás študenti opýtajú: . . . „ a načo nám to bude?“ Tomuto možno predísť, ak vopred vysvetlíme, že nie matematika slúži na aplikáciu, ale že naopak matematiku dedukujeme z pozorovania prírody a vesmíru. Môžeme spomenúť správanie planét v slnečnej sústave (Johannes Kepler): ak tretiu mocninu vzdialenosti ktorejkoľvek planéty od slnka vydelíme druhou mocninou jej obežnej dráhy, dostaneme vždy to isté číslo. Alebo teóriu gravitácie (Isaac Newton), ktorá vyriešila všetky možné hádanky okolo pohybu hviezd a planét. Aj fyzik Paul Dirac povedal: „Boh je matematik.“ Všetky zmeny v prírode môžu byť opísané matematickým procesom, rovnako ako formy v prírode.

Matematika teda nie je len zbierka izolovaných faktov; je skôr ako krajina so svojou vlastnou geografiou, ktorú jej užívatelia a tvorcovia nevyužívajú na navigáciu pri prechode tým, čo by ináč bolo



nepreniknuteľnou džungľou. Užívateľ matematiky sa pritom pohybuje len po dobre vychodených oblastiach matematického teritória. Tvorca matematiky objavuje neznáme záhady, mapuje ich a buduje cez ne cesty, aby boli ostatným jednoduchšie dostupné. Spojivom, ktorú stmeľuje túto krajinu dohromady je dôkaz. On určuje cestu od jedného faktu k inému. Dalo by sa povedať, že matematika je veda o vzoroch a príroda využíva takmer každý vzor, ktorý je k dispozícii. Opäť možno uviesť príklady: molekulárna štruktúra DNA vychádza z matematických kľúčov, špirálovitý tvar slimačej ulity, krivka snehovej vločky – fraktálová množina, zobák orla, chrbtová plutva žraloka majú tvar evolventy, kryštály – pravidelné mnohosteny, mydlové bubliny vytvárajúce penu sa stretajú v hranách ústiacich do bodov, ktoré nazývame trojnásobné vrcholy (vychádzajú z nich tri hrany pod uhlami 120^0), počet pravotočivých a ľavotočivých špirál na borovicovej šiške – susedné Fibonacciho čísla, pod. v kvete slnečnice, pavúky a špirála – krivky, po ktorých lezú sú logaritmické špirály, v dráhe elektrónu je prítomnosť päťuholníka, zemetrasenia – logaritmická Richterova stupnica (seizmológia), matematická pravidelnosť okvetných lístkov je pri väčšine rastlín číslo z Fibonacciho postupnosti (Leonardo Fibonacci svoju postupnosť objavil 1200 pri probléme rastu populácii zajacov) 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 , . . . , ananásy majú osem radov šupín kosoštvorcového tvaru stáčajúcich sa šikmo doľava a trinásť šikmo doprava, v zárodkoch nachádzame Fibonacciho čísla a špirálne tvary, pritom platí

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \doteq 1{,}6 \text{ - zlaté číslo}$$

(kde $\left\{F_n\right\}_1^{\infty}$ je Fibonacciho postupnosť), s ktorým sa stretávame aj v anatómii ľudského tela. Matematickým detektívom príroda zanechala kľúč: uhol medzi po sebe idúcimi zárodkami je zlatý uhoľ $360.(1\text{-}\varphi)^0 = 137{,}5^0$. Roku 1907 tento kľúč skúmal G. Van Iterson – sú dve triedy vzájomne prelínajúcich špirál – jedna zatáčajúca sa v smere hodinových ručičiek a druhú proti smeru a vzhľadom na vzťah medzi Fibonacciho číslam a zlatým rezom sú počty špirál v týchto dvoch triedach po sebe idúcimi Fibonacciho číslami. Ktorými, to závisí od toho, ako nahusto je natočená špirála – existuje vždy jeden okvetný lístok na vonkajšom konci každej špirály práve v jednej z tried.

Tieto nekonečné úvahy možno uzavrieť výrokom Leonarda da Vinciho (1452 – 1519) v diele O Božskej úmere: „ Nijaké ľudské bádanie nemožno nazvať vedou, kým neobsahuje matematický rozbor a vysvetlenie.“

Jedným z odborných zameraní konferencie, je problém názornosti a abstrakcie vo vyučovaní matematiky. Tato problematika je aktuálna, súčasne však veľmi náročná a rozsiahla. Veď napríklad, podľa známej matematičky R. Péterovej, abstrakcia hrá v celej matematike základnú úlohu (1). Preto môj príspevok chce sa len dotknúť uvedenej témy a to z hľadiska metódy dôkazu, ktorá tvorí základ aj pri vyučovaní matematiky.

Významní matematici M. Kac a S.M. Ulam v úvode svojej publikácie (2), charakterizujú matematiku jednak ako vedu a tiež ako umenie. Rozlišujú v nej objekty a metódy. Ako príklad matematických objektov uvádzajú cele kladne čísla. Vieme, že vysoký stupeň abstrakcie v matematike, vedie k úplnému zanedbaniu fyzikálneho pôvodu objektov. Napríklad v geometrii body, priamky a roviny nemusia byt vôbec definovane. Podľa I Stewarta (3) môžeme matematiku prirovnať ku stromu, ktorý je zakorenený v číslach, ale rozvetvuje sa do stále ezoterickejsich štruktúr tak, ako postupujeme od kmeňa cez hlavne vetvy k stále menším a menším konárom. Kde už nemusíme vedieť čo veci sú, ak vieme aké tvrdenia môžeme o nich vysloviť(2).

Za hlavnú metódu je považovaný formalizmus dôkazu, ktorý sa od staroveku takmer nezmenil, podľa Malej encyklopédie matematiky (4), dôkazom je logické deduktívne odvodenie výroku z iných správnych výrokov.

Je to postupnosť tvrdení, z ktorých každé vyplýva z predchádzajúcich tvrdení alebo dohodnutých axióm, ktoré vo svojom dôsledku definujú skúmanú oblasť matematiky.

Podľa (3).nevystihuje tato definícia dôkazu podstatu. I. Stewart prirovnáva dôkaz k románu. Ako román, tak aj dokaz musia rozprávať zaujímavý príbeh. A to je najdôležitejšou vecou aj pri vyučovaní matematiky. Je zaujímavé, že I. Stewart vo svojej publikácii venuje značnú pozornosť Fibonacciho číslam. Kepler napísal: „Geometria ma dva veľké poklady Pythagorovu vetu a zlatý rez.“

V nasledujúcej názornej geometrickej úlohe využijeme zlaté číslo φ. Máme nájsť rozmery x a y štvorcov a obdĺžnika, aby pre ich obsahy platilo

$$x^2 + xy = y^2$$

$$x^2 + xy - y^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} = y\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = y\frac{1}{\varphi}$$

Ak túto rovnicu vynásobíme číslom π, dostaneme podobnú úlohu pre kružnice a elipsu.

