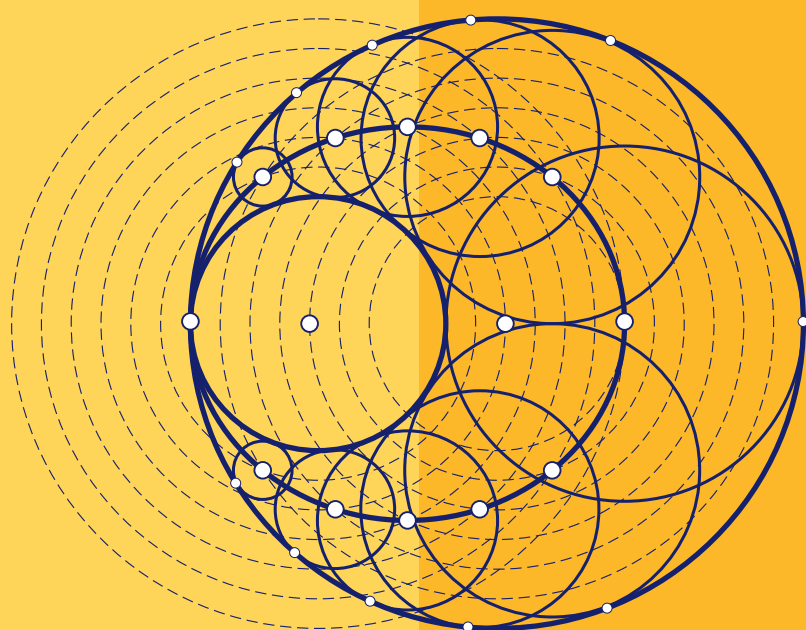


TEACHING MATHEMATICS

II

EDITOR

Martin Billich



**Innovation, new trends,
research**

**TEACHING MATHEMATICS II:
INNOVATION, NEW TRENDS,
RESEARCH**

The publication was published with the support of
the Catholic University in Ružomberok
Faculty of Education, Department of Mathematics

This volume is published thanks to the support of the grants
KEGA 3/7068/09 and GAPF 4/02/2010

SCIENTIFIC ISSUES

CATHOLIC UNIVERSITY IN RUŽOMBEROK

**TEACHING MATHEMATICS II:
INNOVATION, NEW TRENDS,
RESEARCH**

MARTIN BILICH



RUŽOMBEROK 2010

TEACHING MATHEMATICS II, Scientific Issues

Editor

Martin BILLICH

Editorial Board

Marián TRENKLER, Roman FRIČ
Juraj BUTAŠ, Ján GUNČAGA
Štefan TKAČIK, Nadežda STOLLÁROVÁ
Eduard BUBLINEC, Juraj SLABEYCIUS
Danica MELICHERČÍKOVÁ, Pavel BELLA
Branislav NIŽNANSKÝ, Peter TOMČÍK
Peter KUBATKA, Milan LEHOTSKÝ
Igor ČERNÁK, Pavol ČIČMANEC

Reviewers

Roman FRIČ, Ján GUNČAGA
Ján OHRISKA

Typesetting by L^AT_EX

Martin BILLICH

Graphical Project of a Cover

Martin PAPČO

© VERBUM - Catholic University in Ružomberok Press, 2010
Place Andrej Hlinka 60, 034 01 Ružomberok
<http://ku.sk>, verbum@ku.sk, Phone: +421 44 4304693

ISBN 978-80-8084-645-9

CONTENTS

Billich Martin. Zobrazenia zachovávajúce geometrické útvary . . .	9
Brincková Jaroslava. Rozvoj kombinatorického myslenia žiakov ZŠ	13
Gunčaga Ján. Pohľad do niektorých teórií matematického vzdelávania	19
Chlapečková Katarína. Popis výskumu zameraného na vyučovanie matematiky pomocou počítačovej geometrie na 2. stupni ZŠ .	31
Kafková Marika. Interaktívni tabule v hodinách kombinatoriky . .	43
Kolková Mária. Objavovanie štruktúry pravdepodobnostných úloh u žiakov	49
Kopka Jan, Frobisher Leonard, Feissner George. Conjecturing: An Investigation Involving Positive Integers	59
Koreňová Lilla. Digitálna podpora vyučovania matematiky na strednej odbornej škole	69
Kovács András. On J -conic sections	81
Major Joanna. Refleksje nad wykorzystywaniem wiedzy szkolnej do rozwiązywania zadań matematycznych	89
Major Maciej. Losowe gry hazardowe a proces decyzyjny	101
Palenčárová Daša. Vplyv implicitných kombinatorických modelov na kombinatorické myslenie	115
Partová Edita. Premena interaktívnej tabule z hračky na efektívnu učebnú pomôcku pre vyučovanie matematiky.	123
Pócsová Jana, Katreničová Ivana. Vedomosti študentov zo štatistiky po ukončení strednej školy	131
Polomčáková Anna. Kľúčové kompetencie a diskrétna matematika	141
Powążka Zbigniew. Examples of introducing chosen concepts of mathematical analysis	149
Ratusiński Tadeusz. Examples of using ICT for forming reductive reasoning at school	155

Rusnáková Eva. Tvorba školského vzdelávacieho programu a ďalšie vzdelávanie učiteľov matematiky	163
Šulista Marek. Language Aspects of the Initial Phase of the CLIL Method Implementation into Mathematics Lessons at Lower Secondary Level	167
Takács István Árpád. ICT Support in Mathematics	173
Tkačík Štefan. Historické poznámky o metódach integrovania . . .	179
Tomková Erika. GEOGEBRA na 2. stupni ZŠ	191
Vankúš Peter, Kubicová Emília. Vplyvy učiteľa na postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike	199

PREFACE

The greatest challenge in writing a scientific text for mathematics teachers or for prospective teachers of mathematics is to create a proper balance between pedagogical concerns and concerns of a theoretical and abstract nature. This text focuses on content and emphasizes mathematical processes used in information and communication technologies, models, problem solving, and reasoning. These processes accomplish three objectives: assist college students in understanding mathematical concepts; help students make connections and remember ideas and concepts; and provide ideas and models for teaching mathematics to children at all school grade levels from primary to secondary levels.

The second volume of *Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research* continues to place emphasis on the presentation of new results from all fields related to teaching mathematics. The authors of each individual text come from Slovakia, Czech Republic, Poland, Hungary, and the United States of America or from Great Britain. This volume of 23 texts presents the authors' theoretical and practical approaches in mathematics education, and current topics in the teaching of mathematics (including geometry, discrete mathematics, history of mathematics, combinatorics, statistics and probability). Several contributions are relevant to actual problems of mathematics in state education programmes ISCED 1, 2, and 3.

The primary objective of *Teaching Mathematics II: Innovation, New Trends, Research* is to present mathematics in a format that prepares teachers to teach school mathematics and discover the beauty of mathematics.

Martin Billich

ZOBRAZENIA ZACHOVÁVAJÚCE GEOMETRICKÉ ÚTVARY

Martin Billich

*Katedra matematiky
Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku
Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
e-mail: billich@ku.sk*

Abstract. We deal with mappings preserving some geometrical figures. We provide the result concerning a mappings preserving squares in $\mathbb{R}^2$, that is we show that if one-to-one mapping f of Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ maps every square with side length one onto a square with unit-side, then f is an isometry.

Nech X, Y sú dva metrické priestory a d_1, d_2 zodpovedajúce metriky pre X, Y v danom poradí. Bijektívne zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ (X na Y) určuje *izometriu*, ak pre všetky $x, y \in X$ platí

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

Naviac, inverzné zobrazenie $f^{-1} : Y \rightarrow X$ k izometrii f je taktiež izometria (Y na X). Ak existuje izometria X na Y , tak metrické priestory X a Y nazveme *izometrickými*.

Široký okruh problémov vzniká pri charakterizácii zobrazení, ktoré zachovávajú danú vzdialenosť, resp. či z existencie jednej vzdialenosti, ktorá sa zachováva v zobrazení napr. metrických priestorov vyplýva, že dané zobrazenie je izometriou. Tento problém ako prvý sformuloval ruský matematik A. D. Alexandrov, z čoho je odvodené jeho pomenovanie ako *Alexandrovov problém*. F. S. Beckman a D. A. Quarles v roku 1953 vo svojej práci *On isometries of Euclidean Spaces* [1] dokázali, že ak zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($2 \leq n < \infty$) zachováva *vzdialenosť* $\rho > 0$, tak f je lineárnou izometriou (odhliadnuc od posúvania).¹

Na tomto mieste si môžeme položiť otázku, či daná veta zostane v platnosti, ak "*vzdialenosť* $\rho > 0$ " nahradíme istou vlastnosťou, ktorá charakterizuje *geometrické útvary* daného priestoru.

¹ Izometria $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa nazýva lineárna izometria (odhliadnuc od posúvania), ak existuje bod $w \in \mathbb{R}^n$ tak, že zobrazenie $I(x) - w$ je lineárne.

V práci [3] Jung dokázal, že ak injektívne zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) zobrazuje rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky a na rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky b , existuje lineárna izometria $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (odhliadnuc od posúvania), pre ktorú platí: $f(x) = (b/a)I(x)$. Okrem toho tento autor dokázal, že rovnostranné trojuholníky možno v predchádzajúcom tvrdení nahradiť štvorcami alebo pravidelnými 5-, resp. 6-uholníkmi (pozri tiež [3], [4]).

O niečo neskôr Jung a Kim [5] dokázali, že ak injektívne zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) zachováva jednotkové kružnice (t.j. kružnicu s jednotkovým polomerom zobrazuje na kružnicu s jednotkovým polomerom), tak f je izometria.

V súlade z uvedeným tvrdením Junga sa budeme ďalej zaoberať zobrazením, ktoré zachováva štvorce v rovine $\mathbb{R}^2$.

Pod štvorcom $\mathcal{S}$ budeme rozumieť uzavretú lomenú čiaru so štyrmi stranami (v rovine), ktorej každá strana má dĺžku 1. Časť roviny, ktorú ohraničuje táto lomená čiara (štyri strany štvorca), je dvojrozmerná otvorená množina, ktorú nazývame *vnútro* daného štvorca, a označíme $Int \mathcal{S}$.

Uvažujme ľubovoľný bod a , ktorý leží na jednej zo strán daného štvorca $\mathcal{S}$. Nech tento bod je vrcholom uhla, ktorý obsahuje všetky body štvorca $\mathcal{S}$. Ak bod a je súčasne aj vrcholom daného štvorca, veľkosť tohto uhla sa rovná $\frac{1}{2}\pi$. Ak a nie je jeho vrchol, ale leží na jednej z jeho strán, veľkosť uhla s vrcholom v bode a sa rovná π . Nech teraz $a \in Int \mathcal{S}$. Potom veľkosť uhla s vrcholom v bode a , v ktorom ležia všetky body štvorca $\mathcal{S}$, sa rovná 2π . Označme veľkosť tohto uhla $\varphi(a, \mathcal{S})$. Potom pre každé $a \in \mathcal{S}$ platí:

- (1) $\varphi(a, \mathcal{S}) = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow a$ je vrchol štvorca $\mathcal{S}$;
- (2) $\varphi(a, \mathcal{S}) = \pi \Rightarrow a$ je bodom strany štvorca $\mathcal{S}$, rôzny od vrcholu;
- (3) $\varphi(a, \mathcal{S}) = 2\pi \Rightarrow a \notin \mathcal{S} \wedge a \notin Int \mathcal{S}$ je vrchol štvorca $\mathcal{S}$.

Teraz dokážeme nasledujúcu lemu.

Lema 1. *Nech injektívne zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zobrazuje každý štvorec na štvorec. Potom pre ľubovoľné dva štvorce $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ roviny $\mathbb{R}^2$ platí*

$$Int \mathcal{S}_1 \cap Int \mathcal{S}_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad Int f(\mathcal{S}_1) \cap Int f(\mathcal{S}_2) = \emptyset$$

Dôkaz. Najskôr dokážeme, že ak $a \notin Int \mathcal{S}_1$, tak $f(a) \notin Int f(\mathcal{S}_1)$. Inými slovami ukážeme, že z $f(a) \in Int f(\mathcal{S}_1)$ vyplýva $a \in Int \mathcal{S}_1$. Predpokladajme, že $a \in \mathcal{S}_1$. Potom $f(a) \in f(\mathcal{S}_1)$, a teda $f(a) \notin Int f(\mathcal{S}_1)$. Nech teraz $a \notin Int \mathcal{S}_1$ a zároveň $a \notin \mathcal{S}_1$. Potom si zvolíme taký štvorec $\mathcal{S}_2$, že $a \in \mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$. Teda $f(\mathcal{S}_1) \cap f(\mathcal{S}_2) = \emptyset$, a preto $f(a) \notin Int f(\mathcal{S}_1)$.

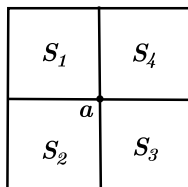
Ďalej, nech $\text{Int } f(\mathcal{S}_1) \cap \text{Int } f(\mathcal{S}_2) \neq \emptyset$. Potom $\text{Int } f(\mathcal{S}_1) \cap f(\mathcal{S}_2) \neq \emptyset$, čo znamená, že existuje $b \in \mathcal{S}_2$, pre ktorý $f(b) \in \text{Int } f(\mathcal{S}_1)$. Preto $b \in \text{Int } \mathcal{S}_1$ a zároveň $\text{Int } \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$, z čoho vyplýva, že $\text{Int } \mathcal{S}_1 \cap \text{Int } \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$

□

Teraz už môžeme dokázať, že ak injektívne zobrazenie zachováva štvorce, tak je izometriou. Presnejšie, dostávame nasledujúcu vetu.

Veta 1. Ak injektívne zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zobrazuje každý štvorec s jednotkovou dĺžkou strany na štvorec s dĺžkou strany 1, tak f je izometria.

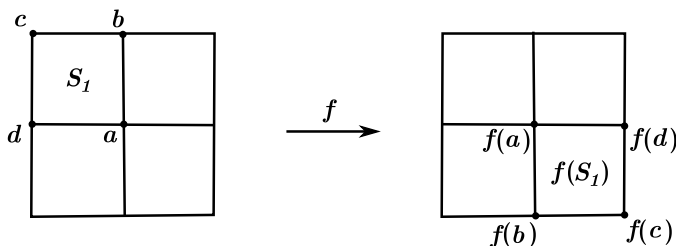
Dôkaz. Ukážeme, že zobrazenia f zachováva vzdialenosť $\sqrt{2}$. Nech bod a je vrchol štvorca $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$. Potom môžeme zostrojiť ďalšie tri štvorce $\mathcal{S}_i$ ($i = 2, 3, 4$) komplanárne so štvorcem $\mathcal{S}_1$ tak, že a je spoločným vrcholom štvorcov $\mathcal{S}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), pričom $\text{Int } \mathcal{S}_i \cap \text{Int } \mathcal{S}_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ (obr. 1).



Obr. 1

Potom $f(a)$ je bodom štvorca $f(\mathcal{S}_i)$ pre ($i = 1, 2, 3, 4$) a podľa predchádzajúcej lemy je $\text{Int } f(\mathcal{S}_i) \cap \text{Int } f(\mathcal{S}_j) = \emptyset$ pre $i \neq j$. Je zrejmé, že veľkosť uhla s vrcholom v bode $f(a)$ vzhľadom na štvorec $f(\mathcal{S}_i)$ sa pre každé $i \in \{1, \dots, 4\}$ rovná aspoň $\frac{1}{2}\pi$, t. j. $\varphi(f(a), f(\mathcal{S}_i)) \geq \frac{1}{2}\pi$. Pretože najväčší rovinný uhol s vrcholom v bode $f(a)$ má veľkosť 2π (plný uhol), platí $\varphi(f(a), f(\mathcal{S}_i)) = \frac{1}{2}\pi$, a teda $f(a)$ je vrcholom štvorca $f(\mathcal{S}_i)$ pre každé $i \in \{1, \dots, 4\}$. Týmto sme dokázali, že ľubovoľný vrchol štvorca $\mathcal{S}$ sa v zobrazení f zobrazí na vrchol štvorca $f(\mathcal{S})$.

Uvažujme nesusedné vrcholy a, c štvorca $\mathcal{S}_1$, ktorých vzájomná vzdialenosť sa rovná $\sqrt{2}$. Pomocou vyššie opísanej konštrukcie zostrojíme štvorce $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky (obr. 2).



Obr. 2

- (a) $\text{Int } \mathcal{S}_i \cap \text{Int } \mathcal{S}_j = \emptyset$;
- (b) bod a je spoločným vrcholom štvorcov $\mathcal{S}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$);
- (c) každý štvorec $\mathcal{S}_i$ má práve dva vrcholy (napr. b, d pre $\mathcal{S}_1$), z ktorých každý je spoločným bodom práve dvoch štvorcov, so vzdialenosťou 1 od bodu a ;
- (d) každý štvorec $\mathcal{S}_i$ má práve jeden vrchol (napr. c v $\mathcal{S}_1$), ktorý patrí iba jednému zo štvorcov $\mathcal{S}_i$ a má vzdialenosť $\sqrt{2}$ od bodu a .

Z lemy 1 vyplýva, že $\text{Int } f(\mathcal{S}_i) \cap \text{Int } f(\mathcal{S}_j) = \emptyset$ pre $i \neq j$ a $f(a)$ je spoločným vrcholom štvorcov $f(\mathcal{S}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Každý zo štvorcov $f(\mathcal{S}_i)$ má práve dva vrcholy, ktoré sú spoločnými vrcholmi práve dvoch štvorcov a ich vzdialenosť od $f(a)$ sa rovná práve 1. Nakoniec, každý štvorec $f(\mathcal{S}_i)$ má práve jeden vrchol, ktorý patrí iba jednému štvorcu $f(\mathcal{S}_i)$ a jeho vzdialenosť od $f(a)$ sa rovná $\sqrt{2}$. Dostávame teda, že obrazmi bodov a, c so vzájomnou vzdialenosťou $\sqrt{2}$ je v zobrazení f dvojica bodov $f(a), f(c)$ so vzájomnou vzdialenosťou $\sqrt{2}$. Na základe vety Beckmana-Quarla máme výsledok, že f je izometria.

□

Všetky postupy uvedené v tomto článku možno aplikovať okrem štvorcov aj na rovnostranné trojuholníky, či pravidelné šesťuholníky.

Literatúra

- [1] Beckman, F. S. - Quarles, D. A. *On isometries of Euclidean spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 810 - 815
- [2] Billich, M. *Transformation preserving unit distance*. Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis 5, 11–15, 2001.
- [3] Jung, S.-M. *Mappings preserving some geometrical figures*, Acta. Math. Hungar. 100 (2003), 167 - 175.
- [4] Jung, S.-M. *On mappings preserving pentagons*, Acta. Math. Hungar. 110 (2006), 261 - 266.
- [5] Jung, S.-M. - Kim, B. *Unit-circle preserving mappings*, Intern. J. Math. Math. Sci. 2004:66 (2004), 3577 - 3586.
- [6] Rassias, Th. M.: *Isometric mappings and the problem of A.D. Aleksandrov for conservative distance*. Proc. Intern. Graz Workshop, World Scientific, Singapore 118 - 125, 2001.

ROZVOJ KOMBINATORICKÉHO MYSLENIA ŽIAKOV ZŠ

Jaroslava Brincková

*Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici
Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
e-mail: jbrinckova@gmail.com*

Abstract. It is very difficult to discover organisation principle in choosing elements from a base set during solving combinatorial problems with pupils at primary schools from methodical point of view. A teacher is able to create adequate application problems if he knows individual types of intelligence of his pupils. He teaches them to discover strategies of solving combinatorial problems. This article deals with various views on teaching interesting combinatorial problems.

1. Úvod

Súčasťou cieľov vzdelávania, deklarovaných v novom Štátnom vzdelávacom programe (ŠtVP) je potreba vypestovať u žiakov zodpovednosť za vlastné učenie sa. Poskytnúť im *príležitosti objaviť a rozvinúť ich schopnosti v súlade s ich reálnymi možnosťami* tak, aby získali podklad pre optimálne rozhodovanie sa o ďalšom - vyššom vzdelávaní. Východiskovým bodom pri získavaní nových vedomostí a ďalšom rozvoji kompetencií žiakov sú aktuálne znalosti žiakov a ich uplatňovanie v praxi.² Dosiahnutiu tohto cieľa napomáha dobrá metodická spôsobilosť učiteľa vyučovať matematiku.

Ako vyplynulo z výsledkov riešenia matematických úloh v projekte PISA 2006, sú časti matematiky, ktorým sa v učive matematiky na ZŠ doposiaľ nevenovala patričná pozornosť. Vzhľadom na význam v praxi je to hlavne **oblasť náhodnosti** (*pravdepodobnosť a štatistika*) a **diskrétna matematika** (do ktorej patrí *kombinatorika*). V novom ŠtVP je cieľom vyučovania kombinatoriky a náhodnosti naučiť žiakov systematicky vypisovať možnosti a zisťovať ich počet, čítať a tvoriť grafy, diagramy a tabuľky dát, rozumieť bežným pravdepodobnostným a štatistickým vyjadreniam.

²Brincková, J.: *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy*. Tvorivá práca učiteľa. Banská Bystrica: UMB 2010, s. 36.

Kombinatorické úlohy sú vo väčšine prípadov formulované ako slovné úlohy, ktoré sa tradične riešia postupnou matematizáciou. Nácvik algoritmu riešenia slovných úloh žiakom si vyžaduje postupné dodržiavanie piatich krokov: *rozbor a zápis - grafické znázornenie - matematizácia - skúška správnosti - slovná odpoveď*. Vyžaduje si schopnosť žiaka čítať s porozumením. Vymedziť objekty a vzťahy medzi nimi tak, aby sa dali matematizovať.

Pri riešení kombinatorických úloh pracujeme so *základnou skupinou prvkov, organizačným princípom výberu podskupín a vytvorenými podskupinami*. Z metodického hľadiska je najnáročnejšie objavovanie organizačného princípu výberu prvkov zo základnej skupiny. V rozbere textu kombinatorickej úlohy učiteľ vedie žiakov k preformulovaniu textu tak, aby si zjednotili predstavy a sa stali citliví na slovo *skupina, podskupina, usporiadanie prvkov v podskupine, opakovanie prvkov, rôznosť podskupín*. Učí ich objavovať stratégie riešenia kombinatorických úloh. Ak učiteľ pozná individuálne typy inteligencie svojich žiakov, vie pre nich zostaviť primerané aplikačné úlohy, vybrať znaky a spôsob kódovania textu do jazyka matematiky.

2. Znakové systémy v kombinatorike ZŠ

Pri riešení matematických úloh v školskom prostredí vo väčšine prípadov, či už ako hlavný alebo vedľajší prostriedok k dosiahnutiu cieľa, sa využíva jedna zo semiotických metód - **formalizácia**. Tá spočíva podľa J. Černého³ v tom, že nahrádzame znaky prirodzeného jazyka inými znakmi, tz. symbolmi, ktoré nám umožňujú ponechať stranou sémantickú interpretáciu a pragmatickú stránku jednotlivých znakov a sústrediť sa na ich konštrukčnú schému, či na ich štruktúru. Proces formalizácie je sprevádzaný abstrahovaním, to značí, že isté hľadiská vytiahneme, sústredíme na ne náš záujem, iné hľadiská si nevšímame, abstrahujeme od nich.⁴ Výsledkom formalizácie sú grafické formy prezentácie ako napríklad zoznamy, tabuľky, grafy, histograme, náčrty, piktogramy a podobne. Tieto sú opäť tvorené množstvom znakov a ako celok tvoria znakový systém. Ku geometrickému znaku sa priraduje *termín - pojem*, ktorého význam charakterizuje to, k akému okruhu javov sa vzťahuje, aký okruh javov je v ňom zovšeobecnený. Obe zložky predstavujú bilaterálnosť znaku a sú spolu neoddeliteľne spojené.⁵ Schematické označenie komunikačného toku podľa V. Voigta⁶ od podania až po zápis informácie, môžeme teda upraviť:

³Černý, J., & Holeš, J. (2004). *Sémiotika*. Praha: Portál. 2004.

⁴Fischer, R., Malle, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN. 1992

⁵Brincková, J.: *Klarifikácia pojmu obvod pri prechode žiakov z prvého na druhý stupeň ZŠ a v príprave učiteľov matematiky*. Banská Bystrica: PF UMB 2003. s. 140.

⁶Voigt, V. (1977). *Úvod do semiotiky*. Bratislava: Tatran, 1981.

expedient → *kódovanie* → *komunikát* → *dekódovanie* →
→ *percipient* → ***kódovanie***

Medzi znakom a tým, čo je označované, môžu byť rôzne vzťahy. Ak je to vzťah podobnosti alebo logickej súvislosti, hovoríme o "*motivovanom znaku*". V prípade, keď je vzťah čisto náhodný, sa ujal podľa J. Černého termín "*konvenčný*" alebo tiež "arbitrárny znak". Odlíšenie konvenčného a motivovaného znaku prezentujeme pri ***vypisovaní všetkých možností*** v nasledujúcej úlohe:

Úloha 1: *V trojčlennej rodine je otec, matka a syn. Neodchádzajú ráno z domu spoločne, ale každý sám. Nájdite a napíšte všetky možné poradia odchodu.*

Riešenie: Pri riešení budeme používať znaky **a** (otec), **b** (matka), **c** (syn). Pretože medzi obsahom a formou znaku neexistuje logická súvislosť, ale ide o dohodu, znaky považujeme za konvenčné. Všetky možné poradia odchodu sú uvedené v tomto prehľade:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

Proces kódovania objektov vo vedomí žiaka je ovplyvnený dominantným typom inteligencie žiaka.⁷ Učiteľ by ju mal poznať, aby vhodnou variáciou úlohy umožnil žiakovi pochopiť vzťahy medzi znakmi a objaviť matematický princíp riešenia úlohy - permutáciu.

Riešme uvedenú úlohu v diferencovaných skupinách žiakov.

1. Žiak s rozvinutejšou jazykovou inteligenciou si ľahšie pamätá písmená a slová. Ktorý typ kódovania umožní ľahšie objaviť permutáciu medzi tromi objektmi? Sú to začiatkové písmená použitého slova alebo písmená usporiadané podľa abecedy?

Budeme používať znaky **o** (otec), **m** (matka), **s** (syn) a znaky **a**-(otec), **b**-(matka), **c**-(syn). Potom dostaneme inú rovnako početnú skupinu znakov.

abc	bac	cab	oms	mos	som
acb	bca	cba	osm	mso	smo

2. Žiak s rozvinutejšou formou logicko-matematickej inteligencie je citlivejší na čísla a ich usporiadanie. Preto budeme používať číselné znaky **1** (otec), **2** (matka), **3** (syn)

123	213	312
132	231	321

3. Pre žiaka s rozvinutejšou priestorovou inteligenciou použijeme napríklad rôznofarebné zhodné štvorce. Farba modrá-(otec), červená-(matka), biela-(syn).

⁷Gardner, H.: *Dimenze myslenia*. Praha: Portál 2000.



4. Pre žiakov preferujúcich formu hudobnej inteligencie budeme hrať postupne tri zvuky základnej hudobnej stupnice:

cde dce ecd
ced dec edc

3. Motivované znaky v kombinatorike

Grafickým riešením úlohy 1 je **tabuľka** 1, v ktorej je badateľná logická súvislosť. Preto hovoríme o **motivovanom znaku**, v tomto prípade o motivovanom znakovom systéme.⁸

poradie/skup.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I. miesto	a	a	b	b	c	c
II. miesto	b	c	a	c	a	b
III. miesto	c	b	c	a	b	a

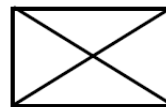
Tabuľka 1: Riešenie úlohy 1

Takéto znázornenia abstraktného stavu vecí rozširuje naše možnosti úvah o vplyve grafického znázorňovania pri kódovaní a dekódovaní riešenia úlohy kombinatorickej úlohy.

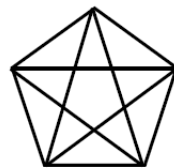
Úloha 2: V školskej súťaži Matematické pereso sa zúčastnili 4 dievčatá a 5 chlapcov. Najprv zohrali samostatne dievčatá a samostatne chlapci po jednej partii každý s každým v skupine. Potom hrali finálovú partiu víťazi oboch skupín. Koľko partií sa spolu odohralo na turnaji?

Riešenie: Odohraté partie znázornené tabuľkou - znázornenie grafom

hráčka	D1	D2	D3	D4
D1	x			
D2	1	x		
D3	1	1	x	
D4	1	1	1	x



hráč	ch1	ch2	ch3	ch4	ch5
ch1	x				
ch2	1	x			
ch3	1	1	x		
ch4	1	1	1	x	
ch5	1	1	1	1	x



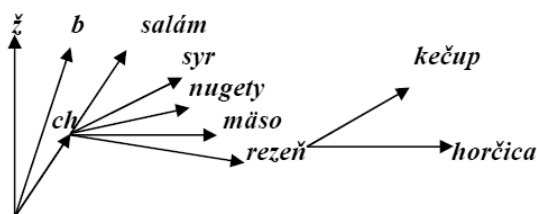
1 - víťazné dievča a víťazný chlapec

D Ch

⁸Brincková, J., Targoš, Š.: *Matematické úlohy v znakových systémoch*. In: Elektronická konferencia. Ústí nad Labem: PF UJEP 2009.

Úloha 3: V stánku predávajú rýchle občerstvenie. Môžete si vybrať obloženú žemľu, bagetu alebo chlebič. Ako príloha je na výber jedna z možností: saláma, syr, kuracie nugety, pečené mäso, rezeň. Na oblohu sa pridáva horčica alebo kečup. Koľko rôznych občerstvení môžu ponúknuť v stánku?

Riešenie: Pomocou modelu strom kreslíme jednotlivé vetvy. Tento model je najoptimálnejší pre demonštráciu kombinatorického pravidla súčtu a pravidla súčinu.



možnosti...35.....2...

všetky možnosti: $3 \times 5 \times 2 = 30$

Pri skúmaní semiotických reprezentácií v kombinatorike je zaujímavou aj otázka vplyvu frekvencie použitia abecedy, číselného radu a grafov v školskej praxi na schopnosť odlíšiť usporiadanú trojicu, prípadne šesticu. Náčrtmi, diagramami, ale aj symbolickým znázorneniami pridáme na nové myšlienky, posúvame v procese riešenia problém vpred. Nemusíme si všetko držať v hlave, časť nášho myšlienkového postupu sa vyjaví.⁹ Použitie rôznych semiotických reprezentácií pri riešení jednej úlohy rozvíja tvorivý potenciál a schopnosť žiaka riešiť aplikačné úlohy v praxi.

V školskom prostredí sa dajú zaviesť aj niektoré pojmy z oblasti náhodnosti pomocou grafických prostriedkov pri riešení aplikačných úloh. Príkladom je zavedenie pojmov stromový graf, sčítacia čiarka, štatistický súbor, štatistická jednotka, udalosť, používané v učebniciach O. Šedivý a kol. (1999, 2001, 2002). Pri zbere a triedení štatistických údajov podľa danej funkcie môžeme použiť v evidencii pre tú istú štatistickú jednotku rôzne znaky:

- prirodzene vyplynú z jazyka: A - áno, N- nie,
- umelé znaky: + áno, - nie
- matematické - binárne kódovanie: 1 - áno, 0 - nie.

Úlohou učiteľa je poukázať na ich diferencované použitie pri strojovom spracovaní údajov.

4. Záver

Učivo o kombinatorike a náhodnosti je v školskej praxi málo obľúbené. Tento poznatok vyplynul z ankety medzi 37 učiteľmi - študentmi rozširu-

⁹Fischer, R., Malle, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN. 1992.

júceho štúdia matematiky, v ktorej zo štrnástich vyučovacích okruhov školskej matematiky zaradilo 86,49% respondentov túto problematiku na posledné miesto v obľúbenosti výučby. Učitelia vnímajú toto učivo ako veľmi separované, nenadväzujúce na ostatné oblasti matematiky, dotované malým počtom vyučovacích hodín, ktoré nestačia na jeho osvojenie. Na 2. stupni ZŠ už nie sú žiaci vedení ku grafickému znázorňovaniu objektov a vzťahov v slovných úlohách, čo má vplyv na malú schopnosť priemerných žiakov čítať grafické a tvoriť ich. Podľa výskumov I. Scholtzovej¹⁰ "... len málokedy má žiak možnosť sám vytvoriť úlohu. Proces tvorby matematickej úlohy mu teda zostáva utajený. Aspoň niekedy by bolo vhodné ponúknuť žiakom aj také podklady, aby sami zostavili jednoduché úlohy, pri tvorbe ktorých by uplatnili kombinatorický prístup." Poznanie rôznych spôsobov semiotických reprezentácií a ich aplikácia napríklad pri tvorbe šifrovaných úloh s kombinatorickou tematikou je vhodnou motiváciou na ich riešenie u žiakov 2. stupňa ZŠ a nie len ich.

Literatúra

- [1] Brincková, J.: *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy*. Tvorivá práca učiteľa. Banská Bystrica: UMB 2010, s. 36.
- [2] Brincková, J.: *Klarifikácia pojmu obvod pri prechode žiakov z prvého na druhý stupeň ZŠ a v príprave učiteľov matematiky*. Banská Bystrica: PF UMB, 2003. s. 140 (Habilitačná práca)
- [3] Brincková, J., Targoš, Š.: *Matematické úlohy v znakových systémoch*. In: Elektronická konferencia. Ústí nad Labem: PF UJEP 2009.
- [4] Černý, J., & Holeš, J. (2004). *Sémiotika*. Praha: Portál. 2004.
- [5] Fischer, R., Malle, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN. 1992.
- [6] Gardner, H.: *Dimenze myšlení*. Praha: Portál 2000
- [7] Scholtzová, I.: *Elementy riešenia úloh z kombinatoriky*. In: Matematika v škole dnes zajtra. Ružomberok: PF KU 2003, s. 6.
- [8] Voigt, V. (1977). *Úvod do semiotiky*. Bratislava: Tatran. 1981.
<http://ii.fmph.uniba.sk/filit/fvv/vzorec.html>

¹⁰Scholtzová, I.: *Elementy riešenia úloh z kombinatoriky*. In: Matematika v škole dnes zajtra. Ružomberok: PF KU 2003, s.6

POHĽAD DO NIEKTORÝCH TEÓRIÍ MATEMATICKÉHO VZDELÁVANIA

Ján Gunčaga

*Katedra matematiky
Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku
Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
e-mail: jan.guncaga@ku.sk*

Abstract. In this article we present some theoretical approaches in mathematics education especially in Poland and Hungary with practical examples. We describe also some aspects of using ICT in mathematics education.

1. Úvod

Didaktika matematiky je pomerne mladý vedný odbor, ktorý si ešte stále hľadá svoje miesto v sústave vedných odborov. Podľa Szendrei (2005) je didaktika matematiky špecifická vedecká a výskumná oblasť, ktorá sa zaoberá danými aktuálnymi otázkami vyučovania matematiky, porozumením, definovaním a charakterizovaním matematických pojmov, ktoré sú používané vo vyučovacom procese. To znamená objavovať mechanizmy a kauzálne vzťahy vo vyučovaní, ktoré pôsobia na dané školské situácie. Didaktika matematiky sa pokúša odpovedať na otázky, ktoré sú relevantné pre učenie sa a vyučovanie matematiky. Veľa otázok súvisí aj s inými vednými odbormi napríklad psychológiou, pedagogikou, sociológiou, filozofiou atď. Preto môžeme v didaktike matematiky využívať metódy a výsledky iných vedných odborov.

Výskumné metódy didaktiky matematiky sú teoretické a empirické. Sú zacielené na zlepšenie schopností a zručností žiakov vo vyučovaní matematiky. Szendrei formuluje nasledovné témy, resp. ciele pre výskum v didaktike matematiky:

- teoretické pozadie učenia sa a vyučovania matematiky,
- konštrukcia a štruktúra matematiky a ich pôsobenie na poznávací proces vo vyučovaní matematiky,
- ťažkosti poznávacieho procesu vo vyučovaní matematiky,

- vyučovanie matematiky ako kognitívny proces,
- heuristika a objavovanie ako prostriedky pojmového a procesného vzdelávania,
- vzťahy medzi matematikou, kultúrou a spoločnosťou,
- sociálne procesy pri učení sa a vyučovaní matematiky,
- správanie, postoje a presvedčenia učiteľov a žiakov vo vyučovaní matematiky,
- moderné technológie, ich možnosti a hranice vo vyučovaní matematiky.

2. Pohľad Tamása Vargu

Varga Tamás (2001) sa snažil vo svojej vedeckej práci nájsť prepojenie medzi čistou matematikou a vyučovaním matematiky. Hľadal vhodné modely, pomocou ktorých by žiakom mohol vysvetliť teóriu množín, relácie, funkcie a logiku. V minulosti boli aritmetické a geometrické modely vo vyučovacom procese izolované, preto sa Varga snažil o komplexný prístup pri budovaní pojmov vo vyučovaní. V procese abstrakcie kládol dôraz na vzájomné prepojenie nových vyučovaných pojmov a ich začlenenie do existujúcej poznatkovej štruktúry žiaka. Odporúčal riešiť otvorené problémy, pri ktorých žiak sám hľadá vhodný matematický model, ktorý by mu pomohol riešiť úlohu. Vyučovací proces musí byť založený na vnútornej motivácii žiaka, ktorú možno dosiahnuť pomocou vhodných motivačných prostriedkov (hra, problémy reálneho života, využitie histórie matematiky).

Pálfalvi (2007) uvádza jeden príklad Tamása Vargu z teórie pravdepodobnosti:

Dané sú štyri kocky s nasledovným označením stien:

I: 3, 3, 3, 3, 3, 3

II: 0, 0, 4, 4, 4, 4

III: 1, 1, 1, 5, 5, 5

IV: 2, 2, 2, 2, 6, 6

Nech teraz dvaja hráči hrajú hru, že vyhráva ten, ktorý hodí väčšie číslo. Pre dvojice uvedených kociek šance na výhru znázorníme nasledovnými diagramami:

III.

	1	1	1	5	5	5
3						
3						
3						
3						
3						
3						

III.

	1	1	1	5	5	5
0						
0						
4						
4						
4						
4						

III.

	1	1	1	5	5	5
2						
2						
2						
2						
6						
6						

II.

	0	0	4	4	4	4
3						
3						
3						
3						
3						
3						

IV.

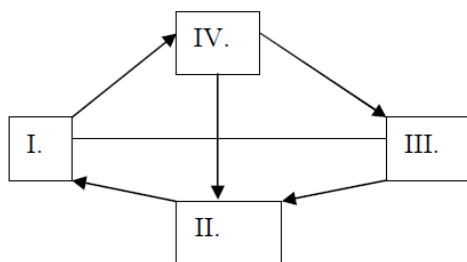
	2	2	2	2	6	6
3						
3						
3						
3						
3						
3						

II.

	0	0	4	4	4	4
2						
2						
2						
2						
2						
6						
6						

Obt. 1

Sivou farbou sú vyznačené prípady, keď vyhráva hráč, ktorý hrá kockou, ktorej hodnoty stien sú v stĺpcoch tabuľky. Z tabuliek vidno, že II. kocka by mala byť "lepšia" ako I., I. kocka by mala byť "lepšia" ako IV. Mohlo by sa zdať, že potom II. kocka by mala byť "lepšia" ako IV., ak by platila tranzitívnosť v relácii medzi kockami. Lenže posledná tabuľka ukazuje, že je to presne naopak. Ďalej I. kocka je "lepšia" ako IV. a IV. kocka je "lepšia" ako III. V tomto prípade sú kocky I. a III. rovnocenné a tiež neplatí tranzitívnosť. Reláciu medzi kockami znázorníme nasledovnou schémou (šípka vždy smeruje k "lepšej" kocke):



Obr. 2

Uvedený príklad poskytuje pre žiakov hravou formou vniknúť do paradoxov stochastiky, ktorých mnohé príklady prezentuje aj Płocki (2007).

3. Teória Zoltána Dienes

Dienes posudzuje vyučovanie matematiky z pohľadu troch nasledovných hľadísk (pozri Dienes (1999)):

1. matematického
2. pedagogického
3. psychologického

K matematickému hľadisku zaraďuje dva dôležité aspekty:

- a) schopnosti a zručnosti pri matematických postupoch a algoritmoch,
- b) pochopenie pojmov.

Skúsenosti z vyučovacieho procesu ukazujú, že na slovenských školách je viac zdôrazňovaný prvý aspekt. Rozvoj informačných a komunikačných technológií pomáha posilniť druhý aspekt.

V rámci psychologického hľadiska Dienes prezentuje nasledovné tri oblasti:

- špecifické vlastnosti vzniku abstraktných pojmov u žiakov,
- mechanizmy poznávacieho procesu,
- problémy motivácie.

Dienes pre vyučovací proces formuluje nasledovné didaktické princípy:

1. Dynamický princíp

Používaný je najmä pri malých deťoch. V počiatočnej fáze vyučovania použijeme dopredu pripravené, štruktúrované a na precvičovanie zamerané hry. Pri študentoch gymnázia niektoré hry sú realizované na úrovni výpočtov. Niektoré príklady možno nájsť u Kopku (2006).

2. Princíp konštruovania

Pri riešení úloh majú žiacke konštrukcie prednosť.

3. Princíp matematickej variácie

Pri budovaní matematických pojmov u žiakov je potrebné variovať podstatné aspekty.

4. Princíp variácie pozorovania a opakovanej konkretizácie

Pre žiakov je dôležité spoznať ekvivalencie a analógie medzi viacerými pojmami. Potrebujú konkrétne skúsenosti, aby pojmy dokázali abstrahovať.

Dienes analyzoval aj matematický poznávací proces a výsledky svojich výskumov zhrnul vo formulácii nasledovných šiestich stupňoch poznávacieho procesu:

1. Voľná hra

Necháme žiakov hrať sa a pracovať s takými predmetmi a modelmi, ktoré neskôr pri poznávacom procese nejakého matematického pojmu využijeme. Dôležité z hľadiska učiteľa je to, aby pre žiakov pripravil vhodné predmety a podnety pre hry. V tejto fáze žiaci používajú svoj vlastný jazyk.

2. Štruktúrovaná hra

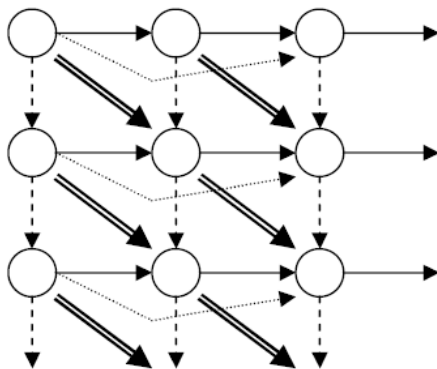
Žiaci postupne spoznávajú pravidlá a zákonitosti, ktoré predmety spĺňajú. Tieto pravidlá neskôr vedú k matematickým pravidlám. Učiteľ môže napomôcť žiakom pri odhaľovaní týchto pravidiel.

3. Hľadanie spoločných vlastností v jednej štruktúre

V tejto fáze vytvára žiak štruktúru svojich poznatkov a hľadá spoločné vlastnosti rozličných predmetov. Napríklad žiak môže nájsť izomorfizmy medzi viacerými štruktúrami.

4. Zobrazenie (Reprezentácia)

Ak objaví žiak konkrétnu podobu izomorfizmov medzi viacerými štruktúrami, pomáha mu táto fáza pri abstrakcii. Izomorfizmy reprezentujeme zvyčajne pomocou nejakej schémy. Dienes tu používa príklad násobenia prirodzených čísel.



Obr. 3

Ak do kruhov vpisujeme prirodzené čísla a žiak vie, že $\longrightarrow$ znamená "dvakrát" a $----\longrightarrow$ znamená "trikrát", tak potom objaví, že:

- a) $\Longrightarrow$ znamená "šesťkrát",
- b) $\cdots\longrightarrow$ znamená "štyrikrát".

Podobne je možné postupovať pri násobení inými číslami. Žiak dokáže pomerne ľahko pri daných číslach v rohu postupne vpisovať ďalšie čísla.

5. Symbolizovanie

V tejto fáze žiak vyjadrí vlastnosti nejakej štruktúry v symbolickej podobe. Žiak môže napríklad objaviť, že operácie $\longrightarrow$ a $\dashrightarrow$ sú navzájom ekvivalentné. Aj operácie $\dashrightarrow$ a $\Longrightarrow$ sú ekvivalentné.

V tejto fáze môžu svoju schému alebo zobrazenie opísať. Preto nazývame túto opisnú fázu aj ako úvodnú fázu k matematickému označovaniu.

6. Formalizácia

V tejto poslednej fáze hľadáme pravidlá pre objavené opisy a pokúšame sa tieto pravidlá po prvý krát zapísať vo formálnej podobe. Táto formalizácia vedie k abstraktnej rovine. Základné vlastnosti štruktúry nazývame axiómy a vychádzajúc z týchto axióm môžeme dokázať príslušné vety a rozvíjať ďalšie základné myšlienky.

4. Teória skupiny RUMEC

Vhodnú teóriu pre vyučovanie matematiky na strednej a vysokej škole vytvorila v USA skupina Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC) pod vedením profesora Eda Dubinského. Táto APOS teória (Akcia, Proces, Objekt, Schéma) vznikla na základe didaktickej teórie Jeana Piageta (pozri Dubinsky-McDonald (2001)):

1. Akcia

Akcia je transformácia objektu pomocou vyjadreného vonkajšieho podnetu. Pri pojme funkcia má napríklad žiak zadaný funkčný predpis a dosadzuje do neho rôzne čísla z definičného oboru danej funkcie. Žiak analyzuje vlastnosti danej funkcie pomocou tabuľky funkčných hodnôt. V tejto pozícii boli matematici napríklad v starovekej Mezopotámii, keď pomocou polohy planét študovali ich pohyb na oblohe. Pre nich bol graf funkcie len množinou izolovaných bodov.

2. Proces

Pokiaľ žiak opakuje akciu, môže u neho prebehnúť proces jej zvnútorne-
nia. Teraz môže žiak realizovať akciu aj bez vonkajšieho podnetu zo strany učiteľa. Môže sám viesť akciu dopredu aj dozadu. Pri pojme funkcia môže žiak rôzne druhy elementárnych funkcií navzájom porovnávať. V tejto fáze ešte nie je schopný pochopiť pojem funkcie ako funkcie zloženej z iných funkcií, nedokáže ani danú funkciu rozložiť.

3. Objekt

Žiak môže objekt získať dvomi spôsobmi:

- a) Uvažuje o procesoch a akciách, ktoré realizoval a zhrnie do podoby kognitívneho objektu.

- b) Objekt vznikne ako vytvorenie schémy, ktorá zjednocuje procesy a akcie, ktoré realizoval.

Pri pojme funkcia môže žiak uvažovať o nejakej funkcii ako o objekte bez konkrétnej reprezentácie. V tejto fáze už dokáže pochopiť pojem zloženej funkcie a dokáže danú funkciu rozložiť na kompozíciu viacerých funkcií.

4. Schéma

Schéma je koncepcia žiaka, ktorá zahŕňa akcie, procesy a objekty jednej matematickej tematickej oblasti vrátane vzťahov medzi nimi. Žiak sa dokáže jednoznačne rozhodnúť, či nejaký prvok do schémy patrí alebo nie. Napríklad schéma pojmu limita funkcie obsahuje rôzne koncepcie približovania na množine definičného oboru funkcie. Do tejto schémy musí patriť aj koncept pojmu funkcie.

5. Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní matematiky

Didaktika matematiky pri používaní IKT vo vyučovaní vyzdvihuje aspekt vizualizácie a simulácie procesov pomocou počítača. Grafické možnosti didakticko-matematických programových balíkov umožňujú žiakom pracovať s modelmi matematických objektov, napr. grafy funkcií alebo geometrické plochy a telesá (Gunčaga, Fulier, Eisenmann, 2008, s.241).

Projekt Infovek a ďalšie projekty podstatne zlepšili počítačové vybavenosť škôl, žiaľ didaktika matematiky na Slovensku má ešte rezervy v používaní IKT vo vyučovacom procese.

Tento problém je potrebné riešiť komplexne, pretože treba nástupu IKT prispôsobiť jednak prípravu budúcich učiteľov (inovovať študijné programy učiteľstva akademických predmetov na univerzitách), ako aj podporiť ďalšie vzdelávanie učiteľov v praxi.

Pre uplatnenie IKT sú významné najmä posledné dva ciele učebného predmetu matematika v novom štátnom vzdelávacom programe ISCED 3 pre predmet matematika.: Proces vzdelania smeruje k tomu, aby žiaci:

- používali prostriedky IKT na vyhľadávanie, spracovanie, uloženie a prezentáciu informácií, čo by malo uľahčiť niektoré namáhavé výpočty alebo postupy a umožniť tak sústredenie sa na podstatu riešeného problému,
- prostredníctvom medzipredmetových vzťahov a prierezových tém by mali spoznať matematiku ako súčasť ľudskej kultúry aj ako dôležitý nástroj pre spoločnosť.

Z hľadiska vzťahu učiteľ - IKT je ďalej možné zdôrazniť, že využívanie IKT vo vzdelávacom procese môže učiteľovi významne uľahčiť jeho prípravu na vyučovaciu hodinu a skvalitniť samotnú realizáciu vyučovania. Informačné technológie napomáhajú dosiahnuť vyššiu kvalitu, profesionalitu a efektívnosť v porovnaní s doteraz používanými didaktickými prostriedkami a nástrojmi. Ide najmä o komplex nasledovných činností:

- a) tvorba a spracovávanie matematických (príp. i iných dokumentov) prostredníctvom užívateľských nástrojov IKT (napríklad vhodný pedagogický softvér);
- b) tvorba matematických prezentácií, pomocou ktorých možno konkretizovať, simulovať a vizualizovať matematické pojmy a tvrdenia;
- c) tvorba testov, preverovanie vedomostí v testovacích programoch, ktoré umožňujú kontrolu výsledkov výučby a poskytujú učiteľovi veľmi dôležitú spätnú väzbu;
- d) zaznamenávanie a vyhodnocovanie výsledkov výučby, hodnotenie didaktických testov, evidencia známok a klasifikácia;
- e) vyhľadávanie a získavanie dodatočných informačných zdrojov pre vzdelávanie sa v matematike (elektronické učebnice, študijné materiály, applety, ilustrujúce dané pojmy a teórie) z internetových stránok, prípadne ďalších zdrojov;
- f) vymieňanie informácií a skúseností medzi učiteľskou verejnosťou prostredníctvom komunikačných nástrojov.

Významnou výhodou využívania IKT vo vyučovaní matematiky je posilnenie úlohy vizualizácie. Jej dôležitosť vidíme hlavne v troch nasledovných aspektoch.

- Vizualizácia môže často poskytnúť jednoduchý a účinný prístup k objavovaniu matematických výsledkov, k riešeniu problémov a k objavovaniu samotnej štruktúry matematického modelu, pomocou ktorého študenti získavajú nové poznatky. Vizualizácia vzťahov a súvislostí v jednom modeli umožňuje odvodzovať nové výsledky v ďalších oblastiach a disciplínach matematiky prostredníctvom modelov, ktoré sú s daným modelom izomorfné (úplne alebo iba čiastočne).
- Druhý aspekt vyplýva z potreby a dôležitosti využívania rôznorodých učebných štýlov vo vyučovaní. Geometrický prístup k získavaniu zručností a poznatkov, prostredníctvom názorných objektov a vizuálnych geometrických predstáv môže byť vhodným doplnkom (aj keď nie bezvýhradným základom) verbálno-logického štýlu, ktorý učitelia matematiky často uprednostňujú. Tento štýl však pri riešení niektorých matematických problémov nemusí byť najefektívnejší.

- Tretím aspektom sú súčasné tendencie, ktoré stotožňujú matematiku so štúdiom modelov, ktoré môže byť realizované prostredníctvom informačných technológií systémov počítačovej algebry alebo dynamického geometrického softvéru, pomocou ktorých je možné ľahko objaviť všeobecné súvislosti a pravidlá, ktorými sa riadi daný model, čo sa niekedy realizuje na úkor všeobecného algebrického uvažovania. Tieto systémy však umožňujú dynamicky meniť parametre znázornenia (grafy funkcií, geometrické útvary), čo urýchľuje a uľahčuje študentom nájsť súvislosti pri osvojovaní si nových poznatkov.

V posledných rokoch sa veľmi rýchlo rozšíril vo vyučovaní matematiky na všetkých kontinentoch (najmä v krajinách "tretieho sveta") voľne šíriteľný softvér GeoGebra. V súčasnosti je prístupný približne v 50 jazykoch. Tento systém spája v sebe systém počítačovej algebry, dynamický geometrický softvér a tabuľkový procesor. Veľkou výhodou je pomerne zrozumiteľný prístup k používateľovi a možnosť tvorby dynamických HTML webových stránok s dynamickými obrázkami. Softvér je možné stiahnuť zo stránky www.geogebra.org. Učebné materiály vytvorené v tomto softvéri v jednotlivých jazykoch je možné nájsť na stránkach GeoGebra Wikipédie. Jej slovenskú verziu v súčasnosti postupne vytvárame v spolupráci s učiteľmi základných a stredných škôl, ich žiakmi, ako aj študentmi učiteľského štúdia.

6. Záver

Vo vyučovacom procese má učiteľ rozhodujúcu úlohu. Ani rozvoj IKT neznižuje jeho úlohu, pretože tieto technológie sú len prostriedkom, nie cieľom vyučovacieho procesu. Dôležitý je v súčasnosti aj interdisciplinárny prístup, ktorý je viditeľný u Brinckovej (2010). Naše úvahy zakončíme dešatorom učiteľa matematiky, ktoré formuloval György Pólya (pozri Pólya (1971)). Učiteľ má:

1. sa zaujímať o odborný obsah svojho vyučovania.
2. dobre poznať odborný obsah svojho vyučovania.
3. poznať jadro vyučovania a vedieť, že najlepšia cesta pre učiteľa je tá, ktorú učiteľ sám objaví.
4. poznať predstavy žiakov: Čo očakávajú? Čo je pre nich náročné?
5. nielen odovzdávať ďalej žiakom odborné vedomosti, ale má u žiakov rozvíjať ich pracovné schopnosti (napríklad správne poradenie a korektnosť postupu).
6. učiť žiakov vzájomne diskutovať.

7. učiť žiakov dokazovať.
8. rozvíjať u žiakov heuristické metódy pre riešenie úloh a problémov, poukázať im v konkrétnych situáciách na skryté všeobecné štruktúry.
9. neukazovať žiakom vopred riešenie každej úlohy, ale nechať žiakov samostatne objavovať, aby boli u nich podporené schopnosti ich myslenia.
10. nepreťažovať žiakov množstvom učiva, ale ich povzbudzovať a motivovať k učeniu sa s porozumením.

Poznámka

Článok vznikol s podporou grantu KEGA č. 168-010KU-4/2010.

Literatúra

- [1] Billich, M. [2008]: *The use of geometric place in problem solving*, 2008, In: Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research, Ružomberok, KU, s. 7-14.
- [2] Brincková, J. [2010]: *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy*. Banská Bystrica, FPV UMB, 2010.
- [3] Dienes, Z. [1999]: *Építésük fel a matematikát*. Budapest, SHL Hungary, Kft., 1999.
- [4] Dubinsky E., McDonald M. [2001]: *APOS. A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research*, 2001. In D. Holton et. (Eds.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, s. 273-280, <http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf>.
- [5] Gunčaga J., Fulier J., Eisenmann P. [2008]: *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy*. Ružomberok, PF KU, 2008.
- [6] Kopka J. [2006]: *Zkoumání ve školské matematice*, Ružomberok, KU, 2006.
- [7] Pálfalvi J. [2007]: *Egy szép példa Varga Tamástól*. In: A 2004 - 2006 Varga Tamás Napok előadásai, Budapest, ELTE, 2007, s. 3-4.
- [8] Płocki A. [2007]: *Pravdepodobnosť okolo nás*. Ružomberok, KU, 2007.
- [9] Pólya G. [1971]: *A problémamegoldás iskolája*. Budapest, Tankönyvkiadó, 1971.

- [10] Szendrei J. [2005]: *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest, Typotex Kiadó, 2005.
- [11] Varga, T. [2001]: *Matematika Lexikon*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó és SHL Hungary, Kft., 2001.

POPIS VÝSKUMU ZAMERANÉHO NA VYUČOVANIE MATEMATIKY POMOCOU POČÍTAČOVEJ GEOMETRIE NA 2. STUPNI ZŠ

Katarína Chlapečková

*Pedagogická fakulta, Univerzita Komenského v Bratislave
Račianska 59, 813 34 Bratislava
e-mail: chlpcvk@gmail.com*

Abstract. The informatisation of schools will affect education processes. Our research is centred on edifying tasks of education, how information technology (computers, computer programs, computer geometry, computer graphics). influences mathematics and geometry at primary schools (2nd grade): learning of pupils and teaching of teachers. We show that the innovative methods of constructivism are appropriate. A number of recommendations based on our research is made.

1. Uvedenie do problematiky

Cieľom článku je popis priebehu a výsledkov výskumu uskutočneného na základnej škole na hodinách matematiky, resp. geometrie. Úlohou bolo zistiť, v čom podporujú počítače, počítačové programy, resp. počítačová geometria a počítačová grafika možnosti žiaka učiť sa efektívnejšie a učiteľa učiť efektívnejšie. Snahou bolo priame, nenásilné zapojenie sa do vyučovacieho procesu s použitím IKT a nahradenie tradičného vyučovania.

Je známe, že moderné informačné technológie silne ovplyvňujú fungovanie dnešného sveta a často uľahčujú mnohé každodenné činnosti. Napokon aj ich zavádzanie do školstva a samotných procesov vzdelávania má zlepšiť kvalitu výchovno-vzdelávací účelov.

Výskumným problémom bol komplex otázok, akými cestami dosiahnuť, aby používanie počítačov nebolo samoúčelné a prinášalo nové pozitívne kvality vo výchovno-vzdelávacom procese.

Výskum mal priniesť odpovede na otázky:

- ktoré tematické celky učiva sú zjavne vhodné na uplatnenie počítača za účelom dosahovania vyššej efektivity;

- ktoré počítačové programy sú vhodné a efektívne v modernizácii metód a prostriedkov výučby (stručný prehľad);
- ktoré inovačné metódy je vhodné využívať v rámci integrácie IKT do vyučovania matematiky na základných školách.

Na základe skúseností môžem potvrdiť, že žiaci majú problémy s konštrukčnými úlohami; nie je im úplne jasné ako si načrtnúť úvodnú situáciu a nasledovnou analýzou (rozborom) navrhnuť riešenie k úspešnému koncu. Menej problémov majú so samotným zapisovaním postupu a rysovaním (presnosť a úhladnosť svedčí o ich sústredení sa a kvalitných rysovacích pomôckach). Nakoľko sa dlhodobo pozoruje neobľúbenosť geometrického učiva pretrvávajúca generácie sa domnievam, že použitie počítača by malo motivovať žiakov k väčšiemu záujmu o predmet, uľahčiť im predstavu o probléme, načrtnutie riešenia, zvýšenie názornosti a spresňovanie krokov výkladu učiteľa alebo riešenia. Prostriedky dnešnej modernej techniky na vizualizáciu, simuláciu či dokonca animáciu výkladu umožňujú, aby sa žiakovi zrozumiteľnejším grafickým spôsobom priblížili geometrické situácie, a tým sa uľahčilo chápanie zložitých javov, kvalitnejšie a rýchlejšie rozhodovanie. Dá sa očakávať, že použitie počítača vo vyučovaní bude kladne vplývať na viaceré ukazovatele efektivity didaktického procesu, napr. spotrebu času, efektívnosť precvičovania, trvácnosť vedomostí, rýchlosť vytvárania žiadúcich návykov, štruktúrovanie poznatkov, čas a hĺbku opakovania a pod.

Zatiaľ čo žiaci stredných škôl svoje zdokonaľovanie stavajú na vedomostiach a počítačových zručnostiach získaných na predchádzajúcom stupni, žiaci 2. stupňa základných škôl takúto možnosť donedávna nemali (od školského roku 2008/2009 sa na 1. a 2. stupni ZŠ postupne zavádza Informatická výchova, dovtedy len ako záujmová činnosť žiakov), hoci často sú ich skúsenosti a zručnosti s prácou na počítači prekvapivo na dobrej úrovni.

Pozorovaná neobľúbenosť matematického, resp. geometrického učiva môže vyplývať aj z tzv. tradičného vyučovania, t.j. v klasickej triede, klasickým výkladom, zriedkavo používanie didaktických pomôcok a používanie učebnice, ktorá je stále chápaná ako "povinná učebná pomôcka". V rámci didaktického prístupu vyučovania prevláda transmisívny, t.j. dominujúci je učiteľ, žiaci sú závislí na jeho stratégiách, ktoré uvedie, či neuvedie? hotové poznatky si memorujú a podľa potreby zreprodukujú.

Učenie "objavovaním vlastných stratégií" vychádzajúce z princípov konštruktivismu posúva žiaka do úlohy aktéra procesu učenia a učiteľa ako zabezpečovateľa, koordinátora a kontrolóra tohto procesu. Jeho úlohou nie je poskytovať hotové poznatky, ale skôr aktivizovať u žiakov konštrukčné procesy. S tým súvisí, že poznatky osvojené týmto spôsobom sú trvalejšie, žiak si rozvíja tvorivé myslenie, buduje o.i. svoju hodnotu a sebavedomie,

postavenie v rámci kolektívu. Na našich školách sa nevenuje dostatočná pozornosť práve tomuto didaktickému prístupu, efektívnejšiemu. Nakoľko IKT vo vyučovacom procese podporujú konštrukčné učenie sa domnievam, že prispievajú k motivácii žiakov a zvyšujú ich záujem o predmet a taktiež pomáhajú učiteľom učiť, t.j. vo funkcii **počítač používaný a obsluhovaný žiakmi** alebo **počítač ako demonštračný prostriedok ovládaný učiteľom**.

Rozvoj búrlivo napreduje, dnešné softvérové spoločnosti ponúkajú množstvo produktov stále novších a bohatších systémov na rôznych úrovniach kvality, o rok - dva pravdepodobne zastaralé. Práve so vznikom a vývojom IKT je úzko spätý aj proces ich zavádzania do škôl. Je preto ťažké sa vedieť orientovať vo všetkých ponúkaných možnostiach matematických programov, odhadnúť správnu mieru a miesto používania. Učiteľ nemusí sám prácne vytvárať materiály vhodné na použitie na vyučovacích hodinách, mnohé celkom šikovné sa dajú nájsť na internete: hotové "aplety", úlohy, animácie, ale je dôležité si overiť dôveryhodnosť a správnosť ponúkaných zdrojov, aby sa z pomocníka nestal komplikátor. Pri výbere je potrebné vziať do úvahy viaceré hľadiská: náročnosť obsluhovania (program by nemal odvádzať pozornosť od matematickej úlohy a zamerať sa na spracovanie počítačom), náročnosť údržby, finančná náročnosť, obsah programov (konkrétnosť vs. všeobecnosť a pod.). Podľa Slavíka a Nováka (1997) netreba počítať s tým, že počítač prácu nejako význame uľahčí alebo skryje jej nedostatky. Sám je nástroj, ktorý - ako každý iný inštrument- pomôže len tomu, kto vie čo chce a vie ako na to. Inými slovami, najlepšie je najskôr objaviť problém, až potom k nemu hľadať počítač ako nástroj, ktorý môže pomôcť s jeho riešením. V praxi to žiaľ často býva práve naopak.

Na Slovensku existuje málo prác so zvolenou tematikou. Väčšinou ide o práce charakteru použitia IKT vo vyučovaní na vysokých a stredných školách, s použitím metód kvantitatívne orientovaného výskumu. Zo zhrnutí a záverov prác vyplýva jednoznačne kladný prínos a odporúčania pre ďalšie, hlbšie bádanie v jednotlivých témach podľa zamerania. Z postupov prác je možné dozvedieť sa o priebehu zberu dát, postupe ich vyhodnocovania a zovšeobecňovania. Nakoľko sú skúmané vzorky rozsiahle, väčšinou vybrané náhodne, nie sú zamerané na skúmanie rôznych predpokladov, javov a ich vzájomné ovplyvňovanie. Existuje mnoho hotových materiálov, ktorých validita a reliabilita je diskutabilná, na základe nie celkom jasného uvedenia zdroja ich vzniku. Situácia v zahraničí je podobná, aj keď sa nedá hovoriť o malom počte. Ich preštudovanie poslúžilo ako námet pri kategorizácii zamerania sa na hlbšie skúmanie pozorovaných situácií, vzhľadom na vekový rozdiel žiakov a študentov nie vždy aplikovateľné.

Na základe prehľadu skúmanej literatúry a taktiež veľkých zmien vo vyučovaní v dôsledku zavádzania a využívania informačných technológií v školách a uplatňovania nových pedagogických myšlienok odôvodňujem potrebu vlastného výskumu nedostatkom skúmania pedagogických problémov vyučovania matematiky, resp. geometrie na tejto úrovni.

2. Realizácia a výsledky výskumu

Jedným z teoretických východísk výskumu bola analýza počítačových programov vhodných na použitie vo vyučovaní. Ďalším východiskom bola analýza učebných osnov a porovnanie súčasných učebníc matematiky, s väčším podielom geometrickej časti. Napokon to boli teórie vyučovania pomocou IKT v zmysle inovácie vyučovacieho procesu so zameraním sa na konštruktivistickú pedagogiku. Tieto sa stali základom pre prípravu a realizáciu výskumu. Uskutočnil sa v troch etapách. Prvé dve pozostávali z pilotážneho projektu slúžiacemu na zmapovanie situácie a pedagogického experimentu v zmysle kvantitatívnej metodológie. V ich priebehu došlo k zmene zamerania pozornosti výskumu na hlbšie a detailnejšie skúmanie pozorovaných javov a vzájomných vzťahov medzi nimi s použitím kvalitatívnych metód. Použitím oboch metodológií išlo o dosiahnutie ich vzájomného doplnenia.

1.etapa

Na základe vlastného štúdia relevantnej literatúry sa naplánoval prvý pilotážny prieskum. Venoval sa zmapovaniu užitočnosti použitia počítača vo vyučovaní určitého tematického celku školskej matematiky, nakoľko je známe, že obsluha počítača ako nástroja riešenia úloh z technického pohľadu aj z matematického hľadiska nie je príliš jednoduchá.

Hlavnou metódou bol **pedagogický experiment**, v ktorom nezávislé premenné sú: vyučovanie tradičné a vyučovanie podporované počítačom. Závislé premennou je úroveň vedomostí, ktorá sa zmeria testom. Ďalšie použité metódy: **štruktúrované pozorovanie pomocou pozorovacieho hárku**, **dotazníky** pre žiakov a učiteľa. Na hodinách išlo o snahu výkladu heuristickým rozhovorom, aby žiaci vzájomné vzťahy a súvislosti daných tém objavili sami pri usmernení vhodnými otázkami.

Vzorku tvorili žiaci siedmeho a ôsmeho ročníka ZŠ Pukanec, experimentálnu skupinu žiaci so zvýšeným záujmom o prácu na počítači, ostatní kontrolnú skupinu. Vyučovanie prebiehalo podľa rozvrhu hodín počas dvoch týždňov, so zameraním na témy: *Zhodné zobrazenia* (7. ročník) a *Riešenie konštrukčných úloh* (8. ročník), v experimentálnej skupine pomocou počítačov a softvéru Cabri Geometry II v počítačovej miestnosti (8 počítačov), v kontrolnej tradične v triede s klasickými pomôckami.

Zistenia pomohli zorientovať sa v "teréne", zmapovať situáciu a možnosti a boli odrazovým mostíkom pre ďalšiu etapu výskumu.

2. etapa

Na základe výsledkov pilotážneho prieskumu a ďalšieho štúdia odbornej literatúry sa pripravovali ďalšie metodické materiály na vyučovanie. Naplánoval sa ďalší experiment, v ktorom sa tieto materiály odskúšali a vyhodnotili. Mal priniesť odpovede na otázky, či sú materiály a spôsob vyučovania efektívnejšie oproti tradičnému, či žiaci rozumeli pokynom, otázkam v dotazníku, nakoľko je práca v teréne iná ako sú plánované predpoklady.

Hlavnou metódou bol **pedagogický experiment**, v ktorom nezávislé premenné sú: vyučovanie tradičné a vyučovanie podporované počítačom. Závislé premennou je úroveň vedomostí, ktorú zmeriame testom. V zmysle teórií didaktických situácií sa pozornosť zameriava na dve situácie, a to: žiak má riešiť zadanú úlohu, pričom má k dispozícii počítač, druhú: učiteľ uvádza žiaka do úlohy. To celé budem chápať ako didaktickú situáciu a pokúsim sa o **analýzu a priori**, dopredu načrtnúť riešenie, konkretizovať a použiť ako metódu vyučovania. Zo získaných výsledkov sa pokúsim o **analýzu a posteriori**, analyzovať chyby a nedostatky a navrhnúť cesty, ako im možno v praxi predchádzať. Dôraz sa kladie na budovanie systému pojmov. Postupy konštrukcií sa budú utvárať na základe získaných poznatkov, pričom dochádza k ich postupnému začleňovaniu do systému, čím sa dostáva a prehľbuje logická stavba disciplíny (Spagnolo, Čížmár, 2003). Ďalšie použité metódy boli: **štruktúrované pozorovanie pomocou pozorovacieho hároku**, **škálovanie** a **dotazníky** pre žiakov a učiteľov (zostavené podľa pravidiel a vychádzajúce z predchádzajúcej etapy, overené sondovaním na malej vzorke a kolegoch). Vzorku tvorili žiaci siedmeho a ôsmeho ročníka ZŠ Beethovenova v Nitre, prospechovo porovnateľné. Vyučovanie prebiehalo podľa rozvrhu hodín počas dvoch týždňov, so zameraním na témy: *Zhodné zobrazenia* (7. ročník) a *Riešenie konštrukčných úloh* (8. ročník), v experimentálnej skupine pomocou počítačov, dataprojektora a softvéru Cabri Geometry II v počítačovej miestnosti (14 počítačov), v kontrolnej skupine tradične v triede s klasickými pomôckami.

3. etapa

Počas prvých dvoch etáp výskumu sa vynárali otázky, ktoré neboli predmetom skúmania ale vplývali naň. Keďže sa jednalo o málo početné vzorky, bolo možné pozorovať viacero javov, ktoré ovplyvňovali priebeh, či výsledky výskumu. Ich zovšeobecnenie sa ukazovalo skresľujúco, vyhodnotenie by mohlo pôsobiť nespoľahlivo. Javilo sa zaujímavejšie pozornosť zamerať na hlbšie preniknutie a detailnejšie preskúmanie pozorovaných javov a vzájomné vzťahy medzi nimi. Po dôkladnom uvážení som sa rozhodla pokračovať vo

výskume kvalitatívnymi metódami, ktoré by dopĺňali dovtedy zistené skutočnosti kvantitatívnymi postupmi.

Prípadová štúdia: Použitie IKT, resp. počítačovej geometrie vo vyučovaní matematiky žiakmi 2. stupňa ZŠ

V centre pozornosti tejto štúdie bolo podrobné a hlboké skúmanie pedagogických problémov vyučovania z hľadiska možnosti žiaka učiť sa (dosiahnuť hlbšie nahliadnutie do problémov učiva a zvýšiť zručnosť v riešení úloh) na hodinách matematiky, resp. geometrie na 2. stupni základnej školy a to priamym, nenásilným zapojením sa do vyučovacieho procesu s použitím IKT (počítače, počítačové programy, počítačová geometria, počítačová grafika), nahradenie tradičného vyučovania uplatňujúc nové pedagogické myšlienky a navrhnutie riešenia pre efektívne využitie v praxi.

Výskum mal priniesť odpovede na stanovené otázky:

- ◇ Ako učenie pomocou IKT ovplyvňuje rozvoj osvojenia si matematického, resp. geometrického učiva?
- ◇ V ktorých fázach vyučovacieho procesu je vhodné používať IKT?
- ◇ Koľko času zaberie príprava žiakov na zorientovanie sa v geometrickom programe?
- ◇ Nakoľko žiaci sami dokážu zvládnuť samostatné úlohy?
- ◇ Ktoré faktory vyučovania podporovaného IKT sú kladne ovplyvňiteľné?

V priebehu výskumu sa rozšíril o ďalšie:

- ◇ Ako by mala vyzeráť taká hodina (nápadné znaky)?
- ◇ Ako často by taká hodina mala byť?

Na dosiahnutie vyššie menovaných cieľov som zvolila kvalitatívne metódy, ako hlavnú **neštruktúrované pozorovanie s aktívnou participáciou**, s častí s **pasívnou participáciou**. Ako kontrolné metódy boli použité **skupinové interview** a **obsahová analýza produktov žiackych prác** (zošity z matematiky, výkresy Cabri).

Vzorku tvorili žiaci siedmeho a ôsmeho ročníka ZŠ Beethovenova v Nitre, výber školy vyhovoval kritériám pre výber miesta výskumu podľa Marshalla a Rossmana (1995). Jedná sa o žiakov, ktorý sa ešte nestretli s vyučovaním matematiky, resp. geometrie pomocou počítačov a počítačových programov.

Hoci na niektorých predmetoch navštevujú túto učebňu (slovenčina, zemepis, technické vyučovanie - t.j. "mini- informatika"), často je to len vyhľadávanie informácií z internetu a po splnení úloh sa môžu venovať vlastnému záujmu. Väčšina vlastní počítač aj internet v domácnosti, využíva hlavne na komunikáciu (e-meil, chat, facebook), vyhľadávanie informácií na internete (hudba, vzdelanie, obrázky, šport a pod.), zábavu, t.j. počítačové hry a videá a tiež prácu v textovom editore. Ich zručnosti sú celkovo na dobrej úrovni.

Vyučovanie prebiehalo podľa rozvrhu hodín počas dvoch týždňov, so zameraním na témy: *Zhodné zobrazenia* (7. ročník) a *Riešenie konštrukčných úloh* (8. ročník), pomocou počítačov, dataprojektora a softvéru Cabri Geometry II v počítačovej miestnosti (14 počítačov).

Prípadová štúdia: Použitie IKT, resp. počítačovej geometrie vo vyučovaní matematiky učiteľom 2. stupňa ZŠ

Cieľom tejto štúdie bolo podrobné a hlboké skúmanie pedagogických problémov vyučovania z hľadiska možnosti učiteľa učiť na hodinách matematiky, resp. geometrie na 2. stupni ZŠ pomocou IKT (počítače, počítačové programy, počítačová geometria, počítačová grafika), uplatňovaním nových pedagogických myšlienok a navrhnutie riešenia pre efektívne využitie v praxi.

Výskum mal priniesť odpovede na stanovené otázky:

- ◇ V ktorých fázach vyučovacieho procesu je vhodné používať IKT?
- ◇ Ktoré faktory učiteľovej práce vo vyučovaní podporovaného IKT sú kladne ovplyvniteľné?
- ◇ Ako by mal vyzeráť učiteľ používajúci IKT na hodinách (charakteristika)?

V priebehu výskumu sa rozšíril o ďalšie:

- ◇ Ako by mala vyzeráť taká hodina (nápadné znaky)?
- ◇ Ako často by taká hodina mala byť?

Na dosiahnutie uvedených cieľov sa v zmysle kvalitatívnej metodológie použili vo výskume hlavná metóda **neštruktúrované pozorovanie s pasívnou participáciou**, kontrolné metódy **interview** a **obsahová analýza učiteľských materiálov** (prípravy, reflexný denník).

Výskum prebiehal na ZŠ Beethovenova v Nitre, počas dvoch týždňov podľa rozvrhu hodín. Vzorku tvorila kvalifikovaná učiteľka matematiky

žiakov skúmaných tried siedmeho a ôsmeho ročníka s dlhoročnou a úspešnou pedagogickou praxou (27 rokov). Na dobrej úrovni ovláda použitie počítača a niekoľkých programov, prácu s internetom. V pedagogickej praxi IKT nepoužíva. Uplatňuje transmisívny prístup k vyučovaniu.

Výsledky prvej a druhej etapy realizované kvantitatívnymi metódami boli osožné a prínosné pre prípravu a realizáciu tretej kvalitatívnej etapy.

Výskumom sa podarilo potvrdiť kladné vplyvanie používania IKT na viaceré ukazovatele efektivity didaktického procesu, napr. spotrebu času, efektívnosť precvičovania, rýchlosť vytvárania žiadúcich návykov, štruktúrovanie poznatkov, čas a hĺbku opakovania a pod. Hoci samotná príprava učiteľa na takúto hodinu čas nešetří, má mnoho výhod, ktoré mu vyučovanie zefektívnia oproti tradičnému. Žiakom sa uľahčila predstava o probléme, načrtnutom riešení a zvýšenou názornosťou a spresňovaním krokov sa im zrozumiteľnejším grafickým spôsobom priblížili geometrické situácie, a tým sa uľahčilo chápanie zložitých javov, kvalitnejšie a rýchlejšie rozhodovanie. To motivovalo hlavne slabších žiakov k ďalšej aktivite. Učenie objavovaním, resp. konštruovaním si poznatkov usmerňované vhodnými otázkami učiteľa nevnímali ako "neprijemné učenie" ale "zábavné tvorenie". Dá konštatovať, že zvýšeným záujmom o vyučovanie pomocou IKT sa dá dosiahnuť obľúbenosť predmetu matematika, resp. geometria.

Snahou pozorovania ako aj analýzou artefaktov bolo zistiť a opísať zvonka to, čo sa v skutočnosti deje. Dáta získané v rozhovoroch zisťovali a opisovali zvnútra to, čo si respondenti mysleli, že sa deje. Údaje jednotlivých postupov sa navzájom dopĺňovali a závery sa zhodovali, to svedčí o tom, že boli vhodne zvolené a použité. Porovnaním výsledkov získaných pozorovaním, skúmaním artefaktov a interview sa v dotazníkoch, škálach a krátkych diskusiách objavili isté druhy skresľovania z dôvodov žičlivosti (nadhodnocovania), príslosti (podhodnocovania), centrálnej tendencie (nie krajné ale stred, priemer) a "haló" efektu skúmanej vzorky (kvôli inej vlastnosti, napr. je nadaný lebo je usilovný). Snahou bolo podľa princípu komparácie zistenia zjednotiť a tak dospieť k uskutočneniu cieľov dizertácie.

Na zabezpečenie validity prípadových štúdií bola zvolená trianguláciu (overenie výsledkov viacerými metódami). Nakoľko sa jedná o konkrétne prípady, obmedzením štúdií je nízka reliabilita, pretože zistené výsledky nemusia byť prenositeľné, hodnoverné a potvrditeľné na iné prípady v zmysle zovšeobecniteľnosti.

3. Zhrnutie a záver

Prínosom realizovaného výskumu je vytvorenie návrhu, ako by mala hodina podporovaná IKT vyzeráť (vzhľadom na vhodnosť používania v jed-

notlivých fázach vyučovania) a ako často by mala byť (v rámci možností vybavenia školy a plnenia plánov), kedy by bolo vhodné začať so zavádzaním počítačového rysovania ako samostatnej práce žiaka a napokon charakteristiky vhodného učiteľa (v zmysle matematickej a počítačovej vzdelanosti ako aj uplatňovania prístupov konštruktivistickej pedagogiky).

Odporúčania pre prax

Uvádzam východiská potrebné pre úspešné uskutočnenie vyučovania podporovaného pomocou IKT za cieľom zvýšenia efektivity, vyplývajúce zo záverov uskutočnených prípadových štúdií:

- kvalitné vybavenie počítačovej miestnosti a jej vhodné usporiadanie (s ohľadom na zdravie),
- možnosť pracovať so žiakmi v skupinách v rámci delených hodín (väčšia možnosť individuálneho prístupu k žiakom a ich tempa),
- upraviť rozvrh vyučovania matematickej a geometrickej zložky v rámci týždňa (podľa príslušného množstva jednotlivých tém) s možnosťou ísť do učebne raz za týždeň v rámci predmetu podľa potreby ako doplnenie a precvičenie,
- uplatňovať princípy učenia podľa konštruktivistických teórií (budovanie poznania na základe vlastných skúseností zabezpečuje dlhšiu trvácnosť, objavovanie usmerňované vhodnými otázkami motivuje k ďalšej aktivite na učení, podporuje tvorivosť, komunikáciu a vnútorný svet hodnôt žiakov), práve princípy transmisívneho prístupu môžu mať za následok neobľúbenosť predmetu,
- prezentovať matematiku, resp. geometriu na príkladoch z bežného života, ktoré sú im blízke, vedie k motivácii v jej chápaní ako súčasti a bežnej potreby oproti odovzdávaniu a memorovaniu abstraktných poznatkov,
- oboznamovanie sa s počítačom - informatická výchova sa deje v rámci nových vzdelávacích štandardov postupne na prvom aj druhom stupni, oboznamovanie sa s programami potrebnými k naučeniu sa rysovania na počítači by sa mohlo zaviesť podľa tohto vzoru už od začiatku geometrického učiva v rámci predmetu matematika (nie informatika), t.j. na prvom stupni,
- nastoliť a dodržiavať pravidlá správania v počítačovej učebni, pestovať návyky zdravej psychohygieny pri práci s počítačom, práve pozitívna atmosféra prispieva k pozitívnym výsledkom,
- kladný vzťah žiakov k počítačom využiť a pretransformovať do matematiky, resp. geometrie, záujem učiť sa s nadšením prejavili hlavne prospechovo slabší, v pracovnom nasadení nemali záujem vyrušovať,

- pripravovať učiteľov postupmi IKT ako aj konstruktivismu, prinajmenšom si ich osvojiť, najlepšie zažiť,
- podporovať učiteľov v rámci ďalšieho vzdelávania v zmysle pomôcť im "spriatelíť sa" s IKT a inovačnými metódami "ako učiť", práve oni na základe svojich bohatých a overených skúseností majú veľkú výhodu "čo učiť", práve IKT môžu pomôcť množstvo učiva prezentovať so zameraním sa na hĺbkou,
- nakoľko doba postupuje rýchlo a prináša stále nové produkty, je potrebné sledovať a zdokonaľovať sa v matematických programoch a technológiách, (napr. konferencie, odporúčania kolegov, výmena skúseností v rámci diskusných fór),
- na hodinách je vhodné používať učebné pomôcky - konkrétne hmatateľné modely, v premyslenej kombinácii s IKT môžu viesť k zvýšeniu efektívneho,
- nezanedbať rysovanie tradičným spôsobom do zošita alebo na tabuľu, nácvik týchto motorických a precvičovanie matematických (napr. miera, predstava o skutočnej veľkosti, odhad riešenia, improvizácia rysovacích nástrojov) zručností sa nedá získať počítačom a majú svoj význam - uplatnenie v praxi,
- prepojiť vzdelávanie celého školského systému na všetkých jeho úrovniach.

Tieto výsledky by mohli poslúžiť v praxi inšpirovaním k vyučovaniu matematiky podporovaného IKT podľa predložených návrhov a ako teoretický základ pre budúcich výskumníkov v tejto oblasti. Od roku 2008 vstúpil do platnosti nový zákon o ZŠ schválený Ministerstvom školstva SR, ktorý rozširuje rámcový učebný plán vzdelávacej oblasti Matematika a práca s informáciami o Informatickú výchovu a Informatiku. Má zmysel pokračovať skúmaním koncepcií vyučovania podporovaného IKT. Rovnako je vhodné preskúmať jednotlivé tematické celky (podľa nových vzdelávacích štandardov), prípravou metodických a testovacích materiálov a ich overovaním sformovať do podoby vhodnej na priame použitie vo vyučovaní učiteľmi a tiež žiakmi.

Literatúra

- [1] CONFREY, J.: *What constructivism implies for teaching*. Monografia. J. Res. Math. Educ, 1994.
- [2] ČERNOCHOVÁ, M.- KOMRSKA, T.- NOVÁK, J.: *Využití počítače při vyučování*. Praha: Portál, 1998.

- [3] FULIER, J.- ŠEDIVÝ, O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. In: Edícia prírodovedec č. 87, Nitra: UKF, 2001.
- [4] GAVORA, P.: *Sprievodca metodológiou kvalitatívneho výskumu*. 2. vydanie. UK Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2007.
- [5] KOREŇOVÁ, L.- JODAS, V.: *Niektoré možnosti využitia Internetu a didaktického softvéru vo vyučovaní matematiky v základných a stredných školách*. Bratislava: Metodické centrum mesta Bratislavy, 2002.
- [6] MARSHALL, C.- ROSSMAN, G. B.: *Designing qualitative research*. London: Sage, 1995.
- [7] SLAVÍK, J.- NOVÁK, J.: *Počítač jako pomocník učitele: efektivní práce s informacemi ve škole*. 1. vydanie. Praha : Portál, 1997.
- [8] SPAGNOLO, F.- ČIŽMÁR, J.: *Komunikácia v matematike na SŠ*. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovské Univerzity, 2003.
- [9] STRAKOVÁ, Z.: *Vedíme žiakov k samostatnosti*. Prešov : Metodicko-pedagogické centrum, 2003.
- [10] ŠTECH, S.: *Škola stále nová*. Praha: Univerzita Karlova- Karolinum, 1992.
- [11] ZÁMOŽÍK, J. a kol.: *Základy počítačovej grafiky*. Vysokoškolská učebnica, 1. prepracované vydanie. Bratislava: STU, 1996.
- [12] <http://www.zsbeethovenova.edupage.org>

INTERAKTIVNÍ TABULE V HODINÁCH KOMBINATORIKY

Marika Kafková

*Katedra aplikované matematiky a informatiky
Ekonomická fakulta, Jihočeská univerzita
Studentská 13, 370 05 České Budějovice
e-mail: mkafkova@ef.jcu.cz*

Abstract. The article is about using of the interactive board SMART Board during the teaching mathematics at college or secondary school. Our project has run last year in May at a grammar school in České Budějovice for second year students. Using the interactive board they became familiar with a new and not always loved part of Mathematics - combinatorics.

1. Úvod

Na úvod bych ráda použila krátký úryvek z Velké Didaktiky od Jana Amose Komenského, který je podle mého názoru "nesmrtelný" a stále velmi aktuální.

Ať je učitelům zlatým pravidlem, aby se všechno předkládalo všem smyslům, pokud to je jen možné, totiž věci viditelné zraku, slyšitelné sluchu, čichatelné čichu, ochutnávatelné chuti, hmatatelné hmatu. A jestliže se něco může vnímat několika smysly, nechť se to děje několika smysly. Nic není v rozumu, co nebylo před tím ve smyslech. Proč by se tedy počátek vyučování nedál raději věcným názorem než slovním podáním věci?

Cílem základních a středních škol je především připravit děti, resp. žáky či studenty na budoucí život, předat jim důležité poznatky z různých vědních oborů, naučit je zodpovědnosti, samostatnosti, tvořivosti, naučit je spolupracovat a respektovat práci a úspěchy vlastní i druhých a v neposlední řadě je naučit základní funkce informačních a komunikačních technologií, které jsou nedílnou součástí téměř každé pracovní činnosti. Samozřejmě není pochyb o tom, že papír a tužka, resp. klasická tabule a křída vždy

byly, jsou a ještě dlouhou dobu budou nedílnou součástí výchovně vzdělávacího procesu. A co je důležité říci, jedná se o velmi dobré pomůcky. Žádná vyučovací pomůcka není tak přizpůsobivá učitelově stylu jako právě tabule a křída. Jak ale udělat žákům výuku zajímavější a zábavnější? Jak žákům určitá fakta srozumitelně přiblížit a umožnit jim probíranou látku lépe pochopit? Nepochybně existuje mnoho možností, např. formou výletů, exkurzí, dokumentárních filmů, zahraničních pobytů, různých projektů, e-learningu apod. Domnívám se, že další možností by mohla být např. interaktivní tabule, kterou lze uplatnit při výuce téměř všech vyučovaných předmětů, tedy i matematiky - a to nejenom při výkladu, ale i při opakování a zkoušení z probrané látky.

2. Interaktivní tabule

Dovolte mi popsat interaktivní tabuli pouze ve zkratce, neboť si myslím, že v současné době většina učitelů má o této moderní technologii povědomí, a tak není zapotřebí jej širokosáhle charakterizovat.

Obecně vzato se dá říct, že interaktivní tabule je nová technologie, která umožňuje zábavnější a méně stereotypní formu výuky. Jedná se o dotykovou plochu, ke které je připojen počítač a data projektor. Z počítače je na povrch tabule projektorem promítán obraz, se kterým se dá pracovat už bez použití počítače (ten samozřejmě musí být stále zapnut). Na tento dotykový displej, tj. interaktivní tabuli, je pak možné psát prstem, speciálním fixem, pohybovat s obrázky, malovat, pouštět si připravené animace, videa, zvuky, nahrávat si postup řešení aj.



Obrázek 1 - důležité komponenty pro využívání IT

Na trhu je možné vidět několik typů interaktivních tabulí. Mezi nejznámější v České republice bezkonkurenčně patří interaktivní tabule SMART Board a Activ Board. Samozřejmě jako každá technologie i interaktivní tabule mají svůj rub a líc. Jistě každý pedagog, který už někdy s interaktivní

tabulí pracoval, by byl schopen některé kladné i záporné stránky vyjmenovat. Vypsát všechny vlastnosti, které se nabízejí, by zabralo minimálně 1 stránku textu. Vypíši proto pouze některé, podle mého názoru zásadní.

Výhody:

- umožňuje díky vhodným obrázkům, animacím a jiným didaktickým pomůckám zefektivnit výuku
- z interaktivní tabule lze spouštět aplety zaměřené na experimenty; studentům tak lze ukázat jevy a důsledky, k nimž by nebylo možné dojít při realizaci daného pokusu ve třídě
- možnost využívání při výuce většiny předmětů a různých věkových kategorií

Nevýhody:

- technika může převážít nad rozumným využitím interaktivní tabule
- příprava hodin je pro učitele časově velmi náročná
- žák se může dostat do role "pasivního diváka" (animace místo reálných experimentů, pokusů, IT jako projekční plátno)

3. Výuka kombinatoriky na gymnáziu

Již v roce 2008 jsem předložila studentům 4. ročníků na několika gymnáziích po celé České republice anketu, ve které měli mimo jiné označit 3 středoškolské matematické okruhy, které se jim zdály z hlediska pochopení a porozumění látky nejtěžší. Dotazníkem jsem si chtěla převážně ověřit moji hypotézu o oblíbenosti, resp. neoblíbenosti matematiky, jaká matematická témata se zdají pro studenty nejtěžší, nejjednodušší, jaká jsou nejoblíbenější a zda využívali při výuce matematiky nějaké pomůcky. Jak se dalo očekávat, za nejtěžší okruhy maturanti označili diferenciální a integrální počet, na druhém místě pak kombinatoriku, pravděpodobnost a statistiku a na třetím stereometrii. Domnívám se, že právě kombinatorika hrála bezesporu velkou roli při hodnocení celého okruhu kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky.

Myslím si, že hlavní roli zde hraje např. logické myšlení, lidově řečeno "zdravý selský rozum", který nejspíš mnoho studentů postrádá. Dalším důvodem, proč tato látka není oblíbená, přestože při řešení úloh postačí studentům mít pouze základní algebraické znalosti, je ten, že kombinatorika nedává přesný návod, jak úlohy řešit a většinou ani není možné se o správnosti výsledku přesvědčit zkouškou. Každý student vám řekne, že kombinatorické úlohy jsou zábavné a ze života. Tento fakt však kombinatoriku

nikdy nedostane z "pytle" nejobávanějších středoškolských matematických okruhů, neboť kombinatorické úlohy jsou oproti úlohám z ostatních okruhů jiné - neexistuje obecný algoritmus či vzorec, pomocí kterého by se dal řešit jeden příklad za druhým.

Na mnoha školách se učí kombinatorika standardním způsobem, tzn. studenti se nejprve naučí kombinatorické pravidlo součtu a součinu, poté se seznámí s variacemi, permutacemi a kombinacemi bez opakování spolu s danými vzorci pro výpočet příkladů a řešení jednotlivých úloh probíhá následovně: nejprve je nutné uhodnout, o jaký typ příkladu se jedná a poté se určuje n a k ve vzorci. Stejným stylem se řeší kombinatorické úlohy s opakováním a studenti tak nikdy neproniknou do tak krásné části matematiky a bohužel ji často ani nepochopí.

"Proč nezkusit vyučovat kombinatoriku jinak?"

Na šachovnici 8 x 8 umístěte obě věže (tzn. černou a bílou) tak, aby černá stála na černém poličku, bílá na bílém a aby jedna nevyhodila druhou, tzn. obě věže se nesmí nacházet ve stejném řádku ani ve stejném sloupci. (Pozor: neodpovídá pravidlům šachové hry.)

Řešení:

- možných 32 políček
- možných 24 políček

$32 \cdot 24 = 768$
možností umístění

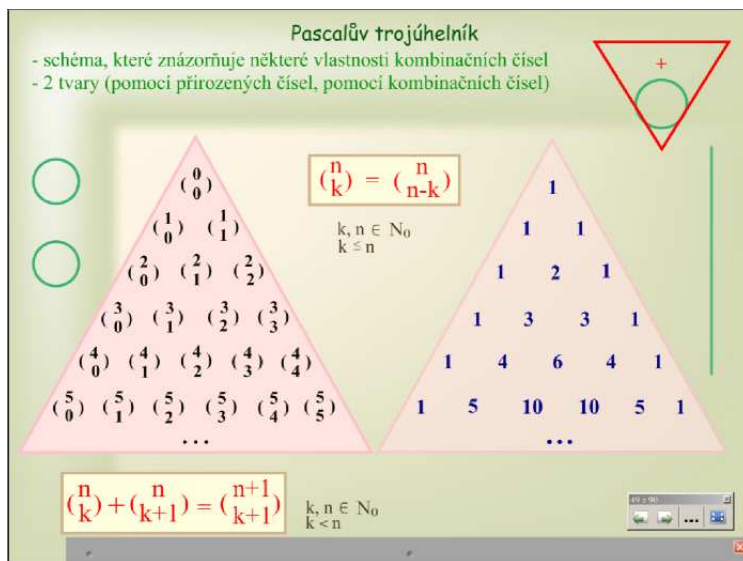
kvíz č. 4

Obrázek 2 - ukázka připravené úlohy na interaktivní tabuli

Rozhodla jsem se zkusit odučit kombinatoriku¹¹ nestandardně a to s právě s využitím interaktivní tabule SMART Board. Pro studenty byla interaktivní tabule v podstatě novinkou, neboť do školy byla nainstalovaná začátkem roku. Studentům se neprozradily vzorce k jednotlivým typům kombinatorických příkladů, a tak řešili úlohy pouze s využitím pravidla součtu a součinu. V průběhu výuky se samozřejmě pro ulehčení výpočtů seznámili s kombinačním číslem a s pojmem $n!$, ale o názvech *variace*, *permutace*, *kombinace* se dozvěděli až ke konci celého výukového procesu.

¹¹Kombinatoriku jsem odučila v roce 2009 ve druhém ročníku čtyřletého studia na jednom českobudějovickém gymnáziu.

Díky interaktivní tabuli bylo možné studentům zpestřovat hodiny různými kvízy, jež úzce souvisely se zadáním připravených úloh. Pro lepší pochopení látky byly připraveny prezentace a animace, objevovaly se různé obrázky a studenti se v hodinách aktivně zapojovali.



Obrázek 3 - Pascalův trojúhelník na interaktivní tabuli

Během celého procesu studenti psali dva testy, které měly zjistit, do jaké míry pochopili probíranou látku, kteří studenti mají s kombinatorikou větší problémy, jaké byly nejčastější způsoby řešení jednotlivých příkladů, zda se známky z testů markantně liší od známek z jiných matematických okruhů apod.

Mohu konstatovat, že výsledky mě docela mile překvapily. Nejenom, že žáky výuka kombinatoriky zjevně bavila, ale známky z obou testů se vůbec nelišily od ostatních získaných známek z matematiky během celého roku, což podle mého názoru je velmi pozitivní zjištění. Stejně testy mi napsali i studenti jiných gymnázií, kteří se učili kombinatoriku standardně (tj. se vzorci a bez interaktivní tabule) a výsledky "mé třídy" byly ve srovnání velmi pozitivní, neboť statisticky tito studenti, kteří se učili netypickým způsobem, dopadli lépe. Studenti, kteří se učili kombinatoriku se vzorci, se je snažili velmi často použít a málo kdy příklad správně vyřešili pouze vlastním úsudkem bez použití vzorců. Pokud nedostali přímo klasickou úlohu, která se dala vyřešit pouze dosazením do vzorce, často se objevovaly s jejím vyřešením potíže. Naopak studenti, kteří se učili nestandardně a bez vzorců, mnohem více nad příklady přemýšleli, což se velmi zřetelně projevovalo během vyučovacích hodin, kdy kladli otázky, zda by se úloha

nedala řešit jiným způsobem, nad řešením diskutovali a vzájemně si daná řešení vysvětlovali.

Na konci celého výukového procesu většina studentů hodnotila výuku pozitivně i přes to, že kombinatorika opravdu není lehké téma, což byla pro mě krásná satisfakce.

SOUTĚŽ! Doplněte výrazy do čtverce tak, aby v každém řádku a v každém sloupci byl součet roven 20.

$\binom{6}{2}$				$\frac{\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}}{2! \cdot 2!}$
$\frac{3!}{2}$				$\binom{2}{1}$
$\frac{4!}{\binom{3}{1} + \binom{0}{0}}$				$\binom{5}{3} - \binom{3}{1}$
$4 \cdot \binom{4}{4}$				$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (4)^{1/2} + 3!$
				$2 \cdot \binom{4}{2}$

Obrázek 4 - ukázka soutěže

4. Závěr

Interaktivní tabule studentům bezpochyby výuku zatraktivnily, probíranou látku ulehčily a umožnily látku do jisté míry lépe pochopit. Samozřejmě není možné se domnívat, že díky interaktivní tabuli se zvýší zájem studentů o danou problematiku, nicméně si myslím, že vhodně používaná interaktivní tabule je bezesporu vhodnou pomůckou do škol.

Literatura

- [1] KAFKOVÁ, M.: *Oblíbenost středoškolské matematiky a využití interaktivní tabule*. Plzeň, 2008.
- [2] KAFKOVÁ, M.: *Výuka kombinatoriky s využitím interaktivní tabule*. In Sborník konference Užití počítačů ve výuce matematiky, České Budějovice, 2009, s. 102-107.

OBJAVOVANIE ŠTRUKTÚRY PRAVDEPODOBNOSTNÝCH ÚLOH U ŽIAKOV

Mária Kolková

*Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika
Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: maria.kolkova@upjs.sk*

Abstract. In our research we investigate probabilistic thinking of pupils of the 8th class of an elementary school. We have found out that only few of pupils were able to construct corresponding discrete probability space when solving probabilistic tasks. However, our analysis shows that low level of probabilistic thinking is not always the reason.

1. Úvod

Štruktúru v pravdepodobnostných úlohách môžeme vyjadriť vďaka pravdepodobnostnému priestoru¹². Plocki pripisuje pravdepodobnostnému priestoru pri riešení úloh z počtu pravdepodobnosti kľúčovú úlohu (porov. napr. [1]). Na základe toho sme sa nazdávali, že je veľmi vhodné pri vyučovaní počtu pravdepodobnosti na začiatku riešenia úlohy z počtu pravdepodobnosti upriamiť žiakov na konštrukciu pravdepodobnostného priestoru, ktorý zodpovedá danej pravdepodobnostnej situácii.

Na konci školského roka 2009/2010 autorka učila celok Počet pravdepodobnosti v dvoch triedach 8. ročníka základnej školy. Výučba trvala päť hodín. Predchádzal jej krátky úvod. Po skončení výučby žiaci vypracovali dve úlohy. Jednej z nich sa venuje tento príspevok. Počas výučby bol kladený dôraz na určovanie všetkých možných výsledkov náhodného

¹²Ďalej v príspevku budeme uvažovať len o úlohách, ktorých modelom je diskretný pravdepodobnostný priestor. Pod diskretným pravdepodobnostným priestorom rozumieme v príspevku dvojicu, ktorú tvorí neprázdna množina (nanajvýš spočítateľná) a rozdelenie pravdepodobnosti medzi jej prvky (presnejšie pozri v [1], s. 36 a 62). Keď ďalej píšeme pravdepodobnostný priestor, myslíme diskretný pravdepodobnostný priestor. Toto skrátené označenie je tiež podľa [1].

pokusu. Veľa času bolo venovaného rozlišovaniu viacerých na vzhľad rovnakých objektov (napríklad kartičiek pexesa).¹³ Okrem teoretického prístupu mali žiaci viackrát príležitosť uvažovaný pokus aj simulovať.

2. Klasifikácia riešení

Príspevok je postavený na analýze žiackych riešení nasledujúcej úlohy:

Úloha 1

Na stole A sú rozložené tri karty. Len jedna z nich je eso. Otočíme *jednu* kartu. Na stole B je rozložených šesť kariet. Len jedna z nich je eso. Otočíme *dve* rôzne karty.

Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B? Ak nie, pri ktorom stole je väčšia šanca otočiť eso?

Úloha je pomerne štandardná. Jej osobitosťou je, že v nej vystupujú dva rozdielne pravdepodobnostné priestory.

Žiaci mohli k úlohe pristupovať viacerými spôsobmi. Uvádzame tie, s ktorými súvisia riešenia žiakov.

Riešenie 1a: Šanca otočiť eso na stole A je $\frac{1}{3}$, pretože sú tri možné výsledky (všetky rovnako pravdepodobné) a len v jednom z nich otočené eso. Šanca otočiť eso na stole B je $\frac{5}{15}$, teda tiež $\frac{1}{3}$, pretože všetkých možných dvojíc je 15 a v 5 z nich je medzi otočenými kartami eso.

Riešenie 1b: Šanca otočiť eso na stole A je $\frac{1}{3}$, pretože sú tri možné výsledky (všetky rovnako pravdepodobné) a len v jednom z nich otočené eso. Šanca otočiť eso na stole B je $\frac{10}{30}$, teda tiež $\frac{1}{3}$, pretože všetkých možných dvojíc losovaných postupne je 30 a v 10 z nich je medzi otočenými kartami eso.

Riešenie 2: Šanca otočiť eso na stole A je $\frac{1}{3}$, pretože sú tri možné výsledky (všetky rovnako pravdepodobné) a len v jednom z nich otočené eso. Šanca otočiť eso na stole B je $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$, teda tiež $\frac{1}{3}$, pretože buď otočím eso pri prvom pokuse alebo pri druhom.

Riešenie 3: Šanca otočiť eso na stole A je $\frac{1}{3}$, pretože sú tri možné výsledky (všetky rovnako pravdepodobné) a len v jednom z nich otočené eso. Šanca otočiť eso na stole B je $\frac{2}{6}$, teda tiež $\frac{1}{3}$, pretože šesť kariet vyložených na stole môžeme reprezentovať usporiadanou šesticou, v ktorej dve konkrétne pozície (napr. prvé dve) budú navyše vyjadrovať, že karta na tejto pozícii bude vylosovaná. Potom šanca, že eso sa dostane na jednu z týchto dvoch pozícií, je $\frac{2}{6}$.

Prístupy žiakov pri riešení úlohy sú zachytené v Tabuľke 1.

¹³ Abstraktný pojem *pravdepodobnostný priestor* sme so žiakmi nepoužívali.

Kategória riešení	Počet riešení
Len jednoduchý pokus	5
Intuitívne	1
Skratka	4
Postupné losovanie	1
Cez konštrukciu chybného pravdepodobnostného priestoru	1
Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru	7
Iné	7
Spolu	26

Tabuľka 1 – Základná klasifikácia riešení

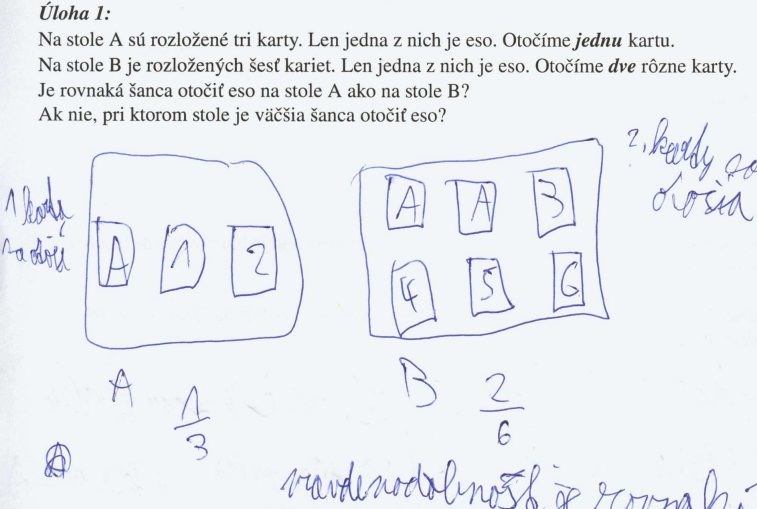
Riešenia zaradené do kategórie *Len jednoduchý pokus* zvažujú počet kariet rôznych od esa alebo pomer es na počet kariet. Títo riešitelia vlastne pracujú len s jednoduchým pokusom - losovanie jedného objektu (jednej karty). Všetci sa priklonili k väčšej šanci pre stôl A. Svoju odpoveď prípadne zