POSTAVENIE MATEMATIKY V INŽINIERSKOM VZDELÁVANÍ NA TECHNICKÝCH UNIVERZITÁCH

Anna Bezáková

ABSTRACT: *Presented article is concerned with the analysis of the reasons of bad study results reached in mathematics at technical universities. It also looks for the ways of how to improve this situation.*

1. ÚVOD

Tak v súčasnosti, ako aj v minulých rokoch patrila matematika na vysokých školách technického zamerania k tzv. všeobecnému základu. Do študijných osnov je zaraďovaná do prvých ročníkov vysokoškolského štúdia. Dôsledkom toho sú problémy, súvisiace s prechodom študentov zo stredných na vysoké školy. Adaptabilita na vysokoškolské štúdium sa nepriaznivo prejavuje vo vedomostnej úrovni študentov, čo má za následok predčasný odchod zo štúdia, alebo opakovanie ročníka.

Hlavnou náplňou tohoto článku je analýza príčin tohoto stavu a hľadanie námetov na jeho riešenie.

2. MATEMATIKA VO VYUČOVACOM PROCESE

Motiváciou k napísaniu toho článku je moje dlhoročné pôsobenie na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie na Vysokej škole lesníckej a drevárskej vo Zvolene, ktorá v súčasnosti nesie názov Technická univerzita. Naša TU zastrešuje 4 fakulty: Drevársku fakultu, Lesnícku fakultu, Fakultu ekológie a environmentalistiky a Fakultu environmentálnej a výrobnej techniky. Matematika sa vyučuje na všetkých fakultách s diferencovaným počtom hodín výuky. Najsilnejšie je zastúpená na Drevárskej fakulte a Fakulte environmentálnej a výrobnej techniky a to 3 semestre.

Základný kurz tvorí lineárna algebra, matematická analýza, pravdepodobnosť a štatistika, obyčajné a parciálne diferenciálne rovnice. Na týchto fakultách je zavedený kreditný systém štúdia. V roku 1988 bol zriadený v rámci DF študijný odbor Priemyselný dizajn nábytku a roku 1994 trojročné bakalárske štúdium Interierová tvorba a poradenstvo. Tieto umelecké odbory si vyžadujú špecifický prístup pri využívaní matematických poznatkov [1].

Sprievodným javom vyučovania matematiky na všetkých fakultách je slabá vedomostná úroveň študentov. Keď porovnáme výsledky skúšok z matematiky a ostatných odborných predmetov, výsledky z matematiky patria medzi najhoršie. Z analýzy [2] , ktorá bola robená na DF v školskom roku 1997/98 vyplýva, že 18,4 % študentov 1. ročníka v zimnom semestri sa vôbec nezúčastnilo skúšky z matematiky a v letnom semestri to bolo 44,2 %. Na skúške za zimný semester nevyhovelo 19,5 % poslucháčov, v letnom semestri 12,2 %. Úspešnosť vykonania skúšky bola v zimnom semestri 43,2 % a v letnom semestri 36,8 %. Chýbajúce percentá v jednotlivých semestroch tvoria poslucháči, ktorí opakovali ročník a skúšku vykonali v predchádzajúcom roku.

3. PRÍČINY ZLÝCH ŠTUDIJNÝCH VÝSLEDKOV

V posledných rokoch záujem o štúdium technických odborov poklesol. Zo študentov, ktorí sa na toto štúdium hlásia, mnohí ho považujú len za náhradné riešenie, keďže sa nedostali na atraktívnejšie odbory. S tým súvisí aj úroveň vedomostí z matematiky, ktorá je veľmi nízka. Títo študenti väčšinou nematurovali z matematiky a nevenovali jej na strednej škole dostatočnú pozornosť, resp. dosahovali z nej slabšie výsledky. Treba pripomenúť, že aj samotné fakulty v snahe zabezpečiť dostatočný počet poslucháčov znižujú požiadavky na prijímacích pohovoroch a tým sa dostávajú na technické štúdium študenti, ktorí na to nemajú predpoklady.

Na vysoké školy technického charakteru prichádzajú okrem absolventov gymnázií aj študenti zo stredných odborných škôl a stredných odborných učilíšť. Matematické vedomosti týchto študentov sú veľmi slabé. Príčiny vidíme jednak v tom, že odborné školy vychovávajú mladých ľudí pre prax a v menšej miere dbajú na úroveň teoretických predmetov, jednak v nižšej výmere hodín matematiky. Na niektorých odborných školách sa učí matematika len 2 roky.

Stále pretrvávajúci nezáujem študentov o tento predmet je spôsobený aj tým, že sa už od základnej školy stáva „strašiakom“. V značnej miere k tomu prispievajú aj masovokomunikačné prostriedky, kde sa rozhovory so známymi osobnosťami verejného a kultúrneho života často začínajú slovami „od detstva som nenávidel matematiku“. Akoby to bol prejav osobného hrdinstva účinkujúceho.

Musíme si priznať, že za posledné roky vedomostná úroveň matematiky u študentov klesá. Prednášky sa ako tak pretrpia, poznatky z nich si študenti neosvoja a na cvičeniach pretrváva pasivita. V prvom ročníku, hlavne v zimnom semestri, vážnu úlohu zohráva prechod zo strednej školy na vysokú školu. Spôsob štúdia je náročnejší, vyžaduje lepšiu orientáciu v množstve vedomostí, ktoré sa na študenta hrnú zo všetkých strán. Na druhej strane väčšia voľnosť oproti strednej škole, nepovinná účasť na prednáškach a cvičeniach zvádzajú k zanedbávaniu pravidelného štúdia. V druhom ročníku badať určité zlepšenie, študenti dokážu pracovať s odbornou literatúrou, ale tu sa objavujú tendencie všetko sa učiť len pred skúškami, čo samozrejme nestačí a má za následok veľkú opakovateľnosť skúšok [3].

4. NÁMETY NA RIEŠENIE

Zlepšenie daného stavu vidíme vo viacerých ukazovateľoch. Na vysoké školy technické by sa mali prijímať predovšetkým študenti gymnázií. Zo stredných odborných škôl len tí, ktorí maturujú z matematiky. Malo by byť v záujme stredných škôl, aby študentom, ktorí sa hlásia na vysoké školy poskytli možnosť doplniť si chýbajúce vedomosti z matematiky voľbou seminárov, alebo formou doučovaní.

Ukazuje sa nevhodné prijímať na vysoké školy absolventov stredných odborných učilíšť. Štruktúra vzdelania na týchto školách vytvára slabé predpoklady pre zvládnutie nárokov vysokoškolského štúdia. Je to dôsledok snahy, získať vysokoškolské vzdelanie pre širšiu populáciu.

Stredné školy vo vlastnom záujme by mali zlepšiť úroveň vyučovania matematiky. Mohla by k tomu prispieť pripravovaná reorganizácia maturitných skúšok, ktoré by mali byť transparentnejšie a objektívnejšie a hlavne by sa mala zvýšiť ich úroveň.

Študent po príchode na vysokú školu by mal získať pocit, že matematika je odrazovým mostíkom pre štúdium odborných predmetov. Vyučovanie matematiky bez priameho vyústenia do riešenia odborného problému je prakticky nemysliteľné. Vyžaduje to intenzívnu spoluprácu s odbornými katedrami, aby sa zosúladila náväznosť predmetov. Niekedy sa stáva, že technický predmet napr. fyzika, mechanika požaduje vedomosti z matematiky, ktoré sú náplňou štúdia až v ďalšom semestri, napr. diferenciálne rovnice. Samozrejme matematické poznatky tiež musia mať určitú náväznosť, ktorá sa nedá zmeniť. Nemôžeme učiť diferenciálne rovnice, ak študenti nemajú vedomosti z diferenciálneho a integrálneho počtu.

Pre zvládnutie vysokoškolskej látky by veľmi pomohlo rozloženie matematiky na viac semestrov s precizovaním náväznosti na odborné predmety. Bolo by viac času na dôkladnejšie precvičenie látky a upevnenie vedomostí.

Od učiteľov matematiky sa vyžaduje, aby citlivo zvažovali akou mierou rozložiť čas výuky matematiky medzi formálne, rutinné výpočty a koľko času venovať časovo náročným aplikačným príkladom, modelujúcim konkrétne úlohy z praxe. Myslíme si, že výuka matematiky formou, ktorá uprednostňuje konkrétne riešenie technických problémov je správna tým, že ukazuje študentom načo im tá nezáživná matematika je.

Pociťujeme isté rezervy v oblasti využívania matematického aparátu v odborných predmetoch. Často sa matematika obchádza a študent má pocit, že učenie sa tohoto predmetu bolo zbytočné a počas ďalšieho štúdia by sa bez matematiky zaobišiel.

Nesprávne sú i názory „načo je matematika, všetko vyriešia počítače". Na pochopenie výsledkov, ktoré nám počítače poskytujú, sú tiež potrebné znalosti matematiky. Bez nich by sme nevnikli do problému, ktorý riešime a nemohli by sme byť úspešní.

5. ZÁVER

Ak sledujeme posledných 50 rokov vidíme, že vyučovanie matematiky na technických vysokých školách sa zmenilo. Značne sa zredukovali teoretické dôkazy viet a matematika sa stáva akýmsi návodom na riešenie technických probémov. Zdá sa, že vývoj bude aj naďalej pokračovať týmto smerom. Je na nás, aby sme zvážili, či je to správna cesta ?

Jedno je však isté, matematika núti študenta rozvíjať logické myslenie, bez ktorého je ťažko sa zorientovať a uplatniť v živote. Dúfajme, že si ešte dlho zachová svoje postavenie a aj našim pričinením si nájde cestu k študentom.

Na učiteľoch matematiky zostáva veľká zodpovednosť, ktorá vyplýva z toho, že matematika je dominujúcim faktorom úspešného absolvovania vysokej školy technického charakteru.

Literatúra:

[1] Bezáková, A.: *Úloha matematiky v umelecko-technických odboroch vysokých škôl inžinierskeho zamerania, Zborník vedeckých prác Katedra matematiky SPU – Nitra, 1997, str. 94 – 101.*

[2] Čunderlík, I.*: Analýza študijných výsledkov 1. ročníka odbor drevárske inžinierstvo, na DF. Zborník referátov – Sekcia č. 1, Štúdium na DF – TU vo Zvolene, Zvolen 1999, str. 94 - 101.*

[3] Grác, J., Štefanovič, J.: *Psychológia učenia a vyučovania na vysokých školách 2. časť (Vybrané kapitoly), Ústav rozvoja vysokých*

škôl SSR v Bratislave 1985, str. 32 – 68.

ADRESA:
RNDr. Anna Bezáková
Technická univerzita
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Masarykova 24
960 53 Zvolen

MODELOVANIE POZNÁVACIEHO PROCESU VO VYUČOVANÍ PODOBNOSTI NA ZŠ

Jaroslava Brincková - Bronislava Růžičková

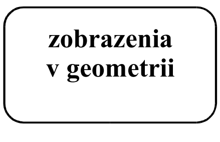
ABSTRACT: *Dynamiku do vyučovania geometrie vnáša vyučovanie zhodných a nezhodných zobrazení. Pojmové mapy umožňujú učiteľovi upraviť postupnosť vyučovaných tém tak, aby sa zohľadnili vekové osobitosti jednotlivých žiakov. Príspevok uvádza výsledky výskumu poznávacieho procesu 14 - 15 ročných žiakov pri vyučovaní pojmu "podobnosť" v matematike.*

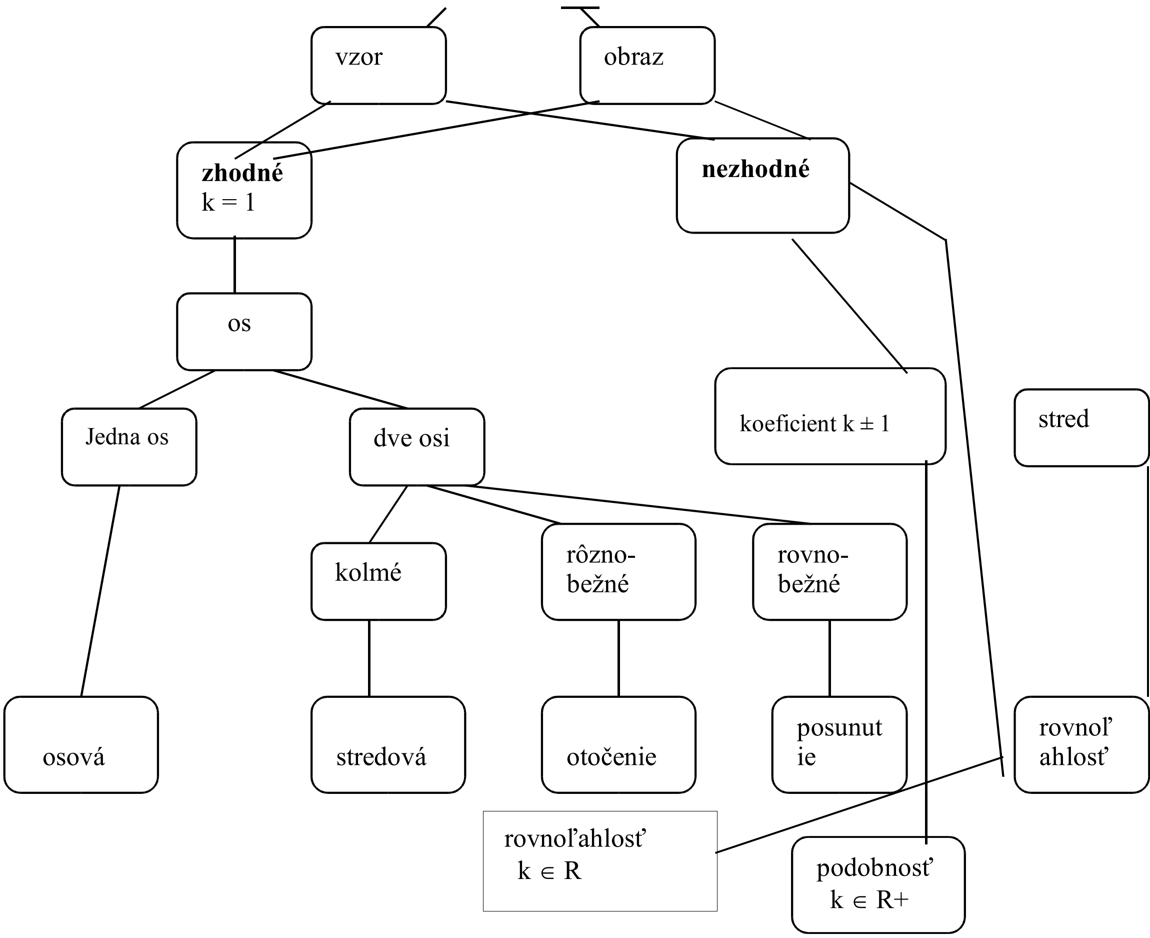
1. ÚVOD

V každodennom živote sa vyskytujú situácie, kedy sme nútení použiť slovo *podobný* . Jeho synonymických ekvivalentov je pomerne málo: obdobný, rovnaký (prípad), analogický postup. S týmito adjektívami sa stretávame v rôznych významoch. Hovoríme napríklad, že je podobný na otca, zvolil podobný postup. Význam slova podobný nie je v týchto prípadoch presne vymedzený. V geometrii je však obsah slova podobný jasne určený. Nie každý žiak je schopný plne si uvedomiť význam toho istého slova v rôznych kontextoch a nie každý učiteľ matematiky vie v ktorých predmetoch a v ktorých ročníkoch sa žiak už s týmto pojmom stretol. Je preto dôležité poznať učebné osnovy ostatných predmetov, aby si učiteľ mohol vybrať ten najlepší spôsob na vyučovanie danej témy. Súčasne ukázať žiakom možnosť využitia tejto témy aj v iných oblastiach života a nebude to pre nich len veda odtrhnutá od reality života. Upevní sa tak vzťah k predmetu, ale hlavne naučíme žiakov komplexne nazerať na problém aj z iných hľadísk. Naučiť ich využívať všetky vedomosti, ktoré už majú a využívať všetko, s čím sa už vo vyučovaní stretli. Ak chceme, aby sa efektívne spájali vedomosti zo všetkých oblastí, budeme snažiť odstraňovať formalizmus a podporovať tvorivosť žiakov.

. Všetky témy vyučovacích hodín geometrie obsahujú *pojmy, fakty a zovšeobecnenia.* Vzťahy medzi nimi sa dajú znázorniť pomocou <u>pojmovej mapy.</u> Táto znázorňuje štruktúru učiva pri tvorbe vzdelávacieho programu.

2. POJMOVÁ MAPA





Učiteľ matematiky pri zavádzaní nového pojmu by mal podrobnejšie analyzovať učebné osnovy z hľadiska horizontálneho aj vertikálneho, aby zefektívnil účinnosť svojej práce.

3. VERTIKÁLNA ANALÝZA UČEBNÝCH OSNOV

Je to analýza učebných osnov matematiky v jednotlivých ročníkoch ZŠ s využitím niektorej z kategórií viažucej sa k zobrazeniam.