Číslo φ nám poslúži pri dôkaze nasledujúcej iracionálnej rovnice,

$$1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

ktorá vzniká podľa Cardanových vzorcov pre výpočet jedného koreňa kubickej rovnice.

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

dôkaz máme ihneď, ak si uvedomíme, že pre φ platia vzťahy:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$$

$$2 + \sqrt{5} = \varphi^3$$

$$2 - \sqrt{5} = -\frac{1}{\varphi^3}$$

Literatúra:

[1] R. Peterová: *Matematika je krásna, Pokroky 2, roč. 36/1991*
[2] M. Kac, S. M. Ulam: *Matematika a logika, Praha 1997*
[3] J. Stewart: *Čísla prírody, Bratislava 1996*
[4] *Malá encyklopédia matematiky, kol. Bratislava 1981*
[5] A. Suchotin: *Rytmy a algoritmy, Bratislava 1987*
[6] T. Pappasová: *Potešenie z matematiky, Bratislava 1997*
[7] V. Jodas: *Za Tiborom Neubrunnom, Mat. obzory, zv. 38, 1992*

Adresa :
RNDr. Anna Paruleková
Gymnázium sv.Andreja
nám. Andreja Hlinku 5
034 01 Ružomberok

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE NIELEN NA EKONOMICKEJ FAKULTE

Mária Pôbišová

ABSTRACT: *All our students should be provided both with good knowledge and abilities, such as the ability to express facts and their phenomena mathematically. Therefore, in this article I am concerned with linear programming - the subject to be taught to students at all technical universities not only at the Faculty of Economy. All the students at technical universities should become acquainted with the simplest tasks of linear programming being inevitable for practice, the solution of which does not require more than basic theoretical knowledge of algebra and theory of numbers. The graduates should have a good knowledge of what mathematics can solve, how to formulate mathematical problems and introduce the results of mathematical solution into practice.*

1. ÚVOD

V súčasnosti pre všetky odvetvia národného hospodárstva, pre výrobnú i nevýrobnú oblasť je základnou požiadavkou zvyšovať efektívnosť, produktivitu a kvalitu práce. Vyrábať efektívne – to znamená získať z každej odpracovanej hodiny, z každej spotrebovanej tony materiálu a kilovathodiny energie, z každého stroja i z každej vynaloženej koruny investícií – čo najväčší prínos pre spoločnosť. V našich podmienkach pre rast produktivity práce a tým aj pre celkový rast životnej úrovne rozumné hospodárenie so základnými výrobnými surovinami a ich lepšie využívanie má vždy mimoriadny význam a nemali by sme so všetkým len tak šafáriť. Preto už dlhšiu dobu veľmi aktuálnymi úlohami v praxi sú úlohy lineárneho programovania. V dnešnej dobe je vo vyspelých priemyselných štátoch **lineárne programovanie veľmi intenzívne využívané** pri riešení nielen ekonomických problémov, ale aj problémov v oblasti techniky, poľnohospodárstva, lesníctva, drevárstva, dopravníctva a ďalších. Preto aj u nás na Slovensku je ich potrebné zavádzať do základov vysokoškolskej matematiky nielen na Ekonomickej fakulte, ale aj na všetkých ostatných Technických univerzitách v inžinierskom vzdelávaní.

2. LINEÁRNE PROGRAMOVANIE AJ NA TU VO ZVOLENE

Technická univerzita vo Zvolene má v súčasnosti 4 fakulty: lesnícku, drevársku, fakultu ekológie a environmentalistiky a fakultu environmentálnej a výrobnej techniky. Na každej tejto fakulte je potrebné **vyučovať matematiku aplikovanú do praxe**, ktorou je práve aj rozsiahla trieda všeobecných úloh **lineárneho programovania**. Pre riadenie lesného hospodárstva, pre lesnícku i drevársku ekonomiku, pre drevársky priemysel a lesné dopravníctvo sú tieto úlohy dôležité.

A tak pre študentov viacerých inžinierskych študijných odborov aj na TU vo Zvolene už najmenej 10 – 12 rokov zavádzame do základov vysokoškolskej matematiky aj niektoré najdôležitejšie klasické (všeobecné) úlohy lineárneho programovania, ktoré sa vlastne riešili už pred pár rokmi. Táto disciplína vznikla z potrieb ekonomickej praxe stanovujúcej isté ciele, ktoré je možné pri rešpektovaní ohraničujúcich podmienok dosiahnúť **metódami lineárnej algebry**. Nakoľko lineárna algebra tvorí teoretický základ pre ostatné matematické disciplíny a má aj aplikačný význam pre mnohé odborné, ekonomické a technické disciplíny, tak je **lineárna algebra ako jedna z prvých matematických disciplín,** ktorou sa začína výuka matematiky na všetkých našich fakultách.

Preto pán prof. A. Dekrét, doc. F. Husárik a RNDr. E. Senko napísali už v roku 1991 skriptá „Matematika 1“, čo je vlastne **Lineárna algebra a jej aplikácie v lineárnom matematickom programovaní.** Tento učebný text bol spracovaný predovšetkým z toho pohľadu, že je v ňom uplatňovaná snaha dopĺňať teoretickú časť výkladu množstvom aplikačných úloh z lineárneho programovania vhodných pre lesnícku a drevársku prax. Snaha vydať skriptá prístupné poslucháčom všetkých foriem štúdia viedla autorov k tomu, že **v niektorých prípadoch upustili od podrobnejších matematických dôkazov**. Úplné matematické dôkazy čitateľ totiž môže nájsť v odbornej matematickej literatúre, ktorá je uvedená na konci skrípt a tieto skriptá boli už pre študentov viac krát vydané.

Nakoľko 20 rokov sa aj ja zaoberám problémami lineárneho programovania a každoročne matematiku cvičím študentov 1. ročníka Lesníckej a Drevárskej fakulty vo Zvolene, tak aj sama sa snažím s poslucháčmi čoraz viac cvičiť aj úlohy lineárneho programovania. Pretože naším študentom nie je matematika veľmi sympatická a napr. lesníkom je matematika skoro ten najposlednejší predmet, chcem vždy v nich predsa len vzbudiť záujem o matematiku a o jej aplikáciu v lesnom hospodárstve, v drevospracujúcom priemysle, dopravníctve a pod.

Jednou takou aplikáciou z praxe je napr**. nevyvážená dopravná úloha** – keď požiadavky odberateľov na nejakú surovinu či materiál prevyšujú celkovú kapacitu dodávateľov - a táto úloha, v praxi sa nachádzajúca dosť často, sa dá previesť na vyváženú dopravnú úlohu zavedením umelého (fiktívneho) dodávateľa. Jednoduchou Habrovou metódou úzkych profilov alebo metódou min. prvku sa dá pomerne rýchlo určiť aj optimálne riešenie tejto úlohy, lebo pre riešenie dopravných úloh nám nie je výhodná ani jedna logická **schéma Simplexovej metódy**, ktorá je však univerzálnou metódou riešenia úloh lineárneho programovania. Táto **metóda úzkych profilov** môže byť v mnohých úlohách s menším počtom ohraničení a premenných a s väčším počtom nulových štrukturálnych koeficientov **nielen dostatočne účinná ale i veľmi úsporná** a tak na cvičení ju rada ukážem i našim študentom, lebo je blízka mysleniu pracovníkov praxe. Podľa Dantziga dopravná úloha sa najlepšie rieši tužkou na papieri, lebo jej riešenie si vyžaduje iba sčitovanie a odčitovanie.

Na Lesníckej fakulte majú však študenti len 1 semester výuky matematiky a tento 1 semester (2 hodiny prednášky a 3 hodiny cvičenia za týždeň) je rozhodne aj študentom veľmi málo, keď za tento čas sa má s poslucháčmi prebrať **algebra, funkcie viac premenných – až po diferenciálny a integrálny počet a aké také základy lineárneho programovania.** A tak som na cvičeniach rýchle zistila, že poslucháčom je vždy najväčším problémom z textu nejakého príkladu **prejsť na konkrétny matematický model úlohy.** No ja na študentov zásadne nekričím, ale snažím sa im ísť v ústrety. Nechcem, aby sa ma vysokoškoláci báli. Príklady si pripravujem väčšinou na fólie, aby nám to všetko išlo trocha rýchlejšie a aby som na cvičení matematiky mohla s nimi prebrať čo najviac príkladov aj z lineárneho programovania. Jedno im však poviem hneď na prvom cvičení, že na vysokej škole ich už do práce nikto tlačiť nebude a zodpovední sú už za seba len oni sami. Aj tej vysokoškolskej matematiky nech sa nezľaknú, ale nech sa predsa všetko učia postupne, hneď po prednáške. Ak niečo z matematiky nepochopili, na cvičení mi potom môžu dať na to otázku a príslušnú vec im rada vysvetlím. Jednou takou ťažkou úlohou pre nich je aj úloha o polotovaroch. Bola som rada, keď sa mi potom viacerí študenti na konci semestra poďakovali, lebo že pri mne na cvičení vraj pochopili ešte mnohé veci – a to aj zo stredoškolskej matematiky, ale aj určovanie matematických modelov v úlohách lineárneho programovania.

V roku 1995 som preto napísala 167 stranovú publikáciu „**Vybrané úlohy z lineárneho programovania**“, ktorá obsahuje spolu 136 ilustračných príkladov. Pritom je v nej asi 30 príkladov vhodných pre lesnícku a drevársku prax, ktoré potom riešime na cvičení matematiky so študentami 1. ročníka viacerých inžinierskych študijných odborov na TU vo Zvolene. Sú tam však mnohé príklady vhodné aj pre poľnohospodárov, chemikov, technikov, dopravárov, ekonómov, strojárov a pod. Kvôli prehľadnosti sú zatriedené do 5 základných kapitol podľa matematických modelov na

- úlohy plánovania výroby - (sortimentné a kapacitné),
- úlohy o zmesiach,

- úlohy o rezných plánoch - (minimalizujúce odpad alebo spotrebu materiálu, t.j. maximalizujúce výťaž),
- úlohy dopravné - (vyvážené a nevyvážené),
- analógie dopravných úloh - (napr. priraďovacie a distribučné úlohy).

Aby som poukázala na možnosti širokého použitia modelov LP, stručne som charakterizovala v jednotlivých kapitolách niekoľko aplikácií. Ich úlohou je informovať všetkých čitateľov o tom, v ktorých oblastiach sa metódy lineárneho programovania už úspešne použili.

Každý problém najskôr slovne charakterizujem a potom ho sformulujem pomocou matematického modelu ako úlohu lineárneho programovania. Niektoré úlohy sú vyriešené aj podrobne numericky, na konci podkapitol sú napísané výsledky (optimálne riešenia – a to primárne i duálne) čiže výsledky skoro všetkých úloh, ktoré sú v zbierke uvedené len pomocou primárneho matematického modelu. Spravidla najskôr som konštruovala jednoduché modely, ktorých riešenia sa môžu využiť aj na zostavenie zložitejších úloh. Každá kapitola (alebo podkapitola) ďalej končí cvičením.

V publikácii cieľom nebolo uviesť vyčerpávajúci komplex aplikácií lineárneho programovania, no dúfam, že predložené praktické úlohy dali resp. dajú čitateľom dostatočnú predstavu o jeho použití. Napísaná bola predovšetkým tej časti čitateľskej verejnosti, ktorá si chce dobre osvojiť základné problémy lineárneho programovania na konkrétnych príkladoch z praxe. Preto je vhodnou učebnou pomôckou aj pre študujúcu vysokoškolskú mládež na Technickej univerzite nielen vo Zvolene, ale aj na iných rôznych Technických univerzitách, lebo napísala som ju hlavne pre tento cieľ. Publikácia však môže dobre poslúžiť aj všetkým tým pracovníkom, ktorí sa zaoberajú aplikáciami matematiky v praxi a pomôže im pri riešení praktických úloh. V predajni skrípt na TU vo Zvolene si ju ešte každý záujemca môže kúpiť.

3. ZÁVER

Nakoľko všetci naši budúci inžinieri by mali mať nielen znalosti, ale aj schopnosti pracovníkov, a to napr.:

- schopnosť odlíšiť podstatné stránky javov od nepodstatných,
- schopnosť orientovať sa v informáciách a hodnotiť ich,
- schopnosť zabezpečiť potrebné informácie a najmä
- schopnosť vyjadrovať skutočnosti a ich javy matematicky,

tak je rozhodne potrebné prednášať základy lineárneho programovania poslucháčom na všetkých Technických univerzitách a nielen na Ekonomickej fakulte. Viď [5]. Všetkým budúcim inžinierom treba ukázať niektoré najdôležitejšie klasické – tie najjednoduchšie úlohy lineárneho programovania nevyhnutné pre prax, na riešenie ktorých potrebujeme často len **základné teoretické vedomosti z algebry a z teórie čísel**. Inžinieri by mali dobre vedieť, čo matematika dokáže riešiť, ako je potrebné problémy matematicky formulovať a interpretovať výsledky matematického riešenia do praxe.

Nedostatok financií v školstve nám však k lepšiemu vyučovaniu ani vysokoškolskej matematiky nepomôže.

Literatúra:

[1] Dantzig,G.B.*: Lineárne programovanie a jeho rozvoj, SVTL, Bratislava, 1966.*

[2] Gass,S.I.*: Lineárne programovanie, metódy a aplikácie, ALFA, Bratislava, 1972.*

[3] Dekrét, A. - Husárik,F. - Senko, E.: *Matematika 1,Lineárna algebra a jej aplikácia v lineárnom matematickom programovaní, TU vo Zvolene, 1991.*

[4] Pôbišová, M.: *Vybrané úlohy z lineárneho programovania, TU, MATCENTRUM, P.O.BOX 12, 960 02 Zvolen , 1995, str. 80 - 967315-2-1*

[5] Hoschek, J.: *Informačné systémy a informačné technológie v lesníctve, TU vo Zvolene, 1997.*

Adresa:
RNDr. Mária Pôbišová
Technická univerzita
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Masaarykova 24
960 53 Zvolen

PRÁCA SO ŽIAKMI NADANÝMI NA MATEMATIKU V MATEMATICKOM KRÚŽKU

Alena Prídavková

ABSTRACT: *This paper deals with issue of care of pupils which are gifted in math. The field is devoted to characteristic of term gift for math. The majority of article is devoted to representation of the work with talented pupils outside school-time. There is list of topics of the work in these meetings and two meetings are represented in detail.*

1. ÚVOD

V poslednom období sa dostáva do popredia záujmu, nielen odborníkov ale aj verejnosti, problematika týkajúca sa vyhľadávania a následne aj výchovy a starostlivosti o nadaných. Vznikajú nové projekty, ktoré podporujú rozvoj rôznych druhov nadania. Vznikla dokonca nová vedecká disciplína – psychológia nadania, ktorá opisuje osobnostné črty nadaných, poskytuje rôzne možnosti a spôsoby na ich identifikáciu a výchovu. Zvýšil sa záujem aj o žiakov so špecifickými matematickými schopnosťami. Matematika preniká čoraz viac do mnohých oblastí života a aj táto skutočnosť je jedným z dôvodov na to, aby sa vyhľadávali a vzdelávali žiaci, u ktorých je matematické myslenie na veľmi dobrej úrovni.

2. CHARAKTERISTIKA NADANIA NA MATEMATIKU

Pod pojmom nadanie budeme rozumieť súhrn vrodených vysokých schopností, priaznivých osobnostných predpokladov, ktoré sa prejavujú vo všeobecných alebo špecifických činnostiach a vďaka ktorým môže jednotlivec podávať nadpriemerné výkony. [8]. Čo sa týka pojmu nadanie na matematiku, tak podľa Verdelina matematická schopnosť je „schopnosť chápať povahu matematických a podobných úloh, symbolov, metód a dôkazov, naučiť sa ich, podržať v pamäti a reprodukovať ich; kombinovať ich s inými úlohami, symbolmi a dôkazmi; používať ich pri riešení matematických a podobných príkladov úloh."[4]. Laznibatová, dáva matematické nadanie do tesnej súvislosti s vysokou úrovňou všeobecných rozumových schopností, ktorá sa prejavuje viac u mladších detí. [6] Na základe predchádzajúcich dvoch charakteristík matematického nadania, možno teda povedať, že ide o súbor zosúladených rozvinutých matematických a tvorivých schopností a nadpriemerných všeobecných intelektových schopností, spolu s motiváciou k úlohám z matematiky v ich vzájomnej interakcii. [7]

V štruktúre matematických schopností, ktorá sa považuje za komplexnú, sa odlišuje niekoľko faktorov, ktorých charakteristiku podal Košč. Ide o tieto faktory:

a) všeobecný matematický faktor; ten má uplatnenie pri riešení rôznych matematických úloh,
b) verbálny faktor; má uplatnenie najmä pri riešení slovných úloh,
c) priestorový faktor; zúčastňuje sa hlavne pri riešení úloh z geometrie,
d) numerický faktor; využíva sa pri riešení aritmetických úloh, kde ide o použitie základných počtových operácií (znakov pre počtové výkony),
e) faktor matematického uvažovania; slúži na odhalenie súvislostí medzi údajmi v matematickej úlohe,
f) zrakový faktor; jeho základom je orientácia v zrakovo vnímateľnom priestore. [4; 7]

3. STAROSTLIVOSŤ O ŽIAKOV NADANÝCH NA MATEMATIKU

V súčasnosti existuje viacero variantov a prístupov k výchove a vzdelávaniu nadaných žiakov. Zvýšená pozornosť je venovaná starostlivosti aj o žiakov, ktorých nadanie sa prejavuje v oblasti matematiky a to nielen priamo na vyučovaní, ale aj v podmienkach mimo vyučovania. Sú známe rôzne formy mimovyučovacej činnosti, ktorá je zameraná práve na spomínanú oblasť – oblasť rozvíjania matematického nadania. Jednou z najrozšírenejších organizačných foriem je práca v matematickom krúžku v čase mimo vyučovania.

Od školského roku 1998/99 sa tejto činnosti venujem aj ja, kedy bol krúžok organizovaný pre žiakov 5. ročníka ZŠ (pre žiakov z tried s rozšíreným vyučovaním matematiky). V školskom roku 1999/2000 spomenutá aktivita pokračovala s tou istou skupinou žiakov – už so žiakmi 6. ročníka ZŠ. Pri tejto práci sa používali rôzne formy a metódy. Vždy bola vytvorená priateľská atmosféra, ktorej zmysel bol najmä v tom, že žiaci mohli vyjadriť svoje nápady, názory a myšlienky bez akýchkoľvek obáv; mohli sa kedykoľvek a na čokoľvek opýtať. Veľmi často bola vytvorená súťaživá atmosféra, pretože najväčšou motiváciou pre nich bola hra alebo súťaž. Často sa striedali individuálna a skupinová práca. Pri práci v skupinách alebo pri frontálnej práci, pri spoločnom riešení problémov, žiaci vzájomne medzi sebou diskutovali o rôznych spôsoboch postupu riešenia úlohy. Ak bol niečí nápad nesprávny, ostatní vždy prejavili ochotu vysvetliť, kde je chyba, kde sa vyskytol omyl pri úvahe. Väčšinu problémov a úloh sa snažili vyriešiť samostatne – odmietali nápovedu resp. hotové riešenie. V takýchto prípadoch prijímali vhodne sformulované otázky, odpovede na ktoré smerovali k objaveniu spôsobu, metódy na riešenie úlohy. Nie vždy sa podarilo dopracovať k úplnému riešeniu úlohy. Dôležité však bolo to, aby žiaci vedeli ako sa k výsledku dopracujú. Prejavovali spokojnosť už v etape, keď poznali cestu, stratégiu riešenia príkladu.

Na každé stretnutie bola vopred zvolená téma, ktorá nebola vždy volená tak, aby nadväzovala na učivo preberané na vyučovaní matematiky. Uvádzame prehľad tém, ktoré boli zaradené na dosiaľ realizovaných stretnutiach.

Školský rok 1998/99

1. Hlavolamy so zápalkami; tieto úlohy boli zaradené s cieľom rozvinúť priestorový a zrakový faktor matematických schopností. Žiaci sa mali naučiť riešiť rôzne hlavolamy so zápalkami a to z dvoch oblastí: a) geometrické obrazce, b) rovnice (v rímskej číselnej sústave).
2. Úlohy typu: „Nakresli jedným ťahom“. Cieľom bolo naučiť žiakov odlíšiť prípady, kedy sa obrazec dá a kedy sa nedá nakresliť jedným ťahom.
3. Aritmetika; pre žiakov boli pripravené rôzne úlohy z aritmetiky, hlavne to boli slovné úlohy, rôzne „chytáky“. Cieľom bolo posilniť všeobecný matematický faktor ako aj faktor verbálny (pri riešení slovných úloh). Úlohy istou mierou prispeli aj k rozvoju logického uvažovania.
4. „Rezné“ problémy – úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti v E_2. Sú to úlohy, kde je potrebné daný rovinný geometrický obrazec rozdeliť na daný počet častí s vopred danými vlastnosťami (rovnaký tvar, rovnaká veľkosť).
5. Hry s číslami. Cieľom činnosti na stretnutí bolo rozvíjať najmä numerický faktor matematických schopností. Sú to úlohy, kde sa precvičujú základné počtové operácie a narábanie so znakmi počtových výkonov a so zátvorkami.
6. Úlohy z kombinatoriky. Cieľom bolo, aby žiaci vedeli tvoriť viacciferné čísla s danými vlastnosťami z daných číslic a aby sa naučili nájsť systém na vypisovanie všetkých možností.
7. Výpočtová geometria (úlohy o uhloch). Žiaci mali riešiť také úlohy, kde je dôležité vedieť sa zorientovať v náčrte a nájsť vzťahy medzi údajmi v úlohe (faktor matematického uvažovania).
8. Matematické doplňovačky. Tu sa žiaci mali možnosť zoznámiť s doteraz neznámymi pojmami z matematiky, ktoré boli ukryté v tajničkách doplňovačiek.
9. Hry pre dvojice: „Piškvorky“, „Ohraničenie územia“, „Priamky“ (bol usporiadaný turnaj).

10. – 11. Súťaž s názvom „Matikovica“ (úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti v E_3 – úlohy s kockami, kvádrami).

12. Labyrint s úlohami zo „zábavnej“ matematiky. Formou labyrintu boli pripravené úlohy rôzneho typu. Cieľom bolo, aby každý vyriešil všetky úlohy v sérii.

13. Dvojková číselná sústava - rozprávkový príbeh. Žiaci sa zoznámili s dvojkovou číselnou sústavou, naučili sa vykonávať počtové operácie s číslami zapísanými v tejto číselnej sústave.

Školský rok 1999/2000

1. Výroková logika. Žiaci sa naučili riešiť úlohy, kde podmienky medzi danými údajmi sú sformulované ako jednoduché alebo zložené výroky. Naučili sa tri spôsoby riešenia úloh tohto typu.
2. Algebrogramy. Takéto úlohy už poznali s rôznych matematických súťaží. Práve preto bola zvolená individuálna forma práce. Každý žiak využil vlastný spôsob riešenia týchto úloh.
3. Aritmetika; boli pripravené rôzne typy úloh: na priamu úmernosť, algebrogramy, číselné postupnosti atď. Ako organizačná forma bola zvolená práca v skupinách, pričom tie medzi sebou súťažili.
4. Počítanie v kalendári. Je to téma spojená s deliteľnosťou prirodzených čísel a s vlastnosťami deliteľnosti. Už samotný názov témy bol motivujúci.
5. Štvorcové a trojuholníkové čísla. Žiaci už tieto pojmy poznali z vyučovania matematiky. Oboznámili sa s vlastnosťami týchto zaujímavých čísel.
6. Bludiská a labyrinty; cieľom práce bolo, aby sa žiaci naučili riešiť tzv. priestorové bludiská. Okrem toho riešili aj jednoduchšie rovinné bludiská. Tieto úlohy prispeli k rozvoju priestorovej predstavivosti u žiakov.
7. Grafy; tu boli zaradené úlohy, kde na vopred vytvorenej mape, na ktorej boli vyznačené rôzne trasy, bolo treba vyznačiť cesty s vopred danými vlastnosťami (najkratšiu cestu, najdlhšiu cestu, cestu, ktorá prechádza práve troma mestami a pod.).
8. Kombinatorika; úlohy mali podobný charakter ako je to uvedené vyššie (šk. rok 1998/99 stretnutie č. 6) ale bolo daných viac podmienok resp. viac číslic, z čoho vyplýva, že aj počet možností bol väčší.
9. Počet štvorcov v štvorcovej sieti, počet trojuholníkov v trojuholníkovej sieti (podrobnejšie v ďalšej časti článku).

Z každého stretnutia sú spracované poznámky týkajúce sa žiackych otázok, nápadov, postupov riešenia konkrétnych úloh, opisu zvolených foriem a metód práce, vhodnosti úloh a pod. V ďalšej časti je uvedený opis dvoch konkrétnych stretnutí.

I. Téma stretnutia bola „Hry s číslami“. Cieľom práce bolo precvičenie základných počtových operácií. Bola zvolená individuálna forma práce. Každý žiak dostal zadania úloh v takejto podobe:

1. Doplň znaky +, -, ., : a zátvorky tak, aby platili rovnosti:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 = 1   5 4 3 2 1 = 1
8 7 6 5 4 3 2 1 = 1   4 3 2 1 = 1
7 6 5 4 3 2 1 = 1   3 2 1 = 1

6 5 4 3 2 1 = 1 2 1 = 1

2. Doplň čísla od 1 do 9 tak, aby platili rovnosti. Platí, že v každej rovnosti sa čísla vyskytujú iba raz:
   ....+....-....+.... = 20 ....+....-....+....-....+.... = 20
   ....-....+....-....+.... = 20 ...-....+....-....+....-....+.... = 20
3. Doplň znaky +, -, ., : tak, aby zápisy boli správne (bez použitia zátvoriek).
   12 3 4 2 6 = 10; 1 9 2 2 = 10; 6 3 9 5 2 3 = 10
4. a) Číslo 55 napíš pomocou piatich štvoriek.
   b) Číslo 20 napíš pomocou štyroch deviatok.
   c) Číslo 10 napíš pomocou piatich rovnakých číslic.

Riešenia (znaky počtových operácií, zátvorky alebo číslice) zapisovali priamo do zadania úloh. V prípade 1. úlohy sa vyskytli nejasnosti týkajúce sa spôsobu zápisu zátvoriek. Stalo sa, že žiak mal v riešení napísanú len zátvorku zľava a zátvorka sprava chýbala. Padla aj otázka, či môžu byť hneď vedľa seba napísané zátvorka a znamienko počtovej operácie. Každý žiak pracoval samostatne, bez pomoci iných, ale na druhej strane nikto z nich nebol ochotný nikomu poradiť. Na základe analýzy žiackych riešení sme dospeli k záveru, že v niektorých úlohách sa vyskytlo viac rôznych riešení. Nie všetky však boli správne. Úlohu číslo 2 ohodnotili ako veľmi jednoduchú. Aj tu sa objavilo viac rôznych riešení. S nájdením správneho riešenia v úlohe 3 sa už vyskytli problémy, kvôli obmedzeniu použitia zátvoriek. V prípade úlohy 4 vznikalo nedorozumenie v tom zmysle, že sa žiaci snažili medzi napr. päť štvoriek doplniť znaky +, -, ., : a zátvorky tak, ako v predchádzajúcich úlohách. Keď boli upozornení na skutočnosť, že z číslic môžu vytvárať aj viacciferné čísla a zlomky, už dokázali nájsť správne riešenia. Aj v tomto prípade to boli divergentné úlohy, s viacerými rôznymi riešeniami.

