AKO RIEŠIŤ MATEMATICKÉ PROBLÉMY

Jan Kopka

VERBUM

Ružomberok 2010

Kniha vydaná s podporou projektu na rozvoj vedy a techniky č. 062-04KU-8/2008 *Stredisko didaktiky matematiky pre transfer poznatkov* a projektu KEGA č. 3/7068/09 *Matematika v schválených štátnych vzdelávacích programoch pre 1. a 2. stupeň základnej školy a pre gymnáziá (ISCED 1, 2, 3).*

Recenzenti: Libuša Hozová
Truda Kopková
Zdenko Takáč

Obálka: Martin Papčo

ISBN 978-80-8084-563-6

Obsah

Na rozdiel od prírodných a spoločenských vied, ale podobne ako v umení, hýri matematika neprebernou ponukou niekedy až hravej a pritom zmysluplnej tvorivosti burcujúcej ľudský intelekt. Pozorovanie kvalitatívnej povahy a vzápätí nato operovanie s kvantitatívnymi vlastnosťami prirodzených čísel ukazujúcich sa v názornom reálnom svete – podobne ako kreslenie obrázkov či spievanie jednoduchých nápevov – uchvacuje už i malé dieťa.

Podpora, rozvoj, rozširovanie a kultivácia zmienených prirodzených zdrojov ľudskej tvorivosti je jedným z príznačných rysov európskeho vzdelávania. Napokon práve tvorivá vynachádzavosť je tým, čo by mohlo v globalizovanom svete zaistiť Európe i naďalej dôstojné postavenie.

Aj keď malé prirodzené čísla sú najprístupnejším a zrejme i najpôvodnejším zdrojom tvorivosti z tých, ktoré ponúka matematika, nie sú ani zďaleka jediným takýmto zdrojom. Na hodinách matematiky na základných a stredných školách (a nakoniec i na školách vysokých) sa študenti stretávajú s radom ďalších nemenej významných. Tie však bývajú skryté pod množstvom najrôznejších závažných poznatkov, ktoré vstrebávajú pozornosť študentov. Ide teda o to upozorniť, že sme sa v tom či onom prípade s takýmto zdrojom tvorivosti stretli, prípadne naznačiť, akým spôsobom by bolo možné z neho čerpať. A práve týmito dôležitými otázkami sa úspešne zaoberá prof. Jan Kopka, a im je tiež venovaná táto kniha.

Praha, 25. 11. 2009

Petr Vopěnka

Predhovor

Rovnako ako v žiari Slnka blednú všetky hviezdy, tak aj učenec môže v obecnom zhromaždení zatieniť slávu iných, keď predloží – a tým skôr, keď vyrieši – matematické problémy.

(z knihy veľkého indického matematika Brahmagupty, rok 628)

Začneme jednoduchým, ale zaujímavým problémom, ktorý o knihe všeličo napovie.

Problém 1: Zvoľte nejaké trojciferné číslo a toto číslo napíšte dvakrát za sebou. Vzniknuté šesťciferné číslo deľte číslom 7, získaný výsledok číslom 11 a tento druhý výsledok ešte číslom 13. Skúmajte, čo dostanete.

Riešenie: Začneme experimentovaním. Uvažujme napr. trojciferné číslo 412. Ak ho napíšeme dvakrát za sebou, vznikne šesťciferné číslo 412 412. Požadovaným delením dostaneme:

$$412\,412 : 7 = 58\,916, \quad 58\,916 : 11 = 5\,356, \quad 5\,356 : 13 = 412.$$

Získali sme trojciferné číslo, ktoré sme na začiatku zvolili. Pokiaľ experiment niekoľkokrát zopakujeme (s rôznymi východiskovými trojcifernými číslami), vždy dostaneme trojciferné číslo, z ktorého sme vychádzali. Môžeme preto vysloviť:

Hypotéza: Keď s akýmkoľvek trojciferným číslom urobíme vyššie opísaný postup, potom vždy na záver dostaneme trojciferné číslo, z ktorého sme vychádzali.

Hypotézu môžeme overiť ešte na ďalších príkladoch, ale my máme schopnosti na to, aby sme ju **dokázali**. Jedna možnosť by bola, že by sme vyskúšali všetkých 900 trojciferných čísel. To by však bola, aj pri použití kalkulačky, veľmi zdĺhavá práca, a preto budeme postupovať inak.

Nech *abc* označuje východiskové trojciferné číslo. Ak napíšeme toto číslo dvakrát za sebou, dostaneme šesťciferné číslo *abc abc*. Keď toto číslo rozpíšeme a upravíme, dostaneme:

$$abc\,abc = \boldsymbol{a}.10^5 + \boldsymbol{b}.10^4 + \boldsymbol{c}.10^3 + \boldsymbol{a}.10^2 + \boldsymbol{b}.10 + c = \boldsymbol{a}.100\,100 + \boldsymbol{b}.10\,010 + \boldsymbol{c}.1\,001 =$$

$$= 1001(\boldsymbol{a}.10^2 + \boldsymbol{b}.10 + c)\ .$$

Pre číslo 1 001 platí 1 001 = 7**.**11**.**13, a je preto deliteľné číslami 7, 11 a 13. Navyše, po uvedenom delení dostaneme číslo v zátvorke. V zátvorke je v rozpísanom tvare trojciferné číslo *abc*, z ktorého sme vychádzali. □

Symbol □ označuje koniec dôkazu. Dokázanú hypotézu môžeme teraz premenovať na **vetu**.

Dúfam, že čitateľa tento zaujímavý, i keď nenáročný problém zaujal natoľko, že bude v čítaní knihy pokračovať aj ďalej. Uveďme ešte jeden zaujímavý problém.

Problém 2: Je daná štvorcová tabuľka 8×8. Doplňte jej políčka číslami 1, 0, -1 tak, aby súčty čísel vo všetkých riadkoch, stĺpcoch a oboch diagonálach boli navzájom rôzne.

Ide sa vlastne o akýsi anti-problém k problému *Zostrojte magický štvorec* (pozri kap. 5 článok 12 a 13), v ktorom sú všetky uvedené súčty rovnaké (tam však máme k dispozícii na dosadzovanie viac čísel a každé môže byť v tabuľke práve raz).

Riešenie: Aby sme do problematiky lepšie prenikli a zároveň sa pokúsili objaviť riešenie, budeme experimentovať. Pretože však tabuľka 8×8 je príliš veľká a experimentovanie by trvalo dlho, vezmeme si namiesto nej napr. tabuľku 3×3 a pokúsime sa do nej vložiť čísla 1, 0, -1 tak, aby uvedené súčty boli rôzne. Zvolili sme stratégiu **zjednodušenia**. Jeden z **experimentov** je znázornený na obr. 1.

0	0	0
0	1	0
1	1	-1

Obr. 1

Na prvý pohľad vidieť, že uvedený experiment nevyšiel, pretože napríklad súčet čísel v prvom stĺpci a v treťom riadku je 1. Po niekoľkých pokusoch zrejme zistíme, že nám to žiadnym spôsobom nevychádza. Je to naša neschopnosť, alebo problém riešenie nemá?

Budeme zrejme musieť zvoliť iný postup. Zamyslime sa, koľko rôznych trojčlenných súčtov môžeme vytvoriť z čísel 1, 0, -1. Najmenší z týchto súčtov bude -3 a najväčší 3. Samozrejme môžeme vytvoriť i súčty -2, -1, 0, 1, 2. Týchto súčtov je celkovo 7. Koľko rôznych súčtov však máme vytvoriť v tabuľke 3×3? Riadky sú 3, stĺpce sú tiež 3 a diagonály 2, to je dohromady 8 súčtov. Záver: náš zjednodušený problém je neriešiteľný. Vráťme sa však k pôvodnému problému. Teraz môžeme úplne analogicky povedať, že i problém s tabuľkou 8×8 je **neriešiteľný**. Možných rôznych súčtov je 17, ale požadovaných súčtov v tabuľke je 18. Aj v škole by sme z času na čas mali zadávať problémy, ktoré sú neriešiteľné. Bude to dobrá príprava i pre mimomatematickú prax.

Problém teraz môžeme zovšeobecniť pre ľubovoľnú tabuľku $n\times n$. Je vidieť, že keď zadáme akúkoľvek takúto tabuľku a doplňované čísla sú stále 1, 0, -1, potom problém je neriešiteľný, sme totiž schopní z týchto čísel vytvoriť $2n + 1$ rôznych súčtov, ale problém ich vyžaduje $2n + 2$.

Čitateľ teraz môže vytvoriť ďalšie podobné problémy. O zmene veľkosti tabuľky sme už hovorili. Ako inak problém zmeniť? Napríklad tak, že znenie problému 2 ponecháme pôvodné, až na to, že doplňované čísla budú 2, 1, 0, -1. Riešenie tohto problému, prípadne vytvorenie ďalších podobných problémov, t. j. vytvorenie strapca, už prenecháme čitateľovi. Naším hlavným cieľom na predchádzajúcich riadkoch bolo ukázať, že aj jednoducho znejúci problém môže byť neriešiteľný.

Vyššie sme zistili, že problém 2 je neriešiteľný. To, že nenájdeme riešenie teda nie je spôsobené našou neschopnosťou. Aj s takouto situáciou sa môžeme pri riešení problémov občas stretnúť.

Ešte ukážme, že vzorce, ktoré objavíme, môžu byť niekedy prekvapivé a esteticky príjemné. Napr.:

$$
\begin{aligned}
&1\times9 + 2 = 11\\
&12\times9 + 3 = 111\\
&123\times9 + 4 = 1111\\
&1234\times9 + 5 = 11111\\
&12345\times9 + 6 = 111111\\
&123456\times9 + 7 = 1111111\\
&1234567\times9 + 8 = 11111111\\
&12345678\times9 + 9 = 111111111\\
&123456789\times9 + 10 = 1111111111
\end{aligned}
$$

ale aj $0\times9 + 1 = 1$

Žiaci a študenti si väčšinou myslia, že svet matematiky už bol vytvorený, že má svoje algoritmy a formuly. Myslia si, že v tomto svete už nie je miesto pre nové myšlienky, či inak povedané, že priemerný študent nemá šancu nejakú užitočnú myšlienku objaviť. Našťastie to tak nie je. Matematika je tvorivá ako umenie. **Aj žiaci a študenti všetkých stupňov škôl majú možnosť poznať tvorivý aspekt matematiky, pokiaľ sa s nimi matematika „robí dobre“.** Matematika by sa so žiakmi a študentmi v škole mala robiť tak, aby tento jej tvorivý aspekt vystúpil do popredia.

Ak chceme v škole žiakom ukázať, čo je to matematika, tak najlepším spôsobom je riešiť s nimi problémy. Tieto problémy by mali byť dostatočne zaujímavé, prijateľne náročné a ich riešenie by malo zodpovedať zvyklostiam v matematike.

Pozrime sa, akú úlohu hrajú problémy v „čistej“ matematike. Pred nejakým časom som si vypočul prednášku prof. Netuku. V tejto prednáške ukázal, ako sa Euler stal „cez noc“ slávnym, keď vyriešil (v roku 1734) tzv. Bazilejský problém, t. j. problém nájsť súčet radu $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots$ Zistil, že výsledok je $p^2/6$. Táto udalosť úzko súvisí s našou otázkou, ktorú si trochu upravíme. Z čoho pozostáva matematika? Sú to axiómy? Vety? Dôkazy? Pojmy? Definície? Teórie? Vzorce? Formuly? Metódy? Určité postupy? Umelé obraty? Samozrejme, bez týchto súčastí by matematika nemohla existovať. Hlavným dôvodom existencie matematiky sú však, podľa amerického matematika Paula Halmosa, problémy a ich riešenie. Riešenie niektorých veľkých problémov trvalo veľmi dlho a niektoré sú dosiaľ nevyriešené. Snaha o ich riešenie však vždy obohacovala matematiku. Uveďme ešte niektoré ďalšie slávne matematické problémy. Sú to napr.: Problém dokázateľnosti piateho Euklidovho postulátu (postulát o rovnobežkách), Problém štyroch farieb, Problém či je prvočíselných dvojčiat nekonečne mnoho, Problém dokázateľnosti veľkej Fermatovej vety. Tieto a ďalšie problémy motivovali matematikov k vynaloženiu mimoriadneho úsilia o ich vyriešenie. Z tejto poznámky je snáď jasne vidieť, že zo samotného charakteru matematiky vyplýva opodstatnenosť zadávania problémov (samozrejme úplne odlišnej náročnosti) a ich riešenia aj v škole.

Podľa profesora Vopěnku **„Ťažko možno nájsť inú činnosť, ktorá by svojimi, niekoľkými tisíckami rokov preverenými skúsenosťami, mohla byť účinnejšou pre rozvíjanie myslenia, abstrakcie, predstavivosti a schopností riešiť problémy, ako je pestovanie matematiky.** Napokon, práve matematické úlohy, menovite potom tie, ktoré zasahujú do iných odborov ľudskej činnosti, sú jedinečnou prípravou k uskutočňovaniu dnes tak nesmierne užitočnej matematizácie rôznych reálnych situácií.“

Teraz niekoľko slov k obsahu knihy:
V **Úvode** objasníme, čo rozumieme pod pojmom problém. V knihe sa zameriame predovšetkým na to, ako urobiť zo študenta lepšieho riešiteľa matematických problémov. To je tiež jeden z cieľov školskej matematiky. V druhej kapitole ukážeme niektoré dôležité **stratégie** riešenia problémov. Tieto stratégie sú vlastne nástroje, ktoré nám pomôžu problémy vyriešiť. Niektoré z týchto stratégií sa používajú v matematike i mimo nej, niektoré sú špecifické pre matematiku. Jednotlivé stratégie budeme demonštrovať na príkladoch využiteľných v školskej praxi. Pretože budeme pri svojej práci často vyslovovať hypotézy, ktoré je treba **dokázať**, bude kapitola 3 venovaná práve tejto problematike. Veľkú pozornosť budeme venovať dôkazu matematickou indukciou. Keď vyriešime problém, je to úspech, a mali by sme tento úspech využiť. Urobíme to tak, že tento problém „obalíme“ podobnými problémami, ktoré sa riešia analogicky. Do popredia tak vystúpi **metóda** riešenia. To je náplň kapitoly 4. V kapitole 5 budeme riešiť mnoho problémov, pričom tu vždy bude hrať nejakú úlohu **skúmanie**. Určitým vyvrcholením je kapitola 6, v ktorej budeme **skúmať matematické situácie**. Pri tomto skúmaní budeme problémy a hypotézy ešte len vytvárať. Potom ich budeme riešiť alebo dokazovať. Tato kapitola teda zhŕňa všetko, o čom sa hovorilo v kapitolách predchádzajúcich. V závere kapitoly budeme skúmať „najslávnejšiu“ matematickú postupnosť nazývanú Fibonacciho.

Matematika sa vyznačuje určitým charakteristickým správaním tých, ktorí ju tvoria a to už celé tisícročia. Veď dejiny matematiky sú vlastne dejinami ľudského myslenia. A túto skutočnosť, pokiaľ budeme matematiku učiť, musíme mať stále na mysli. Dokonca by sme snáď mohli povedať, že matematika je určitý spôsob správania sa a že príprava na toto správanie by mala byť podstatnou zložkou školskej matematiky a to od základnej školy (a možno i pred ňou) až po školu vysokú. A predovšetkým, učitelia matematiky by si túto skutočnosť mali uvedomovať a mali by ju realizovať pri výučbe. Toto charakteristické správanie by sme mali učiť budúcich učiteľov matematiky a mali by sme ho stále pripomínať aj učiteľom v praxi. Školská matematika teda musí zoznamovať študentov nielen so základmi určitých matematických teórií, ale musí ich tiež naučiť určitým spôsobom sa pri riešení matematických problémov správať. Ak budú naši žiaci a študenti lepšími riešiteľmi matematických problémov, budú isto lepšími riešiteľmi problémov všeobecne. Poteší nás, ak táto kniha aspoň trochu prispeje k tomu, čo sme práve napísali.

O ideách použitých v tejto knihe a o príkladoch, na ktorých sú demonštrované, som prednášal nielen učiteľskej verejnosti škôl druhého a tretieho stupňa, ale tiež kolegom na väčšine univerzít v Čechách a na Slovensku a tiež na niekoľkých univerzitách v Škandinávii, v západnej a strednej Európe a v USA. Všade tam sa tieto idey stretli s veľkým záujmom. Preto som ich spísal aj pre potreby školskej praxe a teraz vám ich, vážení kolegovia, predkladám. Bol by som veľmi rád, keby sa vám podarilo niečo z nich aplikovať i vo vašej praxi. Pretože mnohé z toho, čo je tu uvedené, bolo úspešne preverené v škole, je súvislý text niekde „narušený“ aj metodickými poznámkami. Kniha je však určená nielen vám, učiteľom najrôznejších druhov škôl, ale tiež vašim študentom, ktorí majú o riešenie matematických problémov záujem. Snáď by som mal hneď v tejto chvíli ešte poznamenať, že keď sa v texte hovorí o študentovi, mám tým na mysli nielen študenta strednej školy, ale aj žiaka druhého stupňa základnej školy (a niekedy i študenta vysokej školy – budúceho učiteľa matematiky).

Som veľmi rád, že kniha vyšla na Slovensku. Je to pre mňa veľká česť. Preto by som chcel na tomto mieste poďakovať všetkým, ktorí v podstatnej miere pomohli, aby sa jej text dostal do súčasného stavu. Celý ho veľmi dôkladne prečítali a prispeli k množstvu formálnych, ale aj matematických, vylepšení Mgr. Libuša Hozová, Mgr. Truda Kopková a RNDr. Zdenko Takáč, PhD. Posledný menovaný dokonca tvorivým spôsobom preložil celý český text do slovenského jazyka. Mnoho obrázkov vytvorili Mgr. Jiří Přibyl a Mgr. Tomáš Jančík. Obálku navrhol RNDr. Martin Papčo, PhD. Vytvorený slovenský preklad prečítal a obsahovo upravil prof. RNDr. Marián Trenkler, CSc. a po formálnej stránke text na vydanie pripravil Zdenko Takáč. Veľkú zásluhu na slovenskom vydaní má aj doc. PaedDr. Ján Gunčaga, PhD. Im, a všetkým ostatným, ktorí sa na príprave podieľali, ešte raz veľmi ďakujem.

Ústí nad Labem, 25.11.2009

Jan Kopka