1. ročník : Priradenie vzor - obraz, predmet - číslo, základy osovej súmernosti – dokončovanie obrázkov zakreslených v sieti cez danú os;
2. ročník : Pojmy: bod, krivá čiara, bod patriaci čiare, rovná čiara, úsečka, priamka, polpriamka, rovnobežné a rôznobežné priamky, osová súmernosť (dorysuj obrázky v sieti, zhodnosť úsečiek a sčitovanie úsečiek.) Zavedenie pojmov útvarov: trojuholník, kruh, obdĺžnik, guľa, válec, kocka, kváder, ihlan;
3. ročník : Pojem vzor – obraz (z okrasných obkladačiek možno stavať rôzne steny, podľa vzoru doplňte), preniesť úsečku, zhodný (narysuj trojuholník, aby každá jeho strana bola zhodná s danou úsečkou), zhodný trojuholník, konštrukcia s kružidlom;
4. ročník : Kolmé priamky, pravý uhol, rysovanie štvorcov a obdĺžnikov, osová súmernosť(kolmice, prenášanie kružidlom), pojem súmernosť, podobné útvary(narysuj niekoľko podobných útvarov podľa predlohy);
5. ročník : Uhol, jeho veľkosť, prenášanie uhla, os uhla, mnohouholník, uhlopriečka
6. ročník : Konštrukcie trojuholníka podľa vety sss, sus, usu, a ak je daná výška, kolmice, rovnobežky, štvoruholníky;
7. ročník: Osová súmernosť, stredová súmernosť, predmety stredovo a osovo súmerné, zhodnosť trojuholníkov, vety o zhodnosti trojuholníkov sss, usu, sus, strana, uhlopriečky, samodružný bod;
8. ročník: Kruh, kružnica, stred a polomer, kružnicový oblúk, kruhový výsek, Talesova kružnica, poloha kružnice a priamky, poloha dvoch kružníc, dotyčnica, vpísaná a opísaná kružnica, obsah kruhu, dĺžka kružnice;
9. ročník: Podobnosť, pomer podobnosti.

Horizontálna analýza **je analýza osnov všetkých vyuč. predmetov v jednotlivých ročníkoch z pohľadu pojmu zobrazenie. Jej podrobnejšie spracovanie je predmetom tvorby študentských Projektov na vyučovanie geometrie na 2. stupni ZŠ v rámci Tvorivých dielní v matematike na našej fakulte.**

4. TECHNOLÓGIA ZAVEDENIA POJMU "PODOBNÝ" V GEOMETRII

Predpokladáme, že každý pedagóg podporuje tvrdenie, že pochopenie by malo byť hlavným cieľom akejkoľvek výučby. Dôležitý aspekt matematického chápania vidíme v spojení rozličných spôsobov prezentácie rovnakej myšlienky. Každý učiteľ si má možnosť zvoliť inú cestu, ale všetky by sa mali stretnúť v jednom bode pri vytvorení pojmu "podobnosť". Nový pojem sa stane pre žiaka zrozumiteľným, ak mu na pochopenie podstaty stačí použiť vlastný poznatkový aparát. K optimálnej percepcii prispieva aj spôsob, akým učiteľ postupuje pri zavádzaní nových pojmov a definícií. Čím je zaujímavejší, motivačne netradičný, tým je väčšia pravdepodobnosť, že si žiak nový termín zapamätá.

V príprave študentov učiteľstva matematiky sme vyskúšali dva modely statický a dynamický, zavedenia pojmu podobnosť, duchovným autorom ktorých je Václav Sýkora (2).

Názov	Model statický	Model dynamický
Základná vlastnosť	- mám dvojicu podobných objektov	- mám tvar a hľadám k nemu podobný
Postup výuky	- overujem ich podobnosť	- ako sa zachováva tvar v priebehu transformácie?

Oba modely sme vyskúšali v 9. triedach v 9. ročníku na štyroch ZŠ. Úvodnú časť každého z vyučovaných modelov tvoril motivačný rozhovor, v ktorom sme analyzovali význam termínu "podobný" v hovorovom jazyku. Svojim obsahom zodpovedá matematickému pojmu podobnosť, lebo je definovaný ako relácia na množine geometrických útvarov. Žiakom sme položili 3 otázky.

- Čo si predstavujete pod slovom "tvar"?
- Čo si predstavujete pod pojmom "zhodné tvary"?
- Čo si predstavujete pod pojmom "podobné tvary"?

Na každú z nich sme žiadali 3 druhy odpovede.

- ♦ Napíšte to.
- ♦ Nakreslite to.
- ♦ Použite dané slová vo vete.

Veľké množstvo odpovedí a ich následná analýza v triedach ukázali, že predstava tvaru sa viaže u väčšiny respondentov s rovinným útvarom (74%).

Predpokladali sme, že pojem zhodnosti žiaci v našej experimentálnej skupine poznajú z predchádzajúcich ročníkov. Žiaci vo väčšine prípadov dokázali nakresliť dva zhodné útvary, ale nedokázali ich popísať.

Z hľadiska predstavy podobných útvarov sme rozdelili našu experimentálnu skupinu do piatich kategórií.

1. Podobný = zmenšený, alebo zväčšený (22%),
2. = vonkajšia výzorová podoba (štvorce, obdĺžniky) (12%),
3. = aspoň jedna rovnaká vlastnosť (26%) ,
4. = rovnaká trieda tvarov (20%),

5. = žiadna odpoveď (20%).

V školskej praxi sa častejšie stretávame s využitím statického modelu vyučovania pojmu podobnosť, keď overujeme vzťahy medzi odpovedajúcimi si stranami danej dvojice objektov. Diplomantka Tatiana Kubasová (1) vypracovala gradovanú sériu úloh k zavedeniu skúmaného pojmu, ktorú žiaci pomenovali "obrázková". Obsahuje 9 úloh (kruh, štvorec, obdĺžnik, trojuholník, písmeno M, blesk, mriežku a schod). Ku každému zo vzorov vytvorila po 4 obrázky analýzou ktorých mali žiaci nájsť ku vzoru podobný obraz. Transformované tvary boli zmenšené, zväčšené, predĺžená jedna, alebo viac strán. Náročnosť úloh sa zvyšovala podľa toho, koľko veličín bolo treba vnímať pri zdôvodňovaní podobnosti.

Po vyriešení všetkých úloh sme vyvodili spolu so žiakmi definíciu podobných útvarov v geometrii. V statickom modeli sme začínali definíciou podobných útvarov a potom sme vo dvojiciach overovali, či dané útvary sú podobné.

Schopnosť aplikovať poznatky o pojme podobný sme v oboch postupoch overovali 2. sériou troch úloh - "konštrukčnou". Požadovali sme konštrukciu podobného trojuholníka k trojuholníku danému dvoma stranami a uhlom nimi zovretým, ak poznáme koeficient podobnosti. V druhej úlohe konštrukciu podobného obdĺžnika ak poznáme rozmer jednej strany obrazu (vypočítať pomer podobnosti). V tretej úlohe konštrukciu podobného lichobežníka ak je daný pomer podobnosti, tri strany vzoru a jeden uhol nimi zovretý. Rozbor riešení potvrdil hierarchiu obtiažností typu trojuholník - pravouholník - nepravouholník. V dynamickom modeli zavedenia pojmu podobnosť sa prejavila väčšia aktivita žiakov pri hľadaní koeficientu podobnosti ako v statickom. Žiaci si uvedomili skôr, že veľkosti uhlov v podobných tvaroch sa zachovávajú. V statickom modeli viac žiakov vyriešilo prvú úlohu. Robili menej numerických chýb pri násobení.

V záver možno konštatovať, že žiaci 9. ročníka na šej experimentálnej skupiny častejšie posudzovali tvar na základe jeho analýzy a nie ako celok. Otázke porovnania uhlov pri overovaní podobnosti venovali menšiu pozornosť, ako porovnávaniu odpovedajúcich si strán. Ak mali uvedený koeficient podobnosti,vedeli zostrojiť k danému vzoru obraz. Problém nastal, keď bolo treba určiť koeficient podobnosti. Úlohám tohoto typu je potrebné vo vyučovaní venovať väčší priestor.

Literatúra

[1] Kubasová, T.: *Gradované série úloh k tematickému celku Podobnosť. Diplomová práca. KM FPV UMBV B.Bystrica 2000*

[2] Sýkora,V.: *Development of concep "similitarity" in school geometry. In : SEMT 97, I. - II., Praha, Prometeus 1997, s. 109*

Autorky:

RNDr.Jaroslava Brincková, CSc.
Katedra matematiky PdF UMB
Zvolenská cesta 6
974 01 Banská Bystrica
e- mail:brincka@pdf.umb.sk

PaedDr. Bronislava Růžičková, Dr.
Katedra matematiky PdF UP
Žižkovo nám. 5
772 00 Olomouc
e-mail:ruzickov@risc.upol.cz

MOTIVAČNÉ ÚLOHY VO VYUČOVANÍ LOGIKY

Ján Gunčaga

ABSTRACT: *The knowledge of logic by the students for the first degree at the secondary school is often formal, because the teaching of logic is usually without motivation. This paper shows some examples, how the teaching of logic can motivate and make the subject more interesting.*

KEYWORDS: výrok, negácia výroku, implikácia a jej negácia, logický hlavolam

Logika sa na strednej škole vyučuje často formálne a bez dostatočnej motivácie. Dôsledkom toho sú plytké vedomosti študentov a malý rozvoj ich logického myslenia. Keď niektorí študenti nepochopia toto učivo, snažia sa ho naučiť naspamäť memorovaním.

Uvedené úlohy môžu poslúžiť ako námet na oživenie vyučovacích hodín a na zmenu spôsobu vyučovania logiky. Väčšina z nich je formulovaná ako logické hlavolamy, preto môžu vzniknúť pochybnosti, či ich budú schopní študenti riešiť. Preto uvediem na začiatku dve úlohy so študentskými riešeniami:

Príklad 1. Sú traja priatelia: Alojz, Bohuš, Boris. Jeden je automechanik, druhý betonár, tretí agronóm. Jeden býva v Bratislave, druhý v Bytči a tretí v Alekšinciach. Vieme o nich toto:

(1) Boris málokedy navštívi hlavné mesto, hoci tam býva celé jeho príbuzenstvo.

(2) Medzi touto trojicou sú dvaja ľudia, ktorých zamestnanie a bydlisko sa začínajú tým istým písmenom ako ich meno.

(3) Automechanikova manželka je Borisova mladšia sestra.

Zistite zamestnanie a bydlisko tejto trojice osôb.

Riešenie: V zadaní úlohy dve mená začínajú na písmeno b, jedno na a. Dve zamestnania začínajú písmenom a, jedno na b. Z tvrdenia (2) vyplýva, že tými dvoma ľuďmi nemôžu byť Boris s Bohušom, lebo nemáme dve zamestnania začínajúce písmenom b. Preto jedným z nich musí byť Alojz. Alojz musí bývať v Alekšinciach a jeho zamestnanie môže byť agronóm alebo automechanik.

Z (1) a (3) vyplýva, že Boris nie je z Bratislavy, ale automechanik (Borisov príbuzný) už je z Bratislavy. To znamená, že Boris býva v Bytči a Bohuš v Bratislave. Potom Bohuš musí byť manželom Borisovej sestry a

teda je automechanik. Tak dostaneme, že Alojz je agronóm a Boris je betonár.
Tieto výsledky môžeme zhrnúť do nasledovnej tabuľky, prípadne ju použiť ako pomôcku pri riešení úlohy, ak sa postupne vypĺňa:

Meno	Alojz	Boris	Bohuš
Zamestnanie	agronóm	betonár	automechanik
Bydlisko	Alekšince	Bytča	Bratislava

Negáciu výrokov možno precvičiť na tomto hlavolame:
Príklad 2. Keď kriminalisti našli psychiatra mŕtveho v byte, vypočúvali štyroch jeho pacientov. Polícia od svedkov vedela, že každý z týchto pacientov bol v byte psychiatra práve raz. Pred výsluchom sa pacienti dohodli, že budú hovoriť samé klamstvá. Každý uviedol dve výpovede:

A: 1. Nikto z nás štyroch nezabil psychiatra.
2. Keď som odchádzal, psychiater ešte žil.

B : 1. Ja som prišiel ako druhý.
2. Keď som prišiel, psychiater bol mŕtvy.

C : 1. Ja som prišiel ako tretí.
2. Keď som prišiel, psychiater žil.

D : 1. Vrah neprišiel po mne.
2. Keď som prišiel, psychiater bol už mŕtvy.

Ktorý z pacientov A, B, C, D zabil psychiatra?

Riešenie: Keďže všetci klamali, tak psychiater bol živý, keď k nemu vošli B, D a mŕtvy, keď od neho odchádzal A a prichádzal C.

B neprišiel ako druhý, to znamená, že mohol prísť ako prvý, tretí alebo štvrtý. Kedže vtedy ešte psychiater žil, nemohol prísť ako tretí alebo štvrtý, takže musel prísť ako prvý. Potom musel prísť D ako druhý.

C nemohol prísť ako tretí, takže prišiel ako prvý, druhý alebo štvrtý. Pred ním už boli B, D, teda prišiel štvrtý. Keď prichádzal psychiater bol už mŕtvy. Takto dostaneme, že A musel prísť ako tretí a zabiť psychiatra.
Študent mal aj zaujímavý zápis tohto riešenia:

A:	1, 2, **3,** 4	†	zabil
B:	**1,** 3, 4	ž	
C:	1, 2, **4**	†	
D:	1, **2**, 3, 4	ž	

B, D, A, C

Študentom robí veľké problémy aj negácia implikácie. Zložený výrok typu A ⇒ B negujú často ako A′ ⇒ B′, kde A′ , B′ sú negácie jednoduchých výrokov A, B. Zdôvodniť to možno pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt:

A	B	A′	B′	A ⇒ B	(A ⇒ B)′	A′ ⇒ B′	A ∧ B′
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0

Prípadne využiť nasledovnú motivačnú úlohu:
Príklad 3. Ondrej si povedal: „Ak Elena nevie variť, tak si ju nevezmem za ženu" . Elenini rodičia prišli za Ondrejom a presvedčili ho o pravom opaku. O čom ho presvedčili? Kto varí u mladomanželov?

Riešenie: Negácia výroku „Ak Elena nevie variť, tak si ju nevezmem za ženu" je „Elena nevie variť a vezmem si ju za ženu". To ďalej znamená, že varí Ondrej.

Ďalšia zaujímavá skupina úloh sa nachádza v [3] . Predstavme si krajinu Tramtária, v ktorej sa nachádzajú iba tri dediny: Pravdovce, Klamárovce a Striedavá. V Pravdovciach hovoria vždy pravdu, v Klamárovciach vždy klamú a v Striedavej striedavo hovoria pravdu a klamstvo.
Príklad 4. Na tamojšej požiarnej stanici spal strážnik, keď ho zrazu zobudil telefón.
- Príďte hneď. Horí v našej dedine - vzrušene znel hlas v telefóne.
- Kde bývate? - spýtal sa strážnik.
- V Striedavej - odpovedá hlas.

Čo urobí strážnik?
Riešenie: Ak by bol volajúci z Pravdoviec, tak by vždy hovoril pravdu a nemohol by povedať, že je zo Striedavej. Ak by bol z Klamárova, tak vždy klame a aj jeho prvý výrok je nepravdivý. Ak by bol so Striedavej tak buď prvý výrok je pravdivý a druhý je nepravdivý alebo prvý je nepravdivý a druhý je pravdivý. Keďže je zo Striedavej nastane druhá možnosť. To znamená, že prvý výrok je vždy nepravdivý a strážnik nemusí nič urobiť.

Zaujímavým dôsledkom tejto úlohy je, že ak niekto telefonuje z Tramtárie a povie dva výroky a druhý je „Som zo Striedavej" , tak prvý výrok je vždy nepravdivý.

Na záver si uveďme zaujímavú úlohu na tautológiu (A′)′ ⇔ A :
Príklad 5. Pútnik putoval z Bagdadu do Buchary. Pri jednej osade došiel na rázcestie, kde jedna cesta viedla do púšte a druhá do Bagdadu. V tej osade

žili ľudia, z ktorých časť vždy klame a časť vždy hovorí pravdu. Pútnikovi, ktorý sa ich chcel niečo spýtať, boli ochotní odpovedať len na jedinú otázku jediným slovom "áno" alebo "nie". Napriek tomu sa pútnik dozvedel, ktorou cestou má ísť. Opýtal sa iba jediný raz jediného dedinčana. Čo sa opýtal?
Riešenie: Mohol sa opýtať: „Ak by som sa ťa opýtal, či táto cesta vedie do Buchary, odpovedal by si áno? ” Ak by dedinčan hovoril pravdu povedal by pravdu, ak by klamal, musel by klamať „dvakrát”. Prvý raz na to, či vedie cesta do Buchary, druhý raz na to, či by odpovedal áno, preto aj on potom povie pravdu.

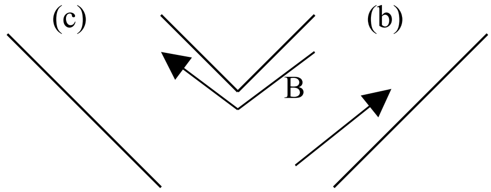
Úlohy na precvičenie:
1. Jedného večera sa stala vražda v dome, kde býval manželský pár a ich syn a dcéra. Jeden člen rodiny zavraždil iného člena, tretí člen rodiny bol svedkom zločinu a štvrtý bol pomocníkom pri zahládzaní stôp po čine. Kriminalisti zistili tieto skutočnosti:
- Pomocník a svedok boli opačného pohlavia.
- Najstarší člen rodiny a svedok boli opačného pohlavia.
- Najmladší člen rodiny a svedok boli opačného pohlavia.
- Pomocník bol starší ako obeť.
- Najstarším členom rodiny bol otec.
- Vrah nebol najmladší člen rodiny.
- Kto z tých štyroch bol vrah a kto obeť ?