II. Námet na stretnutí bol: Počet štvorcov v štvorcovej sieti. Cieľom činnosti bolo na základe riešenia konkrétnych úloh sformulovať pravidlo na zistenie počtu štvorcov rôznej veľkosti v štvorcovej sieti daných rozmerov. Najprv riešili úlohu pre štvorcovú sieť 4x4: Koľko štvorcov rôznej veľkosti je na obrázku? Postupne sme prehľadne zapisovali počet štvorcov daných veľkostí (od najmenších po najväčšie). Záver bol tento: počet štvorcov s rozmermi 1x1 je 4^2, s rozmermi 2x2 je 3^2, s rozmermi 3x3 2^2 a s rozmermi 4x4 je jeden, teda 1^2. Analogický bol výsledok v prípade štvorcovej siete s rozmermi 5x5. Po týchto dvoch príkladoch už žiaci vedeli povedať aký by bol výsledok v prípade štvorcovej siete s rozmermi 6x6, 7x7, či nxn. Dokázali samostatne sformulovať všeobecné pravidlo pre výpočet počtu štvorcov rôznej veľkosti v štvorcovej sieti nxn: $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 1^2$.

Žiaci mali radosť z toho, že sa naučili spôsob riešenia úloh tohto typu, ktorý budú môcť využiť najmä pri riešení úloh v rámci Pytagoriády či Matematického Klokana.

V budúcom školskom roku bude táto činnosť pokračovať s tou istou skupinou žiakov. Veríme, že záujem z ich strany bude aspoň taký ako v uplynulých dvoch školských rokoch.

Literatúra:

[1] Cirjak, M.: *Zbierka neštandardných úloh z matematiky, 1. časť. Prešov: MC v Prešove, 1996*

[2] Dočkal, V. a kol.: *Psychológia nadania. Bratislava: SPN, 1987*

[3] Kopka, J.: *Hrozny problému v matematice. Ústí nad Labem: Univerzita J. A. Purkyně, 1999*

[4] Košč, L.: *Psychológia matematických schopností. Bratislava: SPN, 1972*

[5] Kruteckij, V. A.: *Otázky psychológie schopností. Bratislava: SPN, 1977*

[6] Laznibatová, J.: *Intelektové a neintelektové faktory matematického nadania. In: Pedagogická revue. Roč. 44, 1992, č. 10, s. 782-792*

[7] Mesárošová, M.: *Nadané deti. Poznávanie a rozvíjanie ich osobnosti. Prešov: ManaCon, 1998*

[8] Musil,M.: *Cesty k nadaniu. Bratislava: SMENA, 1985*

Adresa autorky:
Mgr. Alena Prídavková
Katedra matematiky PF PU Prešov
Ul. 17. novembra 1
081 16 Prešov.
e-mail: pridav@unipo.sk

KOMBINATORIKA NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

Iveta Scholtzová

ABSTRACT: *In the article they are presented knowledge about combinatorics teaching at a research primary schools. They were taken from made by mathematics teachers and also during combinatorics teaching workshops.*

1. ÚVOD

Diskrétna matematika je matematická disciplína, ktorá sa v tomto storočí rázne zaradila do systému matematických vied. Jednou z jej súčastí je aj kombinatorika. Už v minulosti bolo niekoľko pokusov začleniť ju do vyučovania matematiky na ZŠ (v cvičeniach z matematiky, pre triedy s rozšíreným vyučovaním matematiky). V súčasnosti je zaradená v 6. ročníku (10 h) a v 7. ročníku (6 h). [11] Vyvstáva otázka, ako sú na ňu pripravení učitelia matematiky a aké problémy sa môžu vyskytnúť pri výučbe kombinatoriky.

2. PRIESKUM

V školskom roku 1998/99 bol v Prešovskom a Košickom kraji vykonaný prieskum medzi učiteľmi matematiky, týkajúci sa výučby kombinatoriky na ZŠ. Zúčastnilo sa ho 205 učiteľov. Jeho analýza a výsledky sú uvedené v [6] a [7]. Čo vyplynulo zo záverov? Nasledujúce skutočnosti:

1. Učitelia priznávajú medzery v odborných vedomostiach z kombinatoriky a hlavne pociťujú nedostatky v metodickej príprave na výučbu tejto témy.
2. Zaradenie kombinatoriky do učebných osnov ZŠ považuje väčšina pedagógov za vhodné.
3. Učitelia nemajú jasnú predstavu o tom, čo a ako majú v kombinatorike žiakov naučiť, mnohí nevedia sformulovať cieľ výučby.
4. Absentuje poznanie kombinatorických metód (okrem vypísania všetkých možností a grafického znázornenia).
5. Subjektívne pocity učiteľov z doterajšej výučby kombinatoriky sú viac-menej neutrálne. Reakcie žiakov na toto učivo hodnotia skôr pozitívne.
6. K dispozícii sú dve alternatívne sady učebníc [9] a [10], resp. [5] pre výučbu matematiky, a teda aj kombinatoriky. Učitelia sa v drvivej

väčšine rozhodnú pri výbere pre „klasickú" [9], [10] a nie „netradičnú" [5] učebnicu.

3. POSTREHY K VÝUČBE KOMBINATORIKY NA ZŠ

V školských rokoch 1998/1999 a 1999/2000 bolo v Prešovskom a Košickom kraji uskutočnených v jednotlivých okresoch v rámci metodických dní niekoľko stretnutí s učiteľmi matematiky ZŠ k téme – výučba kombinatoriky na ZŠ. Častokrát plánované prednášky vyústili do tvorivých dielní, kde pedagógovia kládli množstvo otázok a veľmi aktívne sa zapojili do ich priebehu. Uvádzame niekoľko postrehov k výučbe kombinatoriky na ZŠ, ktoré učitelia ocenili pozitívne. Mnohí priznali, že si uvedené skutočnosti málo alebo vôbec v daných situáciách neuvedomili.

1. Kombinatorika má veľmi blízko k reálnemu životu, naša každodenná činnosť závisí od toho, ako „kombinujeme".
2. Učiť v súčasnosti kombinatoriku cestou „tvrdého systému", t.j. snaha o používanie vzorcov, nie je ten smer, ktorý by mal šancu zaujať žiaka.
3. Obmedziť sa pri výbere kombinatorických úloh len na tie klasické, t.j. usporadúvanie číslic, rozmieňanie mincí a pod., je nepostačujúce.
4. Šancu pritiahnuť žiaka majú len také úlohy, ktoré ho presvedčia, že kombinatorika je „o živote".
5. Dbať na to, že kombinatorické úlohy častokrát v sebe skrývajú nejednoznačnosť v zadaní, jednotliví žiaci, a samozrejme aj učiteľ, môžu jeden text pochopiť rôznymi spôsobmi.
6. Mať neustále na pamäti, že žiaci môžu prekvapiť učiteľa a prísť s riešením, ktoré je iné, ako očakáva. Správna reakcia v takejto situácii je nevyhnutná, aby nebola potlačená tvorivosť žiaka.
7. Výučba kombinatoriky je náročná na prípravu učiteľa.
8. Je potrebné ukázať žiakom a presvedčiť ich o tom, že dôležitou činnosťou pri riešení kombinatorických úloh je organizácia práce, t.j. vytvorenie si systému.
9. Zdôrazniť význam grafického znázornenia, ktoré je veľmi efektívnou pomôckou.
10. Venovať sa riešeniu aj takých úloh, v ktorých je problematické identifikovať, čo je rovnaké a čo je rôzne.
11. Zaradiť do výučby také typy kombinatorických úloh, v ktorých sa vyskytujú situácie s opakovaním jednotlivých prvkov. Pri ich riešení sa často vyskytujú problémy.
12. Nestrácať zo zreteľa skutočnosť, že algoritmické postupy nevedú vždy k cieľu, že v kombinatorike je veľa úloh, v ktorých je nutné použiť netradičné spôsoby riešenia.

4. ZÁVER

Úlohou a cieľom kombinatoriky nie je žiakov naučiť kombinatorické vzorce. Pracovné metódy používané v kombinatorike sú značne odlišné od tých klasických, s ktorými sa žiaci v matematike stretávajú a už len tým sú zaujímavé. Je možné ukázať, že matematika, to nie sú len čísla, vzorce a poučky. Vhodne vybraté kombinatorické úlohy, ktoré budú „zo života“, majú veľmi veľkú motivačnú hodnotu. Podporujú rozvoj pozornosti, flexibility, originálnosti, logického myslenia a tvorivosti. Kombinatorika by mala byť tou časťou matematiky, v ktorej by sa žiaci na základnej škole mohli „hrať“; zistiť, že otázky ani odpovede nemusia byť vždy jednoznačné, že nie každý musí dospieť k rovnakému riešeniu. Všetky tieto skúsenosti, ktoré dieťa pri „kombinatorickej hre“ má šancu získať, možno pridajú „dobré body“ pre matematiku a určite obohatia aj jeho „nematematický“ svet.

Literatúra:

[1] Bálint, Ľ.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika – Dočasné učebné texty s metodickými poznámkami.* Bratislava: Media trade, spol. s r.o. – SPN, 1998.

[2] Bálint, Ľ.: *Prvky kombinatoriky; štatistiky a pravdepodobnosti v učive matematiky 1.-4. ročníka základnej školy v MĽR.* In: Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre, 1, Matematika. Bratislava: SPN, 1980.

[3] Hejný, M.: *Problémy s kombinatorikou.* In: Matematika a fyzika ve škole, 1986, 6, s.426-430.

[4] Koman, M.: *Metody řešení kombinatorických úloh.* In: Matematika a fyzika ve škole, 1979, 5, s.324-333.

[5] Repáš, V. a kol.: *Matematika pre 6. ročník ZŠ, 2. diel.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 1999.

[6] Scholtzová, I.: *Kombinatorika na ZŠ – názory učiteľov matematiky, I. časť.* In: MIF, 1999, 16, s.7-9.

[7] Scholtzová, I.: *Kombinatorika na ZŠ – názory učiteľov matematiky, II. časť.* In: MIF, 2000, 17, s.13-19.

[8] Scholtzová, I.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika; II. časť – úlohy z kombinatoriky pre ZŠ.* Prešov: MC, 1999.

[9] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 6. ročník základných škôl, 2. časť.* Bratislava: Media trade, spol. s r.o. – SPN, 1999.

[10] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť.* Bratislava: Media trade, spol. s r.o. – SPN, 2000.

[11] *Učebné osnovy - Matematika pre 5. až 9. ročník ZŠ.* Bratislava: Media trade, spol. s r.o. – SPN, 1997.

Adresa autorky:

RNDr. Iveta Scholtzová
Katedra matematiky PF PU
Ul. 17. novembra 1
081 16 Prešov
e-mail: scholtzi@unipo.sk

ŠTATISTIKA V UČITEĽSKOM ŠTÚDIU MATEMATIKY

Marta Vrábelová

ABSTRACT: *The paper deals with teaching statistics in the mathematics teacher training study, specially, with the introduction of the estimation theory by showing the relation of empirical and theoretic models by computer.*

1. ÚVOD

Štatistika resp. matematická štatistika je v súčasnosti obsiahnutá v učebných plánoch rôznych i nematematických študijných odborov, pretože má stále širšie využitie v najrôznejších oblastiach. V učiteľskom štúdiu matematiky sa prednáša v rámci predmetu pravdepodobnosť a štatistika. V tejto prednáške je štatistike venovaných 24-26 vyučovacích hodín, doplnená je seminármi s tým istým počtom hodín. Prednášky zo štatistiky pre študentov matematiky a študentov iných odborov by sa mali líšiť svojou odbornou úrovňou. Kým u nematematikov kladieme dôraz na aplikačnú stránku, matematikov by sme mali presvedčiť, že štatistika je matematická disciplína, ktorá má teoretický základ v teórii pravde-podobnosti. Všetky pojmy by sme mali presne definovať a všetky tvrdenia podľa možnosti presne dokazovať. Ak by sme sa chceli poriadne venovať teórii, napr. v teórii odhadu by sme sa chceli dopracovať až k dôkazu Raovej-Cramerovej nerovnosti, alebo by sme chceli dokázať aj Neymanovu-Pearsonovu lemu, tak sa dostaneme do veľkej časovej tiesni. Pri tomto sa môže stať, že zabudneme študentom ukázať, že štatistické pojmy popisujú určité reálne situácie. Poukázanie na vzťah teórie a praxe je v štatistike dôležitejšie ako v niektorých iných matematických disciplínach. Dospejeme teda k záveru, že názornosti treba dať prednosť pred niektorými presnými dôkazmi. K zníženiu odbornej úrovne prednášky nás vedie aj to, že nechceme dopustiť, aby sa študenti matematiky stretli s menším počtom štatistických metód ako ich kolegovia študujúci ekológiu, archeológiu, či sociálnu prácu. Niektoré štatistické metódy ako sú napr. poradové testy, poradový koeficient korelácie, testy nezávislosti vysvetlíme len z ich aplikačnej stránky.

Teraz sa vrátime k vzťahu teórie a praxe a povieme si, ako možno študentov presvedčiť, že príroda sa správa podľa teoretických modelov.

2. VZŤAH MEDZI EMPIRICKÝM A TEORETICKÝM MODELOM

V štatistike teoreticky pod základným súborom rozumieme náhodnú premennú s určitým pravdepodobnostným rozdelením. Prakticky je to množina (niekedy len fiktívna) objektov, ktoré sú nositeľmi hodnôt premennej - štatistického znaku s určitým rozdelením početností resp. relatívnych početností. Náhodná premenná s určitým pravdepodobnostným rozdelením je teda teoretický model a štatistický znak s určitým rozdelením relatívnych početností hodnôt (intervalov, ak ide o spojitý znak) je empirickým modelom základného súboru. Niekedy vieme povedať resp. vypočítať pravdepodobnostné rozdelenie základného súboru, teda vieme určiť teoretický model. Otázkou je, či máme veriť, že empirickým modelom bude model „podobný“ teoretickému modelu.

Pekný príklad uvádza Swoboda vo svojej knihe [4].

1 Príklad. Nech náhodná premenná X znamená počet chlapcov v rodine so štyrmi deťmi. Nech pravdepodobnosť narodenia chlapca $p=0,514$. Potom X má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n=4$ a $p=0,514$. Teda teoretickým modelom počtu chlapcov v štvordetnej rodine je náhodná premenná s rozdelením pravdepodobnosti uvedeným v tabuľke 1, pričom pravdepodobnosti sú vypočítané podľa Bernoulliho vzorca.

Tab. 1

k	0	1	2	3	4
p_k	0,056	0,236	0,374	0,264	0,070

Empirický model tohto základného súboru nájdeme v už spomínanej knihe [4]. Sú tam výsledky výskumu uskutočneného vo Švajčiarsku, v rámci ktorého sa vo veľkej množine rodín so štyrmi deťmi zaznamenal počet chlapcov. Po roztriedení hodnôt sa zistili relatívne početnosti uvedené v tabuľke 2.

Tab.2

k	0	1	2	3	4
n_k/n	0,054	0,234	0,379	0,259	0,074

Vidíme, že na 1000 štvordetných rodín teoreticky pripadá 56 rodín, v ktorých sú samé dievčatá a empiricky je to 54 rodín. Sú to nesporne podobné výsledky.

Túto situáciu môžeme ľahko simulovať aj na počítači, napr. pomocou systému Mathematica. Stačí nám generovať výberový súbor z daného binomického rozdelenia (bin), zistiť početnosti a následne relatívne početnosti hodnôt (relpoc) takto:

```
<<Statistics`DiscreteDistributions`
<<Statistics`DataManipulation`
```

```
bin=BinomialDistribution[4,0.514];
udaje=Table[Random[bin],{i,1,1000}];
poc=Frequencies[údaje];
relpoc=Column[poc,1]/1000
```

Dostaneme relatívne početnosti v tvare zlomkov, ktoré prepíšeme na desatinné čísla príkazom N[%] a dostaneme, napr.

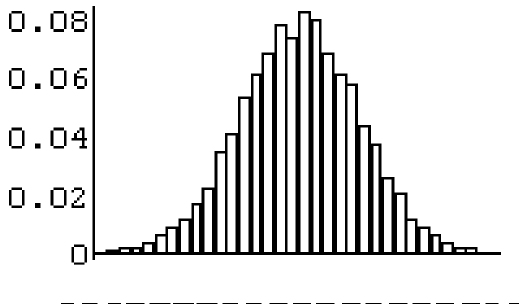
{0.054, 0.242, 0.377, 0.267, 0.06}

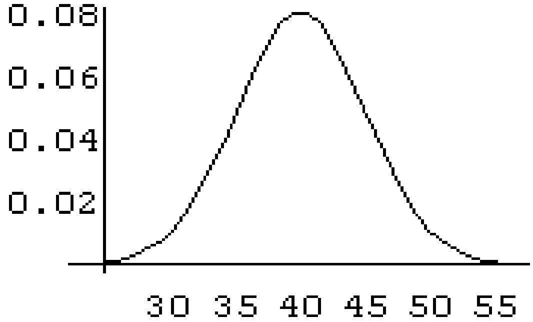
Naše relatívne početnosti počtu chlapcov sú opäť blízke ich pravdepodobnostiam.

V prípade spojitého štatistického znaku sa uspokojíme s tým, že ukážeme, že ak generujeme výberový súbor veľkého rozsahu z normálneho rozdelenia, hodnoty roztriedime do intervalov malej šírky, nakreslíme histogram, v ktorom obsah plochy nad každým intervalom je rovný jeho relatívnej početnosti, tak tento histogram nadobudne tvar grafu funkcie hustoty daného normálneho rozdelenia.

2 Príklad. V programe Mathematica to vyzerá nasledovne:

```
<<Statistics`DataManipulation`
<<Statistics`NormalDistribution`
data=Table[Random[NormalDistribution[40,5]],{i,1,5000}]
poc=BinCounts[data,{23,57,1}]
poc1=poc/5000
stredy=Table[23+0.5 i,{i,1,34}]
hist=Table[{poc1[[i]],stredy[[i]]},{i,1,34}]
<<Graphics`Graphics`
BarChart[hist]
func1=PDF[NormalDistribution[40,5],x];
Plot[func1,{x,23,57}]
```





V matematickej štatistike pracujeme s pojmom náhodný výber,čo je n-tica nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 a pojmom výberová charakteristika, čo je funkcia náhodného výberu. Najjednoduchšou výberovou charakteristikou je výberový aritmetický priemer, o ktorom je známe, že má strednú hodnotu μ a disperziu σ^2/n. V prípade veľkého rozsahu náhodného výberu má výberový aritmetický priemer približne normálne rozdelenie. Vyplýva to z centrálnej limitnej vety, ktorá tvrdí, že rozdelenie súčtu veľkého počtu nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných konverguje k normálnemu rozdeleniu. O tom, že to nie je len teória sa možno presvedčiť pomocou veľmi známej Galtonovej dosky. Pomocou nej sa ukáže, že súčet n (n je počet radov klincov na doske) nezávislých náhodných premenných s alternatívnym rozdelením s parametrom p=0.5 má približne normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0.5n a disperziou 0.25n. Túto pomôcku málokto vlastní. Simulácia Galtonovej dosky pomocou počítača už nie je taká jednoduchá, jedna bola vytvorená v rámci diplomovej práce [2].

V súčasnosti je počítač neodmysliteľnou pomôckou pri vyučovaní štatistiky. Používa sa buď nepriamo na prípravu materiálov, ktoré rozdávame študentom alebo premietneme pomocou meotara (generovanie údajov, grafov funkcií rozdelenia pravdepodobnosti), alebo priamo na seminároch, ak je k dispozícii počítačová učebňa a vhodný program. V učiteľskom štúdiu matematiky sa vystačí aj s Excelom alebo Mathematikou. K vyučovaniu štatistiky pomocou počítača sú potrebné vhodné učebné texty, ktoré v súčasnosti len pripravujeme.

Literatúra:

[1] Boyland, P.: *Guide to Standard Mathematica Packages (Version 2.1).* Wolfram Research, Inc. 1992.

[2] Jánošíková, E.: *Počítačové a interaktívne modely projektu Schola ludus.* Diplomová práca, FPV VŠPg Nitra, 1994.

[3] Riečan, B-Lamoš, F.- Lenárt, C.: *Pravdepodobnosť a maetemetická štatistika.* Alfa, Bratislava 1984.

[4] Swoboda, H.: *Moderní statistika.* Svoboda, Praha, 1988.

Adresa :
Doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
Katedra algebry a teórie čísel
FPV UKF
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
E-mail: mvrabelova@ukf.sk