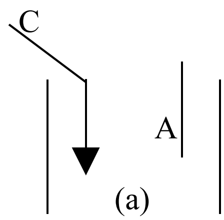
2. Ideálny muž podľa Marty je vysoký, čiernovlasý a pekný. Pozná štyroch mužov, ktorí sa volajú Andrej, Boris, Cyril a Daniel. Len jeden z nich má všetky vlastnosti, ktoré Marta požaduje. Okrem toho
- Len traja muži sú vysokí, len dvaja tmavovlasí a len jeden je pekný.
- Každý z tých štyroch mužov má aspoň jednu z požadovaných vlastností.
- Andrej a Boris majú rovnakú farbu vlasov.
- Boris a Cyril sú rovnako vysokí.
- Cyril a Daniel majú rôznu výšku.

Ktorý z tých štyroch mužov spĺňa všetky požiadavky Marty?

2. Jeden turista, ktorý si chcel obzrieť Tramtáriu sa pri svojich potulkách ocitol na križovatke troch ciest. Prišiel síce na to, že jedna cesta ide do Pravdoviec, druhá do Klamároviec a tretia do Striedavej. Ale, ktorá kde? Nikde žiadna orientačná tabuľa! Na šťastie na každej ceste sa objavil človek, ktorý na križovatke odbočoval doprava (pozri obr.).

Obr.





Ľuďom A, B, C položil reportér tri otázky a dostal tieto odpovede:

a) Odkiaľ prichádzate?
A: Z Klamárova.
B: Z domu.
C: Z . . .

b) Kam idete?
A: Ja idem domov.
B: Do obce, kde býva priateľ A.
C: Do Pravdoviec

c) Kde bývate?
A: V Pravdovciach.
B: V Klamárovciach.
C: V . . .

Žiaľ prvú a poslednú odpoveď občana C turista nepočul. Len toľko zachytil, že v týchto odpovediach občan C menoval niektorú z troch dedín Tramtárie, ale nevedel, či tú istú alebo rôzne dediny. Napriek tomu, turista zistil, ktorá cesta kam vedie. Neskôr sa ukázalo, že B, C sú z tej istej dediny a turista určil neznáme odpovede občana C. Ako na to prišiel?

4. Traja súrodenci Katka, Elenka a Petrík zjedli potajomky mamičke 5 tabuliek čokolády, ktoré prichystala na výlet. Matka začala vyšetrovanie. Deti sa zborovo ohradili:

Katka:Ja som sa nijakej čokolády nedotkla!
Elenka:Ja som sa nijakej čokolády nedotkla!
Petrík:Ja som sa nijakej čokolády nedotkol!

-Nuž takto sa nikde nedostaneme.Pri ďalšom vypočúvaní sa zistilo:

Katka:Elenka si vzala viac ako Peťo!
Elenka(ku Katke):Klameš!
Petrík:Katka a Elenka si vzali všetko!
Katka(ku Petríkovi):Klameš!

Pri konečnom vysvetlení situácie sa ukázalo, že každé dieťa klamalo toľkokrát, koľko tabuliek čokolády zjedlo. Zistite, koľko tabuliek čokolády zjedlo každé z detí!

Literatúra:

[1] Kluvánek I. :*Prípravka na diferenciálny a integrálny počet I. časť. skriptá. Žilina , VŠDS 1991*

[2] Drábek J. a kol. : *Základy elem. aritmetiky pre I. st. ZŠ*. Praha, SPN 1984
[3] Bizám G., Herczeg J. : *Zaujímavá logika*. Bratislava, Alfa 1982
[4] Smida J. a kol. : *Matematika pre 1. ročník gymnázia*. Bratislava, SPN 1984

Adresa:
Mgr.Ján Gunčaga
PF KU v Ružomberku
Hrabovska 1
034 01 Ružomberok
e-mail:guncaga@kpf.utc.sk

DRUHÁCI A POČÍTAČE

Matúš Harminc

ABSTRACT: *This paper offers some ideas applied during my teaching "Computers" in a class of seven years old children.*

1. ÚVOD

Nasledujúce riadky chcú byť ponukou k zamysleniu, k načerpaniu nápadov, ku ich rozvinutiu a širšiemu využitiu. Nerobiac si nárok na profesionalitu v otázkach didaktiky ani v otázkach informatiky, vyhovel som žiadosti venovať sa žiakom druhej triedy základnej školy v rámci voliteľného predmetu nazvaného *Práca s počítačom*. Išlo o šestnásť detí vybraných do prvého ročníka základnej školy pohovormi a testmi a označovaných ako mimoriadne nadané. Na tieto hodiny boli rozdelené do dvoch skupín, pretože sme mali dispozícii len sieť pre ôsmich účastníkov. Zdá sa, že v dnešnej dobe je už nemysliteľné pracovať bez farebných monitorov, bez myší, bez Windows
(nehovoriac o zvukovej karte alebo o kompaktnom disku). V začiatkoch poznávania sveta počítačov môže urobiť dobrú službu aj staré železo takého druhu, akým je napríklad malá sieť, vyradená z lokálnej pobočky poisťovne a potom zostarnutá na školskej správe, školskom úrade, odbore, či kdekoľvek inde v štátnej správe. Moje skúsenosti o tom presviedčajú.

Pri zostavovaní učebného plánu som vychádzal zo schopností detí, z obmedzení daných možnosťami zariadenia, ktoré bolo k dispozícii a z možných potrieb budúceho užívateľa počítača. Stručne je tento plán zachytený niekoľkými cieľmi: *nadobudnutie počítačovej gramotnosti, zvládnutie základných funkcií ovládacieho programu pre prácu so súbormi, spoznanie možností editovania textu a inej práce s textami a príprava na programovací jazyk.* V prípade možnosti by som do plánu zaradil aj aspoň čiastočné ovládnutie kreslenia.

2. GRAMOTNOSŤ

Počítačovou gramotnosťou mám na mysli všeličo možné, od vysunutia nožičiek pod klávesnicou, cez zisťovanie, ako sú na nej uložené písmenká, ktoré tlačidlo má kedy akú funkciu, ovládanie počítača i monitoru, až po niekedy len sporadické a zdanlivo povrchné, ale na úrovni otázok detí pre-potrebné odpovede o tom, ako to funguje „vnútri“. V našom prípade táto gramotnosť narastala príležitostne, spontánne, motivovaná potrebou určitej činnosti. Tu by som zahrnul aj prácu v sieti, prihlasovanie sa a odhlasovanie, používanie sieťovej pošty, pochopenie pojmov prístupové a užívateľské právo, heslo, ale aj „zmrznutie“ a „reštartovanie“. Vnímavý a odborne zdatný učiteľ dokáže postrehnúť potreby žiaka a využiť ich pre ďalší rozvoj jeho poznania.

Osvedčil sa mi nasledovný postup: Na začiatku hodiny sedeli všetci v tej časti triedy, kde neboli počítače. V počiatkoch bolo treba sa naučiť napríklad zapnúť počítač, prihlásiť sa do siete menom a heslom a spustiť niektorý z programov. Vždy to nejaký dobrovoľník najprv predviedol (alebo ešte predtým povedal ostatným, ako to bude robiť) a ostatní pozorovali a podľa potreby komentovali alebo postup vylepšovali. Postupne všetci prešli k strojom a mohli pracovať na pripravených úlohách.

Pre prácu so súbormi sme mali k dispozícii staršiu verziu Norton Commander. Tento produkt je verejnosti, ktorá prišla do styku s počítačmi, natoľko známy, že tu asi stačí len spomenúť príklady toho, čo sme pomocou neho robili. Nutným bol pohyb v oknách, prezeranie, zmena a tvorba adresárov, pre deti dôležitým bolo vyhľadávanie, kopírovanie a odstraňovanie súborov i adresárov. Pri prvom poznávaní funkcie adresárov sa osvedčilo používanie modelu DOM \ SKRIŇA \ ZÁSUVKA \ ponožky. Na precvičenie najväčší úspech mala „Zem“ počnúc od adresárov pre svetadiely, až po adresáre pre popisné čísla v uliciach konkrétnych slovenských miest, kde deti bývali.

Podľa vlastného záujmu deti individuálne spoznávali ďalšie možnosti NC. S každou „novosťou“ sa totiž mohli ihneď pochváliť spolužiakom a naučiť ju aj ich. Pozornosti sa tešila aj možnosť zistiť údaje o počítači. Pretože „svojvoľné“ poznávanie všetkého nového sa dialo objavovateľským spôsobom, vyvolávalo priebežné otázky, tvorbu dohadov a štrukturalizáciu poznatkov. Bolo spontánnou prípravou pre príjem ďalších informácií a pre nové činnosti.

3. EDITOVANIE

Editorom, ktorý sme pre tvorbu textov používali, bola všeobecne rozšírená T602. Vzhľadom k tomu, že z hľadiska sedemročných detí sú jej možnosti dosť bohaté, pracovali sme s ňou od samého začiatku. Práca s ňou kladne pôsobila na detskú tvorivosť, fantáziu ale i komunikáciu a vôľu. Úlohy boli zámerne viazané na iné vyučovacie predmety, napríklad na prvouku, matematiku, slovenčinu alebo angličtinu. Jedným z cieľov bolo zvládnuť doplňovanie, prepisovanie a odstraňovanie písmen, otváranie a ukladanie zmenenej verzie textového súboru. Formálnou témou boli napríklad názvy farieb v angličtine. Úlohy boli formulované takto:

one.txt

VYMAŽ V KAŽDOM RIADKU DVE FARBY,
NAJVHODNEJŠIU FARBU PONECHAJ:

an elephant .... green - gray - pink
a banana .... blue - white - yellow
stop .... red - yellow - green
go on .... red - yellow - green

two.txt

NAHRAĎ HVIEZDIČKY SPRÁVNYMI PÍSMENKAMI:

bl*ck ..... (čierny) g*een ..... (zelené) whi*e ..... (biela)
b*ue ..... (modré) *ellow ..... (žltý) pin* ..... (ružová)
vio*et ..... (fialová) *ray ..... (sivý)
bro*n ..... (hnedé)

three.txt

DO KAŽDÉHO RIADKU NAPÍŠ ANGLICKY JEDNU Z TÝCHTO FARIEB:

čierna biela sivá zelená

an envelope ....
a computer ....
the gloves of Šimon ....
an apple ....

V neskoršej fáze poznávania editora T602 sme tvorili noviny a to tak, že každé dieťa podľa vlastného výberu rubriky a fantázie pripravilo krátky príspevok (udalosť, šport, TV program, horoskop, vtip, hádanka, ...). Šikovnejší prispievatelia potom tieto príspevky čítali, opravovali a napokon vytvárali z nich jednotlivé stránky novín.

Konečná fáza tvorby novín bola zároveň možnosťou pre uvedomenie si významu programu Norton Commander. Jeho upevňovanie, zároveň s upevňovaním znalostí editora T602, ilustrujeme ukážkou, v ktorej sme použili nasledujúci systém matematických príkladov, roztrúsených vo vopred neudaných adresároch:

```
                         prvy.txt
                   ODPOVEDZ CELOU VETOU:
Jakub mal 31 guliek. Ondrej takto prosil Jakuba:
„Daj mi, prosím Ťa 8 guliek. Potom budeme mať rovnako veľa‟.
Koľko guliek mal Ondrej?
Odpoveď:    „Ondrej mal ... A

                         druhy.txt
          DOPLŇ ČÍSLA TAK, ABY TVRDENIA BOLI PRAVDIVÉ:
E        . 6 = 36              : 4 = 6       E
S     20 :   = 5               . 9 = 27      O
R        : 5 = 9               : 7 = 4       L

                         treti.txt
     DOPLŇ ZNAMIENKA +, -, . A : TAK, ABY TVRDENIA BOLI PRAVDIVÉ:
```

```
28 : 4     27 : 9 = 21      S          6 . 0     21 : 7  =  0      V
 4 . 9      5 . 4 = 16      I         40 : 10    30 : 10 = 12      C
```

stvrty.txt

DOPLŇ VÝSLEDKY:

```
8 . 4 – 24 : 6 =         M          (40 : 4) . (16 : 4) =          Í
4 . 7 + 10 . 4 =         A            32 : 8  + (67 - 9) =         P
8 . 1 +  8 . 0 =         L
```

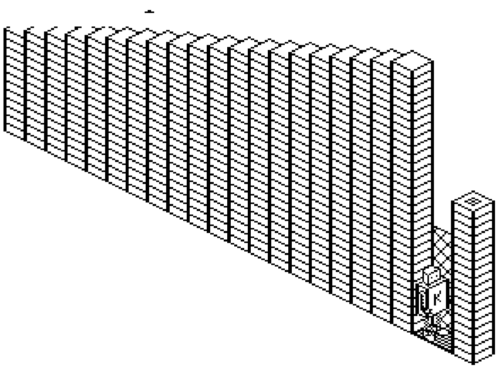
piaty.txt

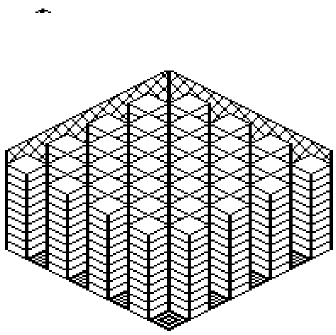
VYPOČÍTANÉ A DOPLNENÉ ČÍSLA ZO VŠETKÝCH PREDOŠLÝCH ÚLOH NAPÍŠ OD NAJVÄČŠIEHO PO NAJMENŠIE DO PRVÉHO RIADKU. POTOM POD NE DOPLŇ PÍSMENÁ, KTORÉ TÝMTO ČÍSLAM PRISLÚCHAJÚ:

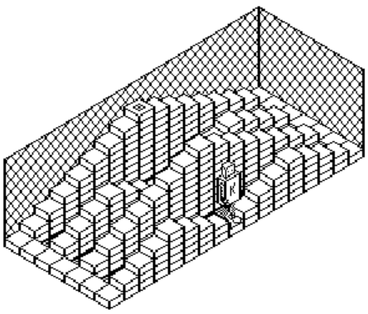
```
_  _  _  _  _  ☺  _  _  _  _  _  _  ☺ _  _  _  _  _
_  _  _  _  _  ☺  _  _  _  _  _  _  ☺ _  _  _  _  _
```

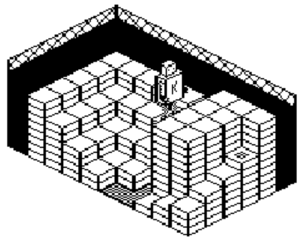
4. KAREL

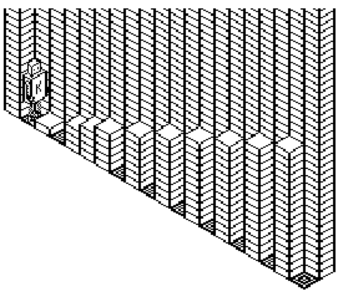
Prax potvrdila a potvrdzuje, že pre osvojenie si základov programátorskej abecedy a pravidiel štruktúrovaného programovania je možné odporúčať programovací jazyk Karel. Napriek tomu, že sa o ňom a v ňom napísalo dosť (články, knihy [1,2], učebné texty [3] a metodické príručky, seriály v časopisoch), spomeniem niektoré ďalšie možnosti, ktoré poskytuje. Tradične s ním pracujú deti o čosi staršie, než sedemročné. Naši druháci práve pomocou Karla spoznávali klávesnicu, základné pojmy programovacích jazykov (príkaz, cyklus, test,...), slovník užívateľa počítača (nahrať, prepínať okná, editovací režim, spustiť program, načítať, nastavovanie parametrov, ...). U týchto detí sa výrazne prejavovala potreba súťažiť a potreba riešiť „hlavolamy“. Rozhodol som sa pravidelne im zaraďovať do programu úlohy, ktorých príprava bola časovo natoľko náročná, že by bolo škoda využiť ich len raz. Na ukážku: Postav v danej situácii robota Karla na pole označené značkou tak, aby sa pritom čo najmenej namáhal. Miera námahy robota bola daná konečným stavom počítadla pri štandardnom nastavení hodnôt priradených jednotlivým elementárnym úkonom. Uvádzam osem najvydarenejších úloh. Pre zaujímavosť a porovnanie sú tu uvedené aj „najlepšie“ výkony: ľavý stĺpec 34, 60, 27 a 49, pravý stĺpec 47, 93, 8 a 46. Viaceré úlohy využívajú to, že niekedy nie je jedno, v akom poradí robíme dve činnosti. Jedna z úloh je založená na nutnom prieskume, zapamätaní si polohy a orientácie robota a následovného nového pokusu so správnou voľbou taktiky. Dve sú zamerané na poznanie skrytých častí pracovného priestoru.

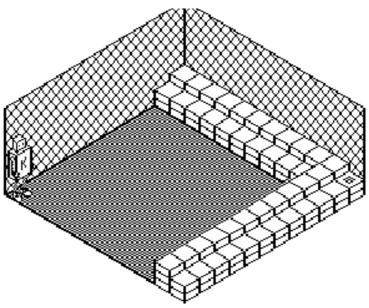






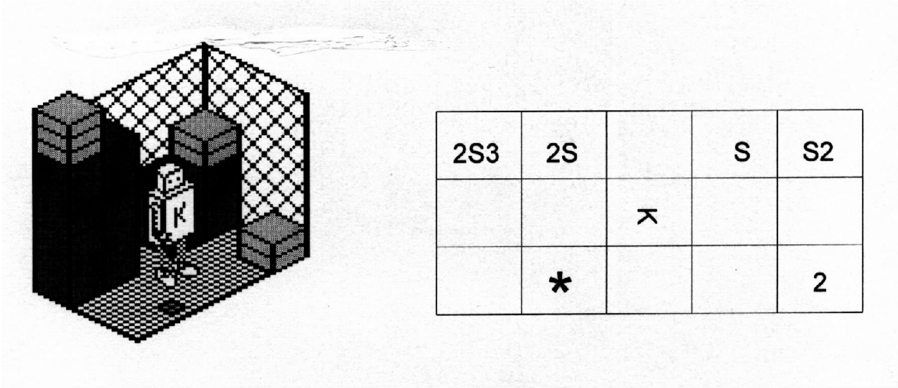






Riešenie týchto úloh môžeme považovať za prípravu na neskoršie optimalizačné úvahy a aj na rozvoj potreby dôkazu. Nesie so sebou však ešte prinajmenšom dve možnosti : začať budovať požívanie súradnicovej sústavy a vytvárať abecedy a pravidlá gramatiky. Prirodzená potreba preniesť situáciu z monitoru na papier či už kvôli riešeniu úlohy mimo počítača, či z iného dôvodu (tvorivé vymýšľanie úloh podľa svojej fantázie bez prístupu k počí-taču) podnecujú použitie máp jednotlivých úloh. Užívajúc abecedu, ktorá vznikla v súlade s potrebami a gramatiku, ktorej pravidlá boli tvorené spontánne a účelovo, je nasledujúca situácia zachytená jednak pohľadom do pracovnej miestnosti Karla, jednak jej prislúchajúcou mapou:

Slovo **2** značí dve tehly, **S2** stĺpik a dve tehly, **2S** znamená dva stĺpiky. Orientácia robota je zachytená otáčaním písmena **K**. Neuveriteľná hodnota minimálnej námahy v tretej úlohe ľavého stĺpca nie je omyl. Ukazuje na rozpor medzi názornosťou a obsažnosťou obrázku k úlohe a príslušnej mapy.



5. ZÁVER

Za dôležité považujem, aby každý pracoval. Neznamená to, že počas práce nemôže dieťa komunikovať s ostatnými alebo s učiteľom; naopak, rozprávanie týkajúce sa práce je vítané. Ale dieťa by malo mať svoj terminál. Prítomnosť tlačiarne by mala určite kladný vplyv.

Na malom priestore som sa snažil naznačiť aktivity, ktoré som vyskúšal počas jedného školského roka v jednej triede. Čitateľa, ktorého vyššie napísané riadky oslovili, láskavo prosím, aby sa mi v prípade záujmu ozval.

Literatúra:

[1] Gašparovičová, Ľ., Hvorecký, J.: *Kamaráti robota Karla,* Mladé letá, Bratislava 1991.

[2] Synovcová, M.: *Martina si hraje s počítačem,* Albatros, Praha 1989.

[3] Šnajder, Ľ.: *Vybrané kapitoly z didaktiky informatiky,* PF UPJŠ, Košice 1997.

ADRESA :
RNDr. Matúš Harminc, CSc.
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 01 Košice
e-mail : harminc@duro.science.upjs.sk

RACIONÁLNY ŠTUDENT

Viliam Chvál

ABSTRACT: *The contribution is an attempt to use quantitative methods and utility concept in the theory of learning.*

0. ÚVOD

V tomto príspevku sa venujeme problematike racionálneho správania študenta: aby efekt jeho štúdia bol preňho čo najväčší. Pravda, takáto formulácia je príliš vágna. Trochu presnejšie: jednotlivým predmetom venuje pri štúdiu takú pozornosť a toľko času, aby celkový úžitok (v zmysle definovanom ďalej) bol preňho maximálny. Teda chová sa ako racionálny spotrebiteľ pri výbere spotrebných komodít.
Uvažovaný študent je indivíduum, či štatistický priemerný študent triedy, školy, istého zamerania a pod.

1. MODEL

Predpokladajme, že študent sa musí učiť n predmetov $P_1,\dots,P_n$ a pre štúdium má k dispozícii čas T. Učivo jednotlivých predmetov je rozdelené na základné jednotky vyjadrujúce isté množstvo učiva i stupeň jeho zvládnutia. Na zvládnutie jednotky učiva predmetu P_i je potrebný čas p_i. Stratégia študenta pozostáva vo výbere $x=(x_1,\dots,x_n)$, kde x_i je množstvo jednotiek učiva predmetu P_i. Minimálne množstvo učiva, ktoré treba zvládnuť je a_i. Teda

$$x_i \geq a_i\ ;\ \ i=1,\dots,n \tag{1}$$

Pre voľbu stratégie x je potrebný čas $x_1\, p_1 + \dots + x_n\, p_n$, ktorý je ohraničený hodnotou T. Teda ak $p=(\, p_1 ,\dots, p_n\,)$

$$px \leq T. \tag{2}$$

2. STRATÉGIA ŠTUDENTA

Voľba stratégie študenta záleží nielen od toho, akú dôležitosť pripisuje jednotlivým predmetom, ale i od pozície, akú v jeho hierarchii hodnôt má výber $x=(x_1,...,x_n)$. Napríklad ak $n=2$, $T=100$, $p_1=2$, $p_2=1$, $a_1=10$, $a_2=10$, výber vyhovujúci podmienkam (1) a (2) je napríklad $x=(40, 20)$. Ak ale pre získanie známky „2“ je potrebné získať 30 jednotiek a študent nechce mať trojku, uprednostní výber $y=(30,40)$ i keď jeho obľúbený predmet je P_1 a nie P_2 .
Teda v množine S všetkých prípustných výberov x je definovaná istá relácia **preferencie** P s prirodzenými vlastnosťami

1. xPx
2. ak xPy a yPz potom xPz
3. pre x,y z S, alebo xPy alebo yPx

Pre kvantitatívne vyjadrenie je účelné preferenciu P reprezentovať pomocou **funkcie úžitku** $u(x)$ pre ktorú

xPy práve vtedy, keď $u(x) \geq u(y)$.

V teórii úžitku sú nájdené rôzne podmienky, aby pre reláciu preferencie P existovala reprezentujúca funkcia úžitku, prípadne aby mala ďalšie vlastnosti ako spojitosť, diferencovateľnosť, konkávnosť a pod. Por. [1].
Predpokladajme, že $u(x)$ je funkcia úžitku nášho vzorového študenta. Potom jeho racionálne chovanie môžeme sformulovať nasledovne: zvoliť prípustný výber $x(p,T,a)=x^o$ pre ktorý jeho funkcia $u(x)$nadobúda najväčšiu hodnotu. Teda ide o úlohu

$$\max \{ u(x) \,;\, p.x \leq T ,\ x \geq a \} \tag{3}$$

Úloha (3) pri spojitej funkcii $u(x)$, ak S je neprázdna množina, má vždy riešenie a pre diferencovateľnú funkciu $u(x)$ existujú efektívne metódy jej riešenia. (Formálne úloha je takmer zhodná s úlohou voľby optimálneho

menu spotrebiteľa, kde pravda premenné majú iný význam: komodity, ceny, dôchodok.)
Uveďme ilustračný príklad. Nech $u(x)$ je Cobb-Douglasova funkcia (používaná v matematickej ekonómii)

$$u(x)=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}\ , \quad 0\leq\alpha_i\ ,\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=1 \qquad (4)$$

V tomto prípade pomerne jednoducho (pomocou Lagrangeových multiplikátorov a Kuhn-Tuckerovych podmienok) dostaneme riešenie úlohy (3) :

$$x_i^o=(\alpha_i\ /\ p_i\ )\ T\ ; \quad i=1,..,n \qquad (5)$$

ak $\alpha_i T\geq p_i a_i$.
Vzťah (5) vyjadruje, aké množstvo látky predmetu P_i musí študent zvládnuť, aby dosiahol maximálny úžitok $u(x^o)$.
Dá sa zistiť, že ak funkcia $u(x)$ spĺňa niektoré prirodzené požiadavky, voľba x^o je **racionálna** i z iného aspektu: čas px^o je minimálny čas, za ktorý sa dá dosiahnuť úžitok $u(x^o)$.

3. FUNKCIA ÚŽITKU

Funkcia $u(x)$ závisí od rôznych faktorov $F_1,\dots,F_k$ ako napríklad: dôležitosť predmetu pre prípravu na povolanie, vplyv rodiny a prostredia, osobnosť učiteľa, osobnostné dispozície študenta a pod. Nech $b_1\ ,\dots,b_k$ sú relatívne váhy jednotlivých faktorov (teda $b_1+\dots+b_k=1$) a f_{ij} nech je váha, ktorú študent pripisuje faktoru F_i pre štúdium predmetu P_j ($f_{i1}+\dots+f_{in}=1$).
Napríklad ak P_1 je matematika, P_2 slovenský jazyk, P_3 dejepis a F_1 je príprava na povolanie, voľba

$$f_{11}=0.75,\ f_{12}=0.125,\ f_{13}=0.125$$

je prirodzená pre študenta, ktorý chce študovať elektrotechniku a voľba

$$f_{11}=0.2,\ f_{12}=0.4,\ f_{13}=0.4$$

pre študenta, ktorý sa chystá študovať slovenčinu s históriou.
Funkcia úžitku potom bude mať všeobecne tvar

$$u(x)=u(x_1\ ,\dots,\ x_n,\ f_{11}\ ,\dots,\ f_{kn}\ ,\ b_1\ ,\dots,\ b_n) \qquad (6)$$

Pravdaže pre $u(x)$ v tvare (6) riešenie x^o úlohy (3) nebude tak jednoduché ako (5) a hodnoty x_i^o budú závisieť od koeficientov f_{ij} .
Ak budeme hľadať $u(x)$ v tvare Cobb-Douglasovej funkcie potom

$$\alpha_i = b_1 f_{1i} +...+ b_k f_{ki} \; ; \quad i=1,...,n \tag{7}$$

Pravda, zatiaľ nie je žiadny racionálny dôvod predpokladať, že funkcia $u(x)$ je Cobb-Douglasovho typu – snáď okrem faktu, že v ekonómii sa jej používanie osvedčilo a existujú metódy na jej experimentálne nájdenie (koeficienty α_i) v konkrétnych situáciách. V našom kontexte snáď stojí za úvahu skúmať experimentálne jej adekvátnosť, čo pravdaže nevylučuje potrebu overenia vhodnosti iných typov funkcií.

4. STRATÉGIA UČITEĽA

Učiteľ predmetu P_i bude viesť študenta k optimálnej voľbe $x^o=x(p,T,a)$ i keď táto neznamená vždy najlepšie zvládnutie predmetu P_i . Pravdaže, ako učiteľ predmetu P_i má prirodzenú snahu docieliť, aby v optimálnom riešení x^o úroveň predmetu x_i^o bola maximálna. V konkrétnom prípade Cobb-Douglasovej funkcie úžitku (4) zo vzťahu (5) vidno, že to možno docieliť dvoma spôsobmi:

a) zmenšiť p_i
b) zväčšiť α_i .

Treba zdôrazniť, že ani jedno, ani druhé učiteľ nemôže urobiť priamo: funkcia $u(x)$ závisí od voľby študenta a učiteľ môže túto voľbu iba ovplyvniť.
V prípade a) p_i vyjadruje časovú náročnosť (jednotky) predmetu P_i . Ak si odmyslíme objektívne a dlhodobo pôsobiace faktory, učiteľ svojim výkladom, prístupom ku študentovi, systémom práce a pod. môže ovplyvniť časovú náročnosť p_i . Z (5) vidno, že v uvažovanom modeli napríklad pri znížení p_i o 15%, zvýši sa hodnota x_i^o o 17.6%.
Všimnime si, že alternatíva a) zvyšuje hodnotu x_i^o bez vplyvu na ostatné hodnoty x_j^o .
V prípade b), zo (4) a (7) vidno, že zväčšenie koeficientu α_i (to je zvýšenie váhy f_{ji} niektorého faktora F_j pre štúdium predmetu P_i) má za následok zníženie váhy α_j niektorých iných predmetov P_j . I v tomto prípade pôsobenie učiteľa je iba nepriame: presvedčovanie študentov o dôležitosti predmetu pre prax, osobné vlastnosti, robenie imidžu predmetu (i sebe) a podobne môže ovplyvniť študentovu voľbu funkcie $u(x)$ v prospech predmetu P_i . Tu, pravdaže, treba byť veľmi objektívny a čestný, pretože sa môže stať, že hodnota x_i^o sa síce zväčší, ale celkový úžitok $u(x^o)$ (pre študenta) sa zníži. Pozícia učiteľa predmetu (i matematiky) musí byť v súlade s úlohou pedagóga.

Literatúra :

[1] Varian H.R.: *Microeconomic analysis, W.W.Norton, New York, 1984.*

ADRESA :
Doc.RNDr.Viliám Chvál, CSc.
PF UK v Ružomberku
Hrabovska 1
034 01 Ružomberok

LINEÁRNA ALGEBRA V RÔZNYCH FORMÁCH ŠTÚDIA NA TECHNICKÝCH VYSOKÝCH ŠKOLÁCH.

Andrej Jankech

ABSTRACT : *This paper deals with questions of Mathematics in different kind of study at technical universities. It solves questions of Linear algebra in detail and its computer aided instruction.*

1.ÚVOD

V posledných rokoch sa zmenilo postavenie matematiky na technických vysokých školách. Závisí to v určitej miere aj od študentov, pretože vedomosti, s ktorými prichádzajú na vysoké školy zo stredných škôl, majú klesajúcu tendenciu. Príčinou môže byť aj to, že v poslednej dobe prichádza čoraz viac študentov na technické vysoké školy zo stredných odborných škôl alebo učilíšť. Na týchto školách obsah matematiky často zaostáva za obsahom matematiky na gymnáziách, ktoré by mali slúžiť ako prípravka na štúdium na vysokých školách. Ako teda postupovať v 1. ročníku na vysokej škole ? Možností je určite viac, ale myslím si, že dôležité bude udržať obsah výuky a nároky pripadajúce na vysokoškolské štúdium a neskĺzať k stredoškolskej matematike. Matematika by mala naučiť študenta k presnej formulácii úlohy, zapísaniu či vyriešeniu daného problému. Treba sa však vysporiadať aj so študentmi, ktorí prichádzajú na vysoké školy so slabšími vedomosťami. Ak ich zavalíme veľkými nárokmi, čo pre nich znamená veľký skok, ktorí nie sú schopní zdolať, výsledkom je značný úbytok študentov už v prvom ročníku. Zaujímavé na tom je, že týmto „sitom" na technických vysokých školách je práve matematika, ktorá možno aj z tohoto dôvodu patrí medzi strašiakov na takmer každej technickej vysokej škole. Riešením by mohlo byť aj organizovanie 1-2 týždňového kurzu pred začiatkom prvého semestra (zrejme plateného), na ktorom by študenti s menšími znalosťami mohli skvalitniť svoje vedomosti potrebné na úspešné spĺňanie všetkých podmienok na postup do vyšších ročníkov. Ďalšou možnosťou je vytvorenie viacerých druhov štúdia na školách, aby aj študenti s menšími ambíciami mali šancu zvládnuť nároky toho-ktorého druhu štúdia. V súčasnosti majú študenti možnosť vybrať si z viacerých foriem štúdia na technických vysokých školách. Tieto druhy štúdia sa dajú rozdeliť na :

- inžinierske štúdium

- bakalárske štúdium
- dištančné vzdelávanie
- korešpondenčné vzdelávanie
- externé štúdium

Inžinierske štúdium : Najrozšírenejším druhom štúdia na technických vysokých školách je 5-ročné inžinierske štúdium. Je to odborné štúdium, vždy s určitou náväznosťou na dané zameranie vysokej školy príp. univerzity. Cieľom štúdia je prehĺbenie teoretického vzdelania, osvojenie si tvorivých metód inžinierskej práce a užšia špecializácia v odbore. Matematika by mala slúžiť na získanie všeobecných vedomostí a v určitej miere aj vedomostí pre zvládnutie problémov týkajúcich sa odboru štúdia. Na to je potrebná primeraná komunikácia medzi katedrou matematiky a ostatnými odbornými katedrami.

Bakalárske štúdium : Ďalším druhom štúdia, ktorého systém sa u nás začína meniť je bakalárske štúdium. Je fakt, že tento druh štúdia je už dlhšie stotožnený s prvými 3 rokmi inžinierskeho štúdia. Skôr sa začína preferovať separácia týchto druhov štúdia a je potrebné stanoviť, aké nároky by mali byť kladené na bakalára a na inžiniera. Hlavným cieľom bakalárskeho štúdia je vychovať takých odborníkov v danom odbore, ktorí majú dostatočne hlboký teoreticko-praktický základ na to, aby zvládli na vysokej kvalitatívnej úrovni súčasné poznatky vo svojom odbore a vedeli tieto poznatky tvorivo aplikovať v praxi. Otázne však je, aké bude uplatnenie bakalára v praxi a či naša spoločnosť je pripravená na množstvo bakalárov. Je to však trend, akým smeruje vysokoškolské štúdium v zahraničí. Čo by malo byť náplňou výuky matematiky v tomto druhu štúdia ? Myslím si, že obsah výuky matematiky by sa nemal veľmi líšiť od obsahu v inžinierskom štúdiu, aj keď určité rozdiely by mali byť hlavne v náväznosti na aplikácie potrebné pre ďalšiu prax. Všeobecné vedomosti z matematiky potrebuje rovnako inžinier ako bakalár.

Dištančná forma vzdelávania : Najperspektívnejšie sa rozvíjajúca forma vzdelávania v Európe a aj na Slovensku je dištančné vzdelávanie. Využívajú ju hlavne pracujúci, ktorí sa potrebujú špecializovať na svoju prácu a v určitej miere aj tí, ktorí neboli prijatí na denné štúdium. Ide o výhodný druh štúdia pre školy. Náklady na študentov sú oveľa menšie ako u denných študentov. Navyše dištančné vzdelávanie je platené, z čoho škola získava aj finančné prostriedky. Charakteristické pre toto štúdium je oddelenosť študenta a učiteľa. Osobný kontakt nastáva tak 3-4 krát počas jedného semestra na seminároch a pri skúšaní. Obsah celej výuky, teda aj matematiky, sa v podstate neodlišuje od denného štúdia. Problémy nastávajú pri skúšaní. Z dôvodu slabšej komunikácie medzi študentom a učiteľom je často veľmi náročné pre študentov zvládnuť celé učivo samostatne. Práve preto by bolo výhodné čo najviac využívať modernú komunikačnú techniku ako je e-mail a internet.

Externé štúdium : Tento druh štúdia bol v minulosti populárnejší ako je tomu teraz. Tiež sa začína uvažovať o platení, takže sa dá predpokladať, že dištančné vzdelávanie plne nahradí túto formu.

Korešpondenčné vzdelávanie : Pre túto formu platí to isté ako pre predchádzajúcu. Hlavne z dôvodu rozmachu internetu, e-mailu je používanie poštových služieb pre pomalosť už nepraktické.

V úplných začiatkoch je virtuálna forma vzdelávania, aplikujúca sa hlavne v zámorí. Ide o otvorené vzdelávanie prostredníctvom internetu, bez osobného kontaktu študenta s učiteľom pre všetkých, bez ohľadu na množstvo študentov a ich vek. Je však otázne ako hodnotiť a za čo udeľovať tituly. Skôr by som túto formu charakterizoval ako samostatné testovanie sa na prípadné zvládnutie toho-ktorého druhu štúdia.

2. LINEÁRNA ALGEBRA V ŠTÚDIU

Štúdium matematiky v úvodných semestroch obsahuje lineárnu algebru, ktorá nepatrí medzi najnáročnejšie časti matematiky. Veľmi často je však využívaná práve v odborných predmetoch. Vieme, že študent si cení výklad predmetu podľa toho, nakoľko sa domnieva, že vedomosti získané z tejto disciplíny mu budú užitočné v ďalšom štúdiu odborných predmetov. To by si mal hlavne uvedomiť učiteľ a snažiť sa interpretovať dané pojmy zrozumiteľne a s náväznosťou na aplikácie. Témy vyučujúce sa v lineárnej algebre na takmer každej technickej vysokej škole by sa dali zhrnúť nasledovne :

- matice
- determinanty
- sústavy lineárnych rovníc
- vektorové a Euklidove priestory
- analytická geometria
- lineárne zobrazenia

Výpočty matíc, determinantov a sústav lineárnych rovníc sú často používané vo vyšších ročníkoch. Tieto partie sú nosné v predmete lineárna algebra a rozširované na rôznych školách napr. o riešenie Markovových reťazcov u matíc, úloh lineárneho programovania a pod. Vektorové a Euklidove priestory by mali poslúžiť ako matematický aparát pre ďalšie využitie vektorov v odborných predmetoch prípadne vo fyzike. Hlavne Euklidov trojrozmerný priestor predstavuje bezprostrednú abstrakciu priestoru, v ktorom žijeme. Analytická geometria patrí k tej časti, ktorá sa vyučuje v rovine i v priestore už na gymnáziách. Preto by nemusela byť náplňou lineárnej algebry na vysokých školách, aj keď vedomosti študentov z analytickej geometrie nie sú adekvátne stredoškolským požiadavkám. Myslím si, že by sa stačilo venovať analytickej geometrii v priestore. Dôležitou časťou a určite veľmi potrebnou je partia lineárneho zobrazenia, vlastné čísla a vlastné vektory.

Vyššie spomenuté témy by mala obsahovať lineárna algebra vo všetkých formách štúdia. Samozrejme, nie všade je rozsah hodín rovnaký, takže treba prispôsobiť množstvo obsahu a čas venovaný každej partii. Rozdiely by boli len v následnosti na aplikácie v odborných problémoch týkajúcich sa typu školy.

3. LINEÁRNA ALGEBRA A POČÍTAČE

V počítaní konkrétnych príkladov s maticami, determinatmi či sústavami lineárnych rovníc sa často stretávame s veľkými časovými nárokmi na vyriešenie úloh. Je bezpochyby dôležité pre študentov ovládať princípy narábania s týmito pojmami, ale veľmi by pomohlo aj využitie počítačov práve pri numerických výpočtoch ako sú sčitovanie, násobenie matíc, ekvivalentné úpravy na maticiach, počítanie inverzných matíc, determinantov či riešení sústav lineárnych rovníc. Hlavným zmyslom tejto výuky nie je naučiť študentov ovládať nejaký konkrétny program, prípadne zostavovať algoritmy. Cieľom je pochopenie princípov preberanej metódy a jej následné využitie pri výpočtoch pomocou počítača. Využívať sa dajú rôzne druhy softwaru, napr. Mathematica, Mathcad, Maple a pod. Aj keď výuka lineárnej algebry na počítačoch nie je skúšaná, je určite vhodnou pomôckou pre odborné katedry. Treba však zosúladiť počet cvičení strávených pri počítačoch a v učebni. Jedným z riešení by mohlo byť aj vyhlásenie nepovinného seminára „Matematika na počítači“. Pravdou je, že po skončení štúdia na vysokej škole a nástupe do zamestnania je veľmi malá pravdepodobnosť, že sa študenti stretnú s takými balíkmi programov s akými ich my učíme narábať. Väčšinou sa stretnú so špeciálnymi programami, ktoré takéto výpočty majú v sebe schované a pracovník ani nemusí tušiť na akých princípoch program pracuje. Ťažko sa však na školách bude dať vyriešiť tento problém, a preto aj aspoň takýto kontakt s počítačmi by mal študentom priniesť osoh. Nakoniec použitie počítačov sa osvedčilo aj ako motivačný prvok, ktorý zvýšil záujem študentov o matematiku.

Literatúra :

[1] Ivan, J. : Matematika I, Alfa 1983

[2] Návrh koncepcie rozvoja výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike, December 1999

[3] Matejdes, M. : Lineárna algebra, Matcentrum 1998

Adresa autora :

Mgr. Jankech Andrej

KMDg TU Zvolen

Masarykova 24

960 53 Zvolen

e-mail : jankech@vsld.tuzvo.sk

INOVAČNÉ METÓDY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Pavel Klenovčan

ABSTRACT: *The ability to solve problems is not only a purpose for learning mathematics but also a major means of doing so. As students use problem-solving approaches in their investigation of mathematical content, they can develop new understandings and strengthen their abilities to use the mathematics that they know. Appropriately designet problem situations provide a context within which students can solidify and extend what they know. Students should have frequent opportunities to formulate and solve complex problems that require a significant amount of effort.*

Schopnosť spracovať a využiť narastajúce množstvo informácií je čoraz dôležitejšia. Mnohé z konkrétnych vedomostí, ktoré žiaci (študenti) získajú v škole, už o pár rokov stratia na svojej aktuálnosti a význame. Preto aj v školskej praxi je často dôležité nie to, ktoré konkrétne informácie žiaci získajú, ale práve spôsob ako ich získajú, schopnosť tvorivo ich využiť a riešiť pomocou nich problémy v danej oblasti. V procese matematického vzdelávania je treba mať na zreteli ako obsah, tak aj samotný proces získavania vedomostí. Obsah zvyčajne reprezentuje to, čo by mali žiaci vedieť (alebo čo si myslia zostavovatelia osnov a učebníc, že by mali žiaci vedieť). Proces reprezentuje spôsoby a možnosti ako tento obsah naplniť a využiť. Myslím si, že práve proces matematického vzdelávania poskytuje široké možnosti pre „tréning" takých schopností, ktoré sú využiteľné v širokom spektre ľudskej činnosti. Podrobne sa v článku [1] zaoberá cieľmi vyučovania matematiky M. Hejný.

Jednou z možností ako skvalitňovať vyučovanie a učenie je napr. koncepcia, ktorá je predstavená v rámci projektu Orava. Cieľom je poskytnúť rámec *evokácie, uvedomenia si významu* a *reflexie* (EUR) [2].

Evokácia je prvá fáza procesu učenia. Počas nej si žiaci najskôr aktívne vybavujú vedomosti, ktoré o téme majú. Sú nútení preskúmať svoje vedomostné základy a samostatne uvažovať o téme.

Uvedomenie si významu je druhá fáza rámca pre myslenie a učenie, v ktorej sa žiaci dostávajú do kontaktu s novými informáciami a myšlienkami. V tejto fáze učebného procesu má učiteľ na učenie žiaka najmenší vplyv. Žiak musí byť aktívny sám od seba.

Reflexia je treťou fázou rámca EUR, počas ktorej si žiaci upevňujú nové vedomosti a aktívne reštrukturalizujú svoje schémy porozumenia. Tieto majú zodpovedať novým informáciám, ktoré získali v procese učenia. Až v tejto fáze učenia vznikajú trvalé vedomosti. Učenie je aktom zmeny. K tejto zmene dochádza len vtedy, keď si žiaci aktívne zapracujú nové myšlienky do svojich schém porozumenia, keď ich doplnia, poopravia na základe nových informácií. V tejto fáze myslenia a učenia žiaci začínajú vyjadrovať vlastnými slovami nové myšlienky a informácie. Ak im v tejto fáze učenia umožníme diskusiu, medzi žiakmi dochádza k výmene myšlienok, čím sa prezentujú rôzne schémy porozumenia. Žiaci ich môžu medzi sebou porovnávať a môžu ich integrovať do svojich schém porozumenia.

Medzi dôležité prostriedky, ktoré sa využívajú v rámci EUR patria techniky čítania a písania. Popisuje a zdôvodňuje sa ich dôležitosť pre rozvoj kritického myslenia. Písanie a v širšom zmysle grafické znázorňovanie je vlastné aj pre matematické skúmanie, učenie sa a vyučovanie matematiky. Papier a ceruzka (tabuľa a krieda) sú, myslím si, stále nenahraditeľné pomôcky a zatiaľ ich nenahradila žiadna iná technická pomôcka.

Určitá vedomosť (zručnosť, schopnosť) je úplná len vtedy, ak ju žiak sám dôkladne pochopil a zvládol, dokáže ju zrozumiteľne sprostredkovať iným a dokáže ju aj písomne precízne sformulovať; zvlášť to platí najmä pre študentov učiteľského štúdia.

Medzi dôležité ciele, ktoré môže vyučovanie matematiky naplniť patrí napr. schopnosť:

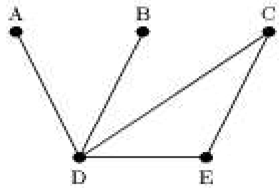
- objavovať nové poznatky na základe riešenia vhodných problémov,
- formulovať, reprezentovať, abstrahovať a zovšeobecňovať tak v oblasti matematiky, ako aj mimo nej,
- využívať rôzne stratégie a dokázať ich prispôsobiť aj iným situáciám.

Vhodným nástrojom, ktorý môže pomôcť zvládnuť tieto ciele je využívanie úloh, ktoré vytvárajú *strapce (hrozny)* problémov. Podrobne sa nimi zaoberá J. Kopka v [3]. Riešenie základnej úlohy núti formulovať nové problémy, zovšeobecňovať ich, vyslovovať hypotézy, overovať riešenia a výsledky precízne písomne formulovať. Takáto práca je odrazom skutočnej výskumnej práce aj odrazom riešenia praktických problémov. Možno ju teda považovať za autentické učenie, t.j. za proces, v ktorom je vyučovanie organizované s dôrazom na zmysluplné využitie učebnej látky [4]. Pri príprave budúcich učiteľov sú vhodné najmä úlohy, ktoré je možné využiť v širokej škále, od prvého stupňa ZŠ až po vysokoškolskú prípravu učiteľov matematiky.

Teória grafov je oblasť matematiky, ktorá poskytuje množstvo námetov na bohaté didaktické využitie. Ukážeme niekoľko možností, pričom sa nezameriame na obsahovú stránku, ale hlavne na proces získavania poznatkov a horeuvedených schopností. Základné pojmy budeme používať tak, ako sú zavedené v [5] a budeme využívať len jednoduché grafy, t.j. grafy bez slučiek a násobných hrán. Pomocou grafov môžeme znázorňovať rôzne situácie.

Základný problém. *Športového turnaja sa zúčastnilo 5 súťažiacich A, B, C, D, E. V istom okamihu mali odohrané svoje zápasy tieto dvojice: (A,D), (B,D), (C,D), (C,E), (E,D). Danú situáciu znázornite pomocou grafu.*

Riešením danej úlohy je obrázok 1. Danú situáciu sme teda popísali a znázornili grafom s vrcholmi A, B, C, D, E, a hranami (A,D), (B,D), (C,D), (C,E), (E,D).



Obr. 1

Daný základný problém môžeme didakticky rozvíjať mnohými smermi a spôsobmi. Osvojiť si špecifické metódy práce, ktoré rozvíjajú kritické myslenie je možné aj riešením nasledovných úloh (problémov).

Úloha 1. *Koľko zápasov odohralo 5 súťažiacich, ak hral každý s každým práve raz?*

Úloha 2. *Je možné, aby v turnaji so siedmimi hráčmi mal v istom okamihu každý hráč odohrané a) 4, b) 3 zápasy? V prípade, že áno, znázornite danú situáciu graficky. V prípade, že nie, nájdite dôvod.*

Ďalšie analogické úlohy môžeme formulovať napr. pomocou vzájomného dopisovania, podávania rúk alebo priamo v reči teórie grafov (pomocou pojmov graf, vrchol, hrana, stupeň vrchola a pod.). Dôležité je, aby žiaci v prvej fáze získali schopnosť vhodne dané prvky označiť a experimentovať. V prípade potreby (závisí to od toho, s akými žiakmi sa danej problematike venujeme) pre každý graf , z nejakej vhodnej skupiny grafov, zistíme počet hrán a súčet stupňov vrcholov. Získané výsledky zapíšeme do tabuľky. Cieľom je, aby žiaci sami objavili, sformulovali a zapísali jedno zo základných tvrdení teórie grafov.

V každom grafe sa súčet stupňov všetkých vrcholov rovná dvojnásobku počtu hrán.

Už tento jednoduchý výsledok umožní (napr. v rámci reflexie) riešiť a zostavovať zaujímavé úlohy (pozri napr. v [6] str. 13). Ďalšia úloha poskytne príležitosť oboznámiť sa a použiť Dirichletov princíp, ktorého jednoduchá formulácia je:

Ak je n+1 predmetov rozdelených do n priehradiek, tak existuje aspoň jedna priehradka, v ktorej sú aspoň dva predmety.

Úloha 3. *Pokúste sa zostrojiť graf s 8 vrcholmi tak, aby každé jeho dva vrcholy mali rôzne stupne.*

Samozrejme, takýto graf neexistuje. Túto skutočnosť žiaci objavia pomerne rýchlo, aj tušia prečo je to tak, ale dôvody väčšinou nedokážu jasne sformulovať.

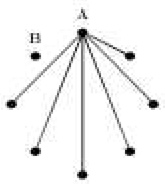
V grafe s n vrcholmi môže mať každý vrchol stupeň najmenej nula a najviac n-1. Ak nejaký vrchol má stupeň n-1 (je spojený hranami so všetkými ostatnými vrcholmi), tak už samozrejme žiadny vrchol nemôže mať stupeň nula. Naopak, ak nejaký vrchol má stupeň nula, tak už žiadny nemôže mať stupeň n-1. To znamená, že pre stupne n vrcholov je len n-1 možností, čo podľa Dirichletovho princípu znamená, že aspoň dva vrcholy majú rovnaký stupeň. Objavili a dokázali sme tak vlastne nasledovné tvrdenie:

V každom grafe s viac než jedným vrcholom existujú aspoň dva vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.

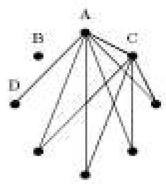
Pre účastníkov ľubovoľnej konferencie (a teda napr. aj konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra“) z toho vyplýva: Ak je na konferencii viac účastníkov ako dvaja, tak medzi nimi existujú aspoň dve osoby, ktoré podali ruku rovnakému počtu účastníkov. Ďalší smer skúmania poskytne napr. nasledovný problém podania rúk [7].

Úloha 4. *Na večierku sú štyri manželské páry. Pri zvítaní nikto nepodal ruku svojmu manželskému partnerovi. Každá zo siedmich osôb, iných ako hostiteľ, si podala ruku s rôznym počtom osôb. S koľkými osobami si podala ruku hostiteľka?*

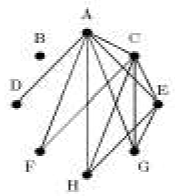
Riešenie. Konštruujme postupne graf, ktorý odpovedá popísanej situácii. Osem vrcholov grafu bude predstavovať účastníkov večierka a vzájomné podanie rúk budú reprezentovať hrany grafu. Potrebujeme teda zostrojiť graf, kde stupne siedmich vrcholov sú postupne 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Stupeň ôsmeho vrchola (ktorý odpovedá domácemu pánovi) zatiaľ nepoznáme (vieme len, že musí byť rovnaký, ako stupeň niektorého z ostatných siedmich vrcholov). Vrchol stupňa 6 označme A a vrchol stupňa 0 označme B (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Zrejme tieto vrcholy reprezentujú jeden z manželských párov (osoba A podala ruku všetkým, okrem B). Podobne postupujeme (dokresľujeme graf) ďalej. Ďalší vrchol, ktorý má stupeň 5 označíme C a vrchol stupňa 1 označíme D (obr. 3). Tieto vrcholy opäť reprezentujú manželský pár. Analogicky dostávame, že vrcholy E (stupeň 4), F (stupeň 2) reprezentujú manželský pár a vrcholy G (stupeň 3), H (stupeň 3) reprezentujú manželský pár (obr. 4). Znamená to, že hostiteľka podala ruku trom osobám. Podobne aj hostiteľ podal ruku trom osobám.

Úlohu 4 môžeme zovšeobecniť a sformulovať nasledovne.

Úloha 5. *Na večierku je n manželských párov. Nikto nepodal ruku svojmu manželskému partnerovi a každá s 2n-1 osôb, iných ako hostiteľ, si podala ruku s rôznym počtom osôb. S koľkými osobami si podala ruku hostiteľka?*

Ľahko zistíme, že pre n=1 je odpoveď 0, pre n=2 je odpoveď 1 a z predchádzajúcej úlohy vieme, že pre n=4 je odpoveď 3. To nás vedie k domnienke (hypotéze) že hostiteľka si podala ruku s n-1 osobami. Dôkaz tohto tvrdenia si už vyžaduje istý typ matematickej indukcie. Podrobne je popísaný v [7].

Ktorú časť takéhoto strapca problémov učiteľ použije a ktorú z fáz využije ako evokáciu, ktorú ako uvedomenie si významu a ktorú ako reflexiu závisí od stanoveného cieľa a od úrovne poznania žiakov, s ktorými pracuje.

Vysokoškolskí učitelia majú pomerne široké možnosti predviesť študentom rôzne inovačné metódy vyučovania a zvoliť k tomu adekvátny obsah a metódy. Okrem štandardných vyučovacích hodín sú to rôzne semináre typu „Metódy riešenia úloh“, prípadne tzv. tvorivé dielne. Myslím si, že aj učitelia matematiky na ZŠ a SŠ by mali mať, po vyčlenení tzv. základného učiva, väčšiu možnosť tvorby obsahu učiva. Mohli by tak účinnejšie a efektívnejšie realizovať niektoré dôležité výchovné zámery, najmä s ohľadom na tých žiakov, ktorí sa v budúcnosti nebudú venovať matematike profesionálne.

Literatúra:

[1] HEJNÝ, M.: *Ciele vyučovania matematiky. Pedagogické rozhľady, 1998, č. 3, s. 11-14.*

[2] Steele, J. L., Meredith, K. S., Temple, Ch.: *Príručky I - VIII, pripravené pre projekt ORAVA a projekt Čítaním a písaním ku kritickému mysleniu, Združenie Orava, Bratislava 1988-1999.*

[3] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice. ACTA UNIVERSITATIS PURKYNIANAE, MATEMATICA I, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem 1999.*

[4] Pasch, M. a kol.: *Od vzdelávacího programu k vyučovací hodině. Portál, s.r.o., Praha 1998.*

[5] Bosák, J.: *Grafy a ich aplikácie. Alfa, Bratislava 1980.*

[6] Židek, O.: *Teória grafov a jej aplikácie v školskej praxi. PF UK Bratislava 1999.*

[7] John P. D'Angelo, Douglas B. West: *Mathematical Thinking. Prentice – Hall, 1997.*

ADRESA :
RNDr. Pavel Klenovčan, CSc.
Katedra matematiky

Pedagogická fakulta
Univerzita Mateja Bela
Zvolenská cesta 6
974 01 Banská Bystrica
E-mail: klenovca@pdf.umb.sk

PYTAGOROVA VETA.

Ján Kuruc

ANOTÁCIA: *Skúsenosti z vyučovania matematiky na druhom stupni základnej školy. Žiaci sa učia pytagorovu vetu problémovou metódou na základe vytvárania univerzálnych modelov. Týmito sú tvary kreslené v štvorcovej sieti. Vysoká aktivizácia žiakov. Rozvoj produktívneho a abstraktného myslenia.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *vyučovanie matematiky, pytagorova veta, druhý stupeň ZŠ, problémová metóda.*

Iste sa zhodneme, že najťažším vyučovacím predmetom nielen na základnej škole je matematika.
Predovšetkým preto, že od žiakov sa vyžaduje množstvo abstraktných pojmov a poznatkov. Naviac, tieto majú aplikovať na rôzne často umelo vytvorené situácie.
Jedna pre žiakov z nepochopiteľných otázok je, prečo nerozumejú mnohým poznatkom, ktoré sa učia. Nerozumejú vtedy, keď poznatky nemajú zvnútornené, ak sú len poznatkami formálnymi, alebo len pamäťovými. Na zvnútornenie potrebujú vhodnú metodiku, dostatok času, hodne práce a trpezlivosti.
Druhá otázka, na ktorú im chýba odpoveď je v tom, že okrem samotných poznatkov prispieva matematická kultúra k rozvoju rozumových schopností. Tento druhý pohľad, často nazývaný výchovný cieľ, nie je dostatočne v školskej praxi akceptovaný. Najčastejšie zaniká v snahe urýchliť vzdelávací proces.
Boli sme svedkami toho v 70. Rokoch, keď autori do učebníc nahromadili množstvo poznatkov. Výsledok bol presne opačný ako sa očakával. Situácia sa doteraz výrazne nezmenila. [1].
Jedna z možností, ako sa dá problému pomôcť, je metodické spracovanie učiva a akceptovanie určitých osobitostí, ktoré chýbajú tradičným spôsobom vyučovania.
Tento trochu nezvyklý úvod som si dovalil napísať preto, že sa snažím v príspevku ukázať metodické spracovanie jednej typicky tradičnej časti učiva.
Je to učivo označované ako pytagorova veta.

V učebniciach, časopisoch a metodikách (Teória vyučovania matematiky 1.) som si prečítal všetky mne dostupné články na tému vyučovanie Pytagorovej vety. [8].
Každý autor v nich uverejňuje viac-menej jednoduchú demonštráciu (dôkaz) poznatku nazývaný pytagorova veta.
Iný pohľad na problematiku som získal po vypočutí si prednášky profesora Igora Kluvánka.
„Ak nebudete ako deti,
nevstúpite do kráľovstva matematiky.“
Týmto sloganom začínal svoju prednášku na tému pytagorova veta po svojom návrate z dlhoročného pôsobenia v Austrálii, kde prednášal matematiku.
Matematický poznatok, ktorý označujeme ako pytagorova veta, rozčlenil z hľadiska fylogenézy do piatich rôznych etáp, podľa stupňa abstrakcie tohoto poznatku.
Z hľadiska vyučovania ma zaujali najmä prvé tri etapy:

- prvá etapa je poznanie plošného vzťahu,
- druhá etapa je číselné vyjadrenie tohoto poznania,
- tretia etapa je interpretácia vzťahu $a^2 + b^2 = c^2$, ako relácie medzi stranami pravouhlého trojuholníka.

Že školská matematika podceňuje prvé dve etapy sa môžeme presvedčiť vo všetkých školských dokumentoch.
Na základe tejto prednášky som spracoval túto tému netradičným spôsobom a rozvrhol som jej prípravu do viacerých ročníkov.
Teoretické východiská som našiel v prácach V. a M. Hejného, ktoré boli neskôr spracované vo vysokoškolskej učebnici Teória vyučovania matematiky 2 pod autorským vedením M. Hejného. [4], [5], [6], [7].
Pytagorova veta sa podľa učebných osnov vyučovala v siedmom ročníku. Teraz je zaradená do ôsmeho ročníka ZŠ. Jej prípravu som však v rámci povolenej tolerancie učebnými osnovami zaradil už do piateho a šiesteho ročníka s tým, že žiakov pripravím na jej zvládnutie tak, aby dobre pochopili prvé dve etapy, ktorými sú plošný obsah a číselné vyjadrenie obsahov štvorcov, ktoré prislúchajú stranám pravouhlého trojuholníka.
Na to, aby práca bola dostatočne konkrétna, aby mali dostatok predstavivosti a aby sa dala problematika zvládnuť pomocou riešenia problémových úloh, som podľa profesora Hejného volil úroveň univerzálnych modelov. Týmito bola štvorcová sieť.
V piatom ročníku som sa zameral na výpočty obsahov rôznych rovinných útvarov, medzi nimi aj štvorcov, ktoré mali všetky vrcholy v mrežových bodoch. Piataci boli schopní objaviť aj Pickov vzorec. Riešili sme tam aj množstvo zaujímavých úloh o zlomkoch, meraniach a hry súvisiace s obsahmi. [2], [3], [9].

V šiestom ročníku som sa zameral na riešenie úloh, ktoré dôsledne sledovali výpočet obsahov štvorcov v štvorcovej sieti. Boli to štvorce, ktorých stranou bola uhlopriečka obdĺžnika. Začali sme tak, že jeden rozmer obdĺžnika sa nemenil. Bol 1 centimeter. Druhý rozmer sa postupne zväčšoval po jednom centimetri.

Vytvorila sa tak určitá postupnosť obsahov štvorcov: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, ….

Obsah počítali troma spôsobmi, ktoré sa naučili v nižšom ročníku.

1. Vhodne rozdelili štvorec na menšie časti.
2. Vytvorili opísaný štvorec a odčítaním doplnkov určili pôvodný obsah.
3. Pickovým vzorcom.

Pokračovali sme tak, že som zadal štvorce, ktorých strana bola uhlopriečka obdĺžnika s jedným rozmerom 2 centimetre a druhý rozmer sa menil. Vznikla postupnosť obsahov:

5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, …

Tu už objavili, že postupnosť sa dá určiť pričítaním čísla o dve väčšieho ako rozdiel predchádzajúcich.

Znova som zmenil rozmer obdĺžnika určujúceho stranu štvorca. Určiť ďalší obsah štvorca ak rozmer zmením o jedno, vedeli určiť na základe postupnosti. Nevedeli si však týmto spôsobom poradiť, ak nemali vytvorenú postupnosť.

Usilovne hľadali nejaké súvislosti, no zatiaľ to bolo nad ich sily prísť na príčinu, pre ktorú som im určovanie obsahov štvorcov zadával.

Málokedy sa zameriavali len na jeden spôsob výpočtu a iným spôsobom si robili kontrolu správnosti. Najčastejšie išlo o drobné omyly pri počítaní. Ich snahu počítať viacerými spôsobmi som podporoval.

V siedmom ročníku pri tejto téme, už boli obrázky iné. Tu už sme robili štvorce nad stranami pravouhlého trojuholníka. Rýchlo pochopili vzťahy medzi obsahmi štvorcov vytvorených nad stranami. Postup vytvárania trojuholníka bol obdobný ako v šiestom ročníku. Zápis výpočtov sme robili tak, aby sa dal poznatok zovšeobecniť.

Podobným spôsobom sme robili obsahy štvorcov nad stranami nepravouhlého trojuholníka:

- v ostrouhlom $a^2 + b^2 < c^2$,
- v tupouhlom $a^2 + b^2 > c^2$.

Po takejto príprave sme začali robiť relácie medzi stranami. Nepotrebovali sme ani ilustrácie ani dôkaz.

Takáto príprava pytagorovej vety sa mi odvďačila, nakoľko výsledky žiakov boli vynikajúce, neporovnateľne lepšie ako pri tradičnom vyučovaní.

Pri práci žiaci neformálne objavovali celý rad vlastností, poznatkov a skúseností.

Aplikácie im nerobili problémy. Na hodinách boli veľmi aktívni. Práca ich zaujímala.

Príprava na vyučovanie nebola o moc náročnejšia a pomôcky boli veľmi jednoduché.
Žiaci používali štvorčekový papier a učiteľ premieta štvorcovú sieť na tabuľu, do ktorej zakresľujeme obrazce. Tieto sa dajú popisovať, prepisovať, mazať, dopĺňať, opravovať.

Literatúra:

[1] BÁLINT, Ľ. - ŠIMČÁKOVÁ, Ľ. *„ Dokument Ďalší rozvoj výchovno-vzdelávacej sústavy - pokus o kritickú analýzu. Pedagogická revue 1996, r.46, č.5-6, str. 219-227*

[2] BURJAN, V. – BURJANOVÁ, Ľ. : *Matematické hry. Pytagoras. Bratislava 1991*

[3] CVIK,P. : *Pickova rovnica. Matematické obzory. Zväzok 22/1984 Alfa Bratislava str. 89-96*

[4] HEJNÝ, V. – HEJNÝ, M. : *Pracovné materiály školiaceho strediska TMM KPÚ Banská Bystrica 1977*

[5] HEJNÝ, V. – HEJNÝ, M. : *Prečo je matematika ťažká? Pokroky matematiky, fyziky a astronómie 1978 r. 23 č. 2 str. 85-93*

[6] HEJNÝ, M.: *Geometria naučila človeka myslieť. SPN Bratislava 1979*

[7] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2 SPN Bratislava 1990*

[8] GÁBOR, O. : *Teória vyučovania matematiky 1 SPN Bratislava 1990*

[9] KURUC, J. : *Vyučovanie zlomkov na ZŠ. Slovenský učiteľ, príloha Technológie vzdelávania. Slovdidac 10/96 str. 8.-11 1/97 str. 9.-11*

Autor:
Mgr. Ján Kuruc
PF KU v Ružomberku
Hrabovska 1
03401 Ružomberok
e-mail : kuruc@rbk.sk

NAJMENŠÍ UNIVERZÁLNY EXPONENT VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Béla László

ABSTRACT: *The article is dealing about possibility of presenting new accesses in teaching certain primary and secondary math topics of number theory, such are the division algorithm and another, by using the properties of the minimal universal exponent.*

1. ÚVOD

„Matematika v škole dnes a zajtra“ je a bude stále aktuálnym heslom. Rozhodujúcim činiteľom pri vyučovaní je učiteľ. Prof. T. Šalát v 19. čísle Matematických obzorov z roku 1982 zamýšľa o matematickej kultúre učiteľa matematiky, pod čím sa rozumie „istá vybavenosť učiteľa matematiky určitými schopnosťami a znalosťami v oblasti matematického vzdelávania, ktoré umožňuje vykonávať funkciu učiteľa matematiky na výbornej úrovni“. Je zrejmé teda, že matematickú kultúru učiteľa matematiky merať len množstvom jeho matematických poznatkov je nesprávne.

Úroveň matematického vzdelávania a matematickej vzdelanosti je priamo závislá od matematickej kultúry učiteľa. Prof. T. Šalát za zložky matematickej kultúry učiteľa matematiky pokladá:

1. Matematické črty myslenia učiteľa a to v najširšom zmysle slova.

Sem patrí – schopnosť samostatným štúdiom získavať nové poznatky v matematike – a tie na istej úrovni rozvíjať a aplikovať – schopnosť kombinovať matematické poznatky, viesť bežné úvahy –schopnosť formulovať jednoduché problémy – tie riešiť, alebo navrhovať cesty riešenia a tak získavať študentov pre tvorivé štúdium matematiky

2. Dostatočná zásoba matematických poznatkov
3. Pripravenosť v oblasti didaktiky matematiky a pedagogicko-psychologických vied.

Za rozhodujúcu zložku matematickej kultúry učiteľa matematiky možno pokladať práve prvú zložku. Predovšetkým odtiaľ vyviera schopnosť učiteľa tvoriť aj nové prístupy vo vyučovaní konkrétnych tematických celkov.

V tomto článku ukážeme jeden príklad, jednu možnosť na to, ako blízko sú oblasti na formulovanie jednoduchých problémov, tie rozvíjať na vyššiu úroveň a tak nájsť nové prístupy v didaktike určitého tematického celku.

Podľa G. H. Hardyho „v začiatkoch matematického vzdelávania, elementárnu teóriu čísel treba pokladať za veľmi užitočný predmet. Totiž jeho budovanie vyžaduje veľmi malý počet poznatkov, jej predmet je prístupný a známy, používa jednoduché, všeobecné metódy, ktorých nie je veľa, a je na čele matematických vied v prebúdzaní prirodzenej ľudskej zvedavosti". Podstatná časť úloh v matematických súťažiach je z elementárnej teórie čísel. Napriek týmto skutočnostiam vo vyučovaní matematiky na všetkých stupňoch škôl včítane učiteľské prípravky, nie je zatiaľ tento predmet zastúpený v osnovách v dostatočnom rozsahu.

O aritmetickej funkcii najmenšieho univerzálneho exponentu sa v učebnicovej a odbornej literatúre pojednáva veľmi sporadicky a pravdepodobne na vysokých školách u nás sa ani nespomenie. V ďalšom poukážeme na jej využitie vo vyučovaní matematiky na všetkých stupňoch škôl.

2. DEFINÍCIA A ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI FUNKCIE λ

P. Fermat v dopise k Frénicle de Bessy v roku 1640 vyslovil tvrdenie, ktoré v terminológii kongruencie možno sformulovať v nasledujúcom tvare: Ak celé číslo a nie je deliteľné prvočíslom p, tak $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.
Toto je tzv. malá Fermatova veta. Dôkaz tohto výsledku ako aj niekoľko ďalších viet pochádzajúcich od Fermata publikoval L. Euler v r. 1736 v proceedings of the St. Petersburg Academy.

V roku 1760 Euler vyslovil všeobecnejšiu vetu, že pre každé celé a, ktoré je nesúdeliteľné s prirodzeným číslom m, platí $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ (pozri 1. str. 272-273). Toto tvrdenie sa nazýva Eulerova veta a φ značí známu Eulerovú funkciu.

Teraz uvedieme definíciu niekoľko známych pojmov.

Definícia 2.1. Nech m značí prirodzené číslo a nech a je také celé číslo, že $(a, m) = 1$. Ak k je prirodzené číslo, pre ktoré platí $a^k \equiv 1 \pmod m$ tak k nazývame exponentom, ku ktorému patrí a modulo m a označme znakom $\delta(a,m)$ najmenší exponent, ku ktorému patrí a modulo m.

Definícia 2.2. Nech m je ľubovoľné a n je také prirodzené číslo, že pre každé celé a, $(a, m) = 1$ platí $a^n \equiv 1 \pmod m$. Potom n nazývame univerzálnym exponentom modulo m. Označme znakom $\lambda(m)$ najmenší univerzálny exponent modulo m.

Existencia exponentu, teda aj najmenšieho exponentu, ku ktorému patrí celé číslo a modulo m, $(a, m)=1$, ako aj existencia univerzálneho, teda aj najmenšieho univerzálneho exponentu modulo m vyplýva z Eulerovej vety.

Pojem „najmenší univerzálny exponent modulo m" zaviedol E. Lucas asi pred sto rokmi a o niečo neskoršie R. Carmichael ho označil znakom $\lambda(m)$ (pozri 3. str. 99).

Týmto je definovaná aritmetická funkcia λ. V tejto časti uvedieme jej niekoľko známych základných vlastností (pozri 3. str. 100).

Lema 2.1. Nech m je prirodzené číslo a a je také číslo, že $(a, m) = 1$. Ak k je exponent, ku ktorému patrí a modulo m a n je univerzálny exponent modulo m, potom $\delta(a,m) \setminus k$ a $\lambda(m) \setminus n$

Dôkaz. Po delení čísla k číslom $\delta(a,m)$ dostávame $k = x.\delta(a,m) + r$, $0 \le r \langle \delta(a,m)$. Potom na základe definície 2.1 máme $a^r \equiv a^r.\left(a^{\delta(a,m)}\right)^x = a^k \equiv 1$ (mod m). Keďže $0 \le r \langle \delta(a,m)$ a $\delta(a,m)$ je najmenší exponent, ku ktorému patrí a modulo m, preto r nie je prirodzené číslo, teda nutne $r = 0$. Dôkaz vzťahu $\lambda(m) \setminus n$ je podobný dôkazu vzťahu $\delta(a,m) \setminus k$, preto ho nebudeme prevádzať. □

Dôsledok 2.1. Pretože $\varphi(m)$ je univerzálny exponent modulo m (Eulerova veta), z lemy 2.1. vyplýva: $\lambda(m) \setminus \varphi(m)$.

Dôsledok 2.2. Z lemy 2.1. ihneď vyplýva, že $\delta(a,m) \setminus \lambda(m)$ a $\delta(a,m) \setminus \varphi(m)$ pre každé celé číslo a, $(a, m) = 1$, takže $\delta(a,m) \le \lambda(m)$ a $\delta(a,m) \le \varphi(m)$.

Vo 2. str. 189-190 sa dokazuje nasledovná veta:

Veta 2.1. Pre hodnoty funkcie λ platí:

1) $\lambda(1) = 1, \lambda(2) = 1, \lambda(2^2) = 2$ a $\lambda(2^\alpha) = 2^{\alpha-2}$, ak $\alpha \ge 3$

2) Ak $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ je kanonický rozklad prirodzeného čísla m, potom $\lambda(m) = \left[\lambda(2^{\alpha_0}), \varphi(p_1^{\alpha_1}), \dots, \varphi(p_r^{\alpha_r})\right]$, teda $\lambda(m)$ je najmenší spoločný násobok čísel $\lambda(2^{\alpha_0}), \varphi(p_1^{\alpha_1}), \dots, \varphi(p_1^{\alpha_r})$.

V dôkaze vety sa vyskytuje istá nepresnosť v tvrdení, že pre každé $\alpha \ge 3$ platí

(1) $$3^{2^{\alpha-3}} \equiv 1 + 2^{\alpha-2} \pmod{2^\alpha}$$

(pozri 2. str. 190). Kongruencia (1) totiž neplatí pre $\alpha=4$, veď vtedy by sme z (1) dostali $3^2 \equiv 1 + 2^2$ (mod 2^4), a odtiaľ $9 \equiv 5$ (mod 16), čo je nepravdivé.

Zrejme kongruencia (1) je správna pre $\alpha = 3$.

Spomenutú nepresnosť možno odstrániť nasledujúcou pomocnou vetou:

Lema 2.2. Pre každé prirodzené číslo $\alpha, \alpha \ge 4$ platí

(2) $$3^{2^{\alpha-3}} \equiv 1 + 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}.$$

Dôsledok 2.3. Ak $\alpha \ge 4$, tak $2^{\alpha-3}$ nie je najmenším univerzálnym exponentom modulo 2^α.

Dôkaz lemy 2.2. Platnosť kongruencie (2) pre $\alpha=4$ možno priamo overiť: $3^2 \equiv 1 + 2^3$ (mod 2^4). Predpokladajme, že (2) platí pre $\alpha = \beta \ge 4$, teda

$2^{2^{\beta-3}} \equiv 1+2^{\beta-1}$ (mod 2^β). Potom existuje také t celé číslo, že $3^{2^{\beta-3}} = 1+2^{\beta-1}+t\,2^{\beta}$. Povýšením na druhú dostaneme

$$3^{2^{\beta-2}} = 1+2^{\beta}+\left(2^{2\beta-2}+t^2 2^{2\beta}+t2^{\beta+1}+t2^{2\beta}\right).$$

Keďže $2\beta-2\rangle\beta+1$, dostávame $3^{2^{\beta-2}} \equiv 1+2^{\beta}$ (mod $2^{\beta+1}$), teda (2) platí aj pre $\alpha=\beta+1$. □

Na základe tejto lemy dôkaz vety 2.1 uvedené v literatúre 2. str. 190 sa dá ľahko modifikovať.

Na základe Eulerovej vety a lemy 2.1. platí $\lambda(m)\le\varphi(m)$. Je známe, že $\lambda(m)$ môže byť pre vhodne volené m značne menšie než $\varphi(m)$. Napr. ak $m=2^4.3^2.5.13$, tak $\varphi(m)=2304$ a $\lambda(m)=\left[2^2,3.2,2^2,2^2.3\right]=12.$ Avšak, pre nekonečne veľa $m, \lambda(m)=\varphi(m)$, čo vyplýva z nasledujúcej vety

Veta 2.2. Ak m je prirodzené číslo, potom $\lambda(m)=\varphi(m)$ vtedy a len vtedy, keď m=1, 2, 4, p^α, $2p^\alpha$, kde α je prirodzené číslo a p je nepárne prvočíslo.

Dôkaz. Na základe vety 2.1. ihneď vidno, že $\lambda(m)=\varphi(m)$, ak m=1, 2, 4, p^α, $2p^\alpha$. Nech teraz $m\neq 1,2,4,p^\alpha,2p^\alpha$. Rozoznávajme štyri možnosti:

a) $m=2^\alpha, \alpha\ge 3$

b) $m=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}, r\ge 2, p_i(i=1,\dots,r)$ sú navzájom rôzne nepárne prvočísla.

c) $m=2^\alpha.m_1, \alpha\ge 2, m_1\rangle 1, m_1$ je nepárne prirodzené číslo.

d) $m=2q_1^{\beta_1}\dots q_s^{\beta_s}, s=2, q_j(j=1,\dots,s)$ sú navzájom rôzne nepráne prvočísla.

a) Keďže $\lambda\left(2^\alpha\right)=2^{\alpha-2}$ a vieme, že $\varphi\left(2^\alpha\right)=2^{\alpha-1}$, preto $\lambda\left(2^\alpha\right)\langle\varphi\left(2^\alpha\right)$.

b) Zrejme $\left(\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right),\varphi\left(p_j^{\alpha_j}\right)\right)\rangle 1\ (i,j=1,\dots,r)$, preto z vety 2.1. vyplýva:

$$\lambda(m)=\left[\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right),\dots,\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)\right]\langle\ \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)\dots\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)=\varphi(m).$$

Podobne sa dokáže nerovnosť $\lambda(m)\langle\varphi(m)$ aj v prípadoch c) a d). □

3. NAJMENŠÍ UNIVERZÁLNY EXPONENT VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA ZÁKLADNÝCH A STREDNÝCH ŠKOLÁCH

V tejto časti načrtneme, ako možno znalosti o aritmetickej funkcii najmenšieho univerzálneho exponentu využiť vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách. Učiteľ, ktorý sa o to chce pokúsiť okrem poznatkov z 2. časti by mal ovládať základy elementárnej teórie čísel predovšetkým, teóriu deliteľnosti, kongruencie, Fermatovú, Eulerovú vetu, základné aritmetické funkcie, primitívne korene. Je to látka, ktorá sa bežne preberá na vysokých školách.

1. Pri preberaní delenia so zvyškom určité oživenie možno dosiahnuť, ak položíme otázku aké zvyšky dostaneme ak čísla 1^6, 2^6,3^6,4^6,5^6,6^6 delíme číslom 7. Žiaci s prekvapením zistia, že zvyšok je vždy číslo 1. V ďalšom treba nechať žiakov, aby sami tvorili podobné úlohy a aby objavili, že nie je potrebné základ mocniny zvyšovať. Tento posledný problém na stredných školách je možné aj dokázať pomocou binomickej vety. Tvorivosť žiakov usmerníme tak, aby sami objavili to, že je rozdiel, keď delíme príslušné mocniny prvočíslom alebo zloženým číslom. Týmto spôsobom žiaci sami objavia malú Fermatovú vetu.

2. Keď žiaci si uvedomujú, že pri delení uvedených mocnín zloženým číslom, zvyšok nebude vždy 1, treba žiakom položiť také otázky a dať také úlohy, aby videli, že tu už tak ľahko k všeobecným záverom sa nedopracujeme, lebo zvyšky tvoria rôznorodé, často neprehľadné systémy. V tejto fáze pri nezmenenom module zmeníme exponent. Hľadáme v podstate exponent tak, aby pri delení mocnín $1^k,2^k,\ldots,(m-1)^k$ zloženým číslom m, čo najviac zvyškov bolo 1. Pri riešení dávame žiakom za úlohu pri danom základe a nájsť kladný exponent k, tak, aby pri delení čísla a^k daným číslom (modulom) m, dostali zvyšok 1. V podstate pri hľadaní odpovedí na túto otázku v konkrétnych príkladoch žiaci nájdu exponent resp. najmenší exponent ku ktorému číslo a patrí podľa modulu m.

Vhodnou voľbou konkrétnych príkladov dospejeme k poznaniu, že keď a, m sú nesúdeliteľné, $(a, m)=1$, tak takýto exponent existuje, a ak $(a, m)>1$, tak takýto exponent neexistuje. Na určitom stupni posledné tvrdenie možno aj dokázať. Totiž ak $(a, m)=d>1$ a súčasne pre nejaké kladné celé k, $a^k=mq+1$, tak číslo $d>1$ by bol deliteľom čísla 1.

Učiteľ vyzbrojený znalosťou Fermatovej, Eulerovej vety a znalosťou výpočtu hodnoty funkcie φ a λ má široké možnosti vyskúšať si svoje schopnosti, kombinovať matematické poznatky, viesť bežné úvahy, formulovať jednoduché úlohy, motivovať a aktivizovať žiakov a rozvíjať ich kreativitu.

3. Na základe vyšetrení množstva konkrétnych úloh, v ďalšej fáze vyučovania sa pokúsime formulovať problémy, hypotézy, otázky na malú Fermatovú vetu, na hľadanie univerzálneho a najmenšieho univerzálneho exponentu. Učiteľ tu môže navrhnúť rôzne cesty riešenia. Napr. pri zvolenom module m, zapíšu sa do tabuľky s ním nesúdeľné čísla a k nim sa vypočítajú najmenšie exponenty ku ktorému patria modulo m. V ďalšom sa vyšetrí takto získaný najväčší exponent. Tu treba ukázať, že menší exponent už nie je univerzálny exponent modulo m a tiež odôvodniť, že je exponentom modulo m pre všetky čísla nesúdeliteľné s m.

4. Na stredných školách je možné žiakov oboznámiť so vzorcami na výpočet hodnôt funkcií φ a λ a tým vznikne príležitosť obecne formulovať Eulerovú vetu a obdobné tvorenie pre funkciu λ.

Najmenší spoločný násobok čísel žiaci vedia na vhodnom stupni štúdia vypočítať pomocou rozkladu čísel na súčin prvočísel. Pre prehlbovanie tohto učiva ponúka možnosť práve najmenší univerzálny exponent hľadaním riešenia resp. všetkých riešení rovnice typu $\lambda(x)=k$, pre dané prirodzené číslo k.

Učiteľ určite nájde veľa zaujímavých úloh v zbierkach z teórie čísel, ktoré sa dajú jednoduchšie riešiť pomocou tu spomenutých teórií.

5. Pre učiteľov matematiky na základných a stredných školách teória najmenšieho univerzálneho exponentu poskytuje možnosti k napísaniu kvalifikačných alebo rigoróznych prác. Sú tu otvorené témy ako napríklad hľadať také prirodzené čísla k, pre ktoré rovnice $\lambda(x)=k$ nemá riešenie, alebo nájsť všetky riešenia tejto rovnice. (pozri 4.)

Je známe, že φ-funkcia je multiplikatívna. Ľahko sa nahliadne, že funkcia najmenšieho univerzálneho exponentu λ nie je multiplikatívna. Vzniká problém, charakterizovať množinu tzv. multiplikatívnych bodov funkcie λ, t.j. tú množinu tých dvojíc čísel $[a, b]$ pre ktoré platí $\lambda(ab)=\lambda(a)\lambda(b)$ (pozri 5.) Ako dobre vieme $\varphi(m), \lambda(m)$ sú univerzálne exponenty modulo m. Ďalšie problémy na riešenie vznikajú, keď známe výsledky o $\varphi(m)$ preformulujeme na $\lambda(m)$. Napr. či pre každé prirodzené číslo n existuje prirodzené číslo m také, že

a) $\lambda(m)-\lambda(m-1)\rangle n$ a $\lambda(m)-\lambda(m+1)\rangle n$

b) $\dfrac{\lambda(m-1)}{\lambda(m)}\rangle n$ a $\dfrac{\lambda(m+1)}{\lambda(m)}\rangle n$

a pod.

Literatúra:

[1] Ore, O.: *Number Theory and its History, Mc Graw-Hill Book Company. Inc. New York – Toronto – London, 1948*

[2] Sierpiński, W.: *Teoria Liezb II, PWN, Warszawa, 1959*

[3] Griffin, H.: *Elementary Theory of Numbers, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York – Toronto – London, 1954*

[4] Lászlo, V.: O rovnici $\lambda(n)=m$, *Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre. Matematika 2, SPN Bratislava 1982 (33-38)*

[5] László, V.: *O číslach, ktoré nie sú hodnotami funkcie λ, Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre. Matematika 5, SPN Baratislava 1991 (107-111)*

[6] Šalát, T.: *O matematickej kultúre učiteľa matematiky. Matematické obzory 19/1982, Alfa 1982 (1-9)*

Adresa :
Doc. RNDr. Béla Laszló, CSc.
Katedra algebry a teórie čísel
FPV UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko
e-mail:blaszlo@ukf.sk

VÝTVARNÁ GEOMETRIA – ABY POUŽITIE GEOMETRIE SLEDOVALO AJ VÝTVARNÉ CIELE.

Denisa Lizoňová

ABSTRACT*: The article deals with questions of creative (art) geometry and its exploitation in the processes of furniture design.*

1. ÚVOD

V procese tvorby výtvarného diela sa myslenie priemyselného výtvarníka obracia k dvom stránkam jedného neoddeliteľného javu. Týmito stánkami sú obsah a forma.

Výtvarník musí venovať veľkú pozornosť obidvom, lebo ich vzájomná súčinnosť nevyviera len z aktivity obsahu, aj keď je prvoradým činiteľom, ale aj z aktivity formy.

Dominantnú úlohu v práci priemyselného výtvarníka – dizajnéra zohráva výtvarno–geometrické zobrazovanie, ktoré tvorí vizuálno–komunikatívny systém jednak medzi tvorcom a zákazníkom (formou pohotovo realizovaných škíc) a jednak medzi tvorcom a výrobcom v procese realizácie výrobkov (formou kompletnej výrobnej dokumentácie obsahujúcej rozpracované konštrukčné detaily, materiálové a farebné riešenie atď.).

2. VÝTVARNÁ GEOMETRIA

Cieľom výtvarnej geometrie je, aby použitie geometrie v navrhovaní predmetov dennej potreby sledovalo aj estetické a výtvarné ciele. Poskytuje priemyselným výtvarníkom účinný nástroj pre chápanie a pretváranie jednoduchých geometrických tvarov v estetické hodnoty. Zároveň vytvára predpoklady pre úspešné zvládnutie spájania exaktných hodnôt s umeleckými hodnotami v jeden funkčný celok.

Výtvarná geometria sa na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie Technickej univerzity vo Zvolene vyučuje ako samostatný predmet pre študentov 2. ročníka odboru „Priemyselný dizajn nábytku“ v rozsahu dvoch semestrov. Priamo nadväzuje a aj po obsahovej stránke využíva znalosti študentov z prvého ročníka z predmetu „Deskriptívna geometria“.

V prvom semestri sa študenti zoznamujú s výtvarno-geometrickou analýzou elementárnych zložiek geometrických foriem ako sú napr. bod, skupina bodov, línia, bod a línia, konštrukcia geometrických kriviek a ich výtvarné významy. Ďalšiu časť tvoria geometrické útvary a ich vzájomné vzťahy – labilita, stabilita, tvarová príbuznosť, variabilita formy a podobne.

V nasledujúcej učebnej látke sa študenti zoznamujú s geometricko-výtvarným rozborom základných kategórií kompozície ako sú symetria a asymetria, kontrastné vzťahy, rytmické vzťahy radenia prvkov rovnakého i rôzneho druhu, proporčné závislosti, harmonické členenie, modul a merítko.

S využitím získaných poznatkov študenti vypracovávajú grafické práce na jednotlivé témy. Práce sú zväčša individuálne zadávané a ich prevedenie, čo sa týka výtvarných techník, je ponechané na osobnosť študenta.

Tu študenti môžu zúročiť svoje schopnosti a vedomosti aj z iných predmetov, najmä z „Výtvarnej tvorby“ a z „Modelovania“. V súčasnej dobe vo väčšine prípadov študenti využívajú tradičné výtvarné techniky (kresba, akvarel, koláž,...), ktoré v budúcnosti budú vytláčané postupne počítačovými prostriedkami (harvér, softvér). Príkladom týchto novodobých technológií je napr. zariadenie D–Board firmy Nemetschek, ktoré, ako je uvedené v [3], vráti pero do ruky.

Učebná látka v letnom semestri nadväzuje jednak na vedomosti získané v zimnom semestri, ale aj na vedomosti získané z teórie plôch, s ktorými sa študenti oboznámili už skôr v rámci predmetu „Deskriptívna geometria“. Je zameraná na podrobnú analýzu priestorovo–objemových geometrických foriem, druhy a typy skladby týchto foriem a ich výtvarné výrazové prostriedky.

Študenti v rámci cvičení pracujú na štyroch zadaniach, ktoré na seba priamo nadväzujú. Na úvod sa oboznámia s elementárnou formou a s vytváraním jednoduchých základných foriem pohybom po homogénnych dráhach.

Následne na to pracujú so zloženými formami, ktoré vytvárajú na základe vytvoreného modulu skladbou základných jednotiek, pri rôznych spôsoboch vzájomného spájania: na hranu, na stenu, dotykom v bode, prenikaním tak, aby vyvolávali dojem jednoty. V ďalšom zadaní pretvárajú priestorovo–plošné ohraničenia pomocou perforácií na základe zákonitostí rytmického radenia tak, aby dochádzalo k priamemu či nepriamemu prepájaniu priestorov.

Záverečná práca skĺbi poznatky z celého predmetu a vedie k využitiu foriem v návrhu úžitkového predmetu. Celosemestrálne snaženie študentov je zhodnotené komisiou pedagógov v rámci „Prieskumu prác študentov odboru Priemyselný dizajn nábytku“ a predmet je ukončený klasifikovaným zápočtom.

Veľký význam pre rozvoj tvorivosti poskytuje vzájomná konfrontácia návrhov úžitkových predmetov. Táto je v dnešnej dobe rozvoja informačných technológií umocnená ich použitím. Študenti tak získavajú nielen možnosť čerpania tvorivých poznatkov, ale majú možnosť prezentovať svoje návrhy vo forme www stránok širokej odbornej verejnosti. Využívajú tak poznatky nadobudnuté v predmete „Výpočtová technika". V tejto súvislosti však treba, ako upozorňuje [4], venovať veľkú pozornosť tzv. novodobému plagiátorstvu.

Poznatky získané z tohto predmetu je možné ďalej využiť pri tvorbe a navrhovaní.

3. ZÁVER

Využitie geometrie vo výtvarníctve, čo je hlavnou snahou tohto predmetu, sa stáva jedným z faktorov, ktorými možno dosiahnuť presvedčivú mieru výtvarnej dokonalosti. Súčasné tendencie si vyžadujú typ priemyselného výtvarníka schopného analytického rozhodovania a postupu. To však neznamená, že vplyvom intelektuálnych rozborov a predpokladaných potrieb geometrických zákonitostí tvaru možno docieliť požadované kvality diela. Nedostatok talentu nemôžu nahradiť ani najrozvinutejšie intelektuálne postupy.

Literatúra:

[1] Bartko, O. – Filo, R. – Reištetterová, Z.: *Výtvarná príprava. Bratislava, SPN Bratislava 1987, 305 str.*

[2] Crhák, F. – Kostka, Z.: *Výtvarná geometria, 2. vydanie. Bratislava, SPN Bratislava 1986, 160 str.*

[3] Nemetschek s.r.o.: *Revolution Nemetschek D-Board, vrátíme vám pero do ruky. In: http://www.nemetschek.cz/ (jún 2000)*

[4] Šipoš, Ľ.: *Vybrané pedagogické aspekty použitia multimédií. In: Sborník přednášek „Kybernetické modely ve vzdělávání a v mezilidské komunikaci" z 8. Pražské konferenci o kybernetické pedagogice. VŠP Hradec Králové, 12.-14.6.2000, CD-ROM.*

Adresa autora :

Ing. Lizoňová Denisa
KMDg TU Zvolen
Masarykova 24
960 53 Zvolen
e-mail : lizonova@vsld.tuzvo.sk

ELEMENTÁRNE METÓDY DERIVOVANIA

Milan Matejdes

ABSTRACT : *Presented paper deals with elementary ways of differentiation of some algebraic functions based on identifying common intersection points of a given function and secant line passing through a tangent point.*

1. ÚVOD

Geometrický význam derivácií spočíva v konštrukcii dotyčnice ku grafu funkcie *f* v dotykovom bode $T = [a, f(a)]$. Pre niektoré algebraické funkcie je výpočet derivácie t.j. výpočet smernice dotyčnice pomerne jednoduchý a nevyžaduje zavedenie limity a osvojenie si ich techniky výpočtu. Vychádzame z myšlienky, že grafy funkcie f a priamky $y = kx + q$ sa v prípade ich dotyku pretínajú práve v jednom bode. Naviac, ak priamka má prechádzať bodom *T*, tak jej rovnicu môžeme prepísať do tvaru $y = k(x-a) + f(a)$. Vo všeobecnosti stačí všetky riešenia rovnice

$$f(x) = k(x-a) + f(a)$$

stotožniť, z čoho vypočítame hodnotu smernice *k*, t.j. hodnotu derivácie funkcie f v bode *a*. Postup budeme ilustrovať na nasledujúcich príkladoch funkcií.

Príklad l. Derivácia kvadratickej funkcie

Nech $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Potom

$$f(x) = k(x-a) + f(a),$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = k(x-a) + a_2a^2 + a_1a + a_0,$$

$$a_2\left(x^2 - a^2\right) + a_1(x-a) - k(x-a) = 0\,,$$

$$(x-a)\left[a_2(x+a) + a_1 - k\right] = 0\,.$$

Posledná rovnosť je splnená pre $x - a$, alebo ak

$$a_2(x+a) + a_1 - k = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{k - a_1 - a_2 a}{a_2}\,.$$

Pretože dotyčnica danú parabolu pretína len v jednom bode, tak

$$a = \frac{k - a_1 - a_2 a}{a_2}\,,$$

$$a_2 a = k - a_1 - a_2 a\,,$$

$$2a_2 a + a_1 = k\,.$$

Daná priamka bude dotyčnicou práve vtedy, ak jej smernica je rovná

$$k = 2a_2 a + a_1\,.$$

Dotyčnica má rovnicu

$$y = (2a_2 + a_1)(x-a) + f(a)\,.$$

Smernica *k* je vlastne hodnota funkcie

$$y = 2a_2 x + a_1$$

v bode *a,* t.j. derivácii danej kvadratickej funkcii.

Príklad 2. Derivácia funkcie $f(x) = \sqrt{x}$.

Nech $f(x) = \sqrt{x},\ a > 0$. Potom

$$\sqrt{x} = k(x-a) + \sqrt{a} \ ,$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = k(x-a) \ ,$$

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = k(x-a) \ ,$$

$$\frac{x-a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = k(x-a) \ .$$

Posledná rovnica je splnená, ak $x = a$, alebo ak

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = k \Rightarrow x\left(\frac{1}{k} - \sqrt{a}\right)^2 .$$

Porovnaním oboch riešení dostávame

$$a = \left(\frac{1}{k} - \sqrt{a}\right)^2 ,$$

$$k = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ .$$

Derivácia funkcie $y = \sqrt{x}$ v bode a je rovná $y'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Príklad 3. Derivácia lineárnej lomenej funkcie

Nech $f(x) = k + \dfrac{A}{x-h}$, $a \neq h$. Potom

$$k + \frac{A}{x-h} = k(x-a) + k + \frac{A}{a-h} ,$$

$$\frac{A(a-h) - A(x-h)}{(x-h)(a-h)} = k(x-a) \ ,$$

$$A\frac{a-x}{(x-h)(a-h)}=k(x-a),$$

$$(x-a)\left(k+\frac{A}{(x-h)(a-h)}\right)=0\,.$$

Posledná rovnosť je splnená pre $x=a$ a pre

$$k+\frac{A}{(x-h)(a-h)}=0\Rightarrow k(x-h)(a-h)=-A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow kx-kh=\frac{-A}{a-h}\Rightarrow x=\frac{1}{k}\left(\frac{-A}{a-h}+kh\right).$$

Pretože dotyčnica lokálne v bode T pretína graf funkcie v jednom bode, tak

$$a=\frac{1}{k}\left(\frac{-A}{a-h}+kh\right),$$

$$ka=\frac{-A}{a-h}+kh\ ,$$

$$k(a-h)=\frac{-A}{(a-h)}\ ,$$

$$k=-\frac{A}{(a-h)^2}\ .$$

Rovnica dotyčnice má tvar

$$y=-\frac{A}{(a-h)^2}(x-a)+f(a)\ .$$

Derivácia funkcie $y=k+\dfrac{A}{x-h}$ v bode a je rovná $y'(a)=-\dfrac{A}{(a-h)^2}$.

Príklad 4. Derivácia funkcie $y = x^n$

Nech $f(x) = x^n$. Potom

$$x^n = k(x-a) + a^n ,$$

$$x^n - a^n = k(x-a) ,$$

$$(x-a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1}\right) = k(x-a) .$$

Posledná rovnica má riešenie pre $x = a$ a ďalšie riešenia (ak existujú) vyplývajú z rovnice

$$x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1} = k .$$

Ak všetky riešenia stotožníme, tak

$$a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \ldots + a\,a^{n-2} + a^{n-1} = k ,$$

t. j.

$$k = n\,a^{n-1} .$$

Analogickými postupmi môžeme dôjsť k derivácii funkcie $y = kx^{\frac{p}{q}}$, resp.

polynómu $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.
Z tejto čisto geometrickej motivácie, však prepisom rovnice

$$f(x) = k(x-a) + f(a)$$

do tvaru

$$k = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} ,$$

vieme význam čísla *k* všeobecne interpretovať ako zmenu funkcie *f* v bode *a* pripadajúcu na jednotkovú zmenu argumentu. Táto metóda teda čiastočne vedie na elementárne techniky výpočtu derivácií a jej významu.
Problémom zostáva bez limitného počtu výpočet derivácií transcendentných funkcií, ako sú goniometrické, či logaritmické funkcie.

ZÁVER

Na niektorých typoch funkcií sa elementárnymi prostriedkami dokázala ich derivácia. Metóda je založená na hľadaní priesečníkov grafov funkcie a priamky v danom bode a v ich následnom stotožnení. Otvorenými otázkami zostáva hľadanie čo najjednoduchších postupov pre dôkaz derivácií ďalších funkcií, resp. pravidiel derivovania.

Adresa:
Doc. RNDr. Milan Matejdes, CSc.
Technická univerzita
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Masarykova 24
960 53 Zvolen

Aké sú vedomosti z matematiky?

Viera Mislivcová

ABSTRACT: *The article analyses the standard of knowledge of mathematics of studens, who have studied at VLA for last 3 years. It also deals with the main problems caused by student´s transition from secondary schools to the Air Force Academy.*

1. ÚVOD

Príručka, ktorá bola vydaná na Vojenskej leteckej akadémii M. R. Štefánika v Košiciach pod názvom „Požiadavky na prijímacie skúšky z matematiky pre záujemcov o štúdium na VLA“, je pomôckou k príprave študentov stredných škôl na prijímaciu skúšku z matematiky. Autori v jej prepracovanom vydaní kládli dôraz na to, aby sa uchádzač o štúdium na vysokej škole vyhol zbytočným stresom. Príručka tiež umožňuje študentom zamyslieť sa nad problémami vopred tak, aby ich mohli konzultovať aj so svojimi učiteľmi na strednej škole ešte pred prijímacími skúškami. Pozornosť je nutné zamerať najmä na opakovanie poznatkov o výrokoch a množinách, úpravu najdôležitejších matematických výrazov za použitia známych vzorcov, mocnín a odmocnín, úpravu komplexných čísel, funkcií, riešenie rovníc algebraických, exponenciálnych, logaritmických, goniometrických a tiež základných poznatkov z analytickej geometrie v rovine, z goniometrie, trigonometrie a stereometrie.

2. ZÁKLADNÉ PROBLÉMY A ICH CHARAKTERISTIKA

Na Vojenskú leteckú akadémiu prichádzajú absolventi gymnázií, stredných odborných škôl, stredných priemyselných škôl, obchodných akadémií a vojenských stredných odborných škôl. Vysokoškolskí učitelia sa vo svojej práci riadia plánovanou výučbou a učebnými osnovami. Vedecko-výskumná činnosť učiteľov katedry je zameraná aj na odbor teória vyučovania matematiky. A preto vo svojej pedagogickej praxi uplatňujú rôzne metodické prístupy, zamerané k zvyšovaniu motivácie študentov k štúdiu matematiky. Zdá sa, že ani to nie je vždy zárukou absolvovania skúšky v riadnom termíne. Počet opravných termínov z matematiky je vždy dosť vysoký. Výchovno-vzdelávací proces tvoria predovšetkým tri dôležité zložky: učiteľ, študent, obsah a rozsah predmetu. Ako dôvody veľkého počtu opravných termínov možno uviesť tieto javy:

- študenti sú z rôznych typov škôl a úroveň výučby matematiky je na rôznych školách rozdielna,
- samotný charakter predmetu (matematika je vysoko abstraktný a exaktný vedný odbor),
- študijné odbory so zameraním strojným a elektrotechnickým sú na VLA najťažšími študijnými odbormi z hľadiska všeobecného základu vybaveného matematikou a tiež početnosťou skúšok (matematická analýza I, II, III, IV, lineárna algebra, diskrétna matematika, numerická matematika, teória pravdepodobnosti a matematická štatistika),
- nevhodný typ absolvovanej strednej školy u študenta, ktorý chce pokračovať v štúdiu na VLA (zdravotné stredné školy, obchodné akadémie, poľnohospodárske stredné školy), uchádzači z týchto škôl si len vo veľmi nízkej miere uvedomujú požiadavky na štúdium zvoleného typu štúdia,
- narúšanie skúškového obdobia rôznymi akciami (začínajú sa objavovať prípady nerešpektovania základných pedagogicko-psychologických zásad a psychohygieny),
- nezáujem študentov o seriózny prácu a štúdium (slabá motivácia k serióznej práci a štúdiu sa vyskytuje aj u talentovanejších študentov, čo by zvlášť malo viesť k urýchlenému riešeniu tohto stavu),
- nápor na psychiku (súčinnosť spolufaktorov roly študenta a roly vojaka profesionála, kde len samotná základná vojenská služba sa realizuje v priebehu prvého ročníka vysokoškolského štúdia, kladie veľké nároky na študenta).

Prax upozorňuje hlavne na alarmujúce posledné štyri uvedené body, ktorým v blízkej budúcnosti bude nutné venovať zvýšenú pozornosť.

3. ZÁVER

V posledných troch rokoch už na začiatku každého školského roka možno registrovať veľké nedostatky vo vedomostiach študentov z matematiky na VLA. Príčinou toho je skutočnosť, že na rôznych typoch stredných škôl sa niektoré časti matematických disciplín vôbec nevyučujú. Preto majú študenti najviac problémov s komplexnými číslami, kombinatorikou a analytickou geometriou. Tieto nedostatky vo vedomostiach študentov musí učiteľ odstrániť čo najskôr, v spolupráci so študentmi, za využitia svojho pedagogického majstrovstva.

Literatúra:

[1] Mislivcová V. – Železník V. : *Požiadavky na prijímacie skúšky z matematiky pre záujemcov o štúdium na VLA*. Košice, VLA, 1998.

ADRESA :
Viera Mislivcová, RNDr., CSc.
Katedra matematiky a fyziky
Vojenská letecká akadémia, gen. M. R. Štefánika v Košiciach
ul. Rampová 7
041 21 Košice, SR
tel. +095 / 6 512 372
e-mail: vmisliv@vlake.army.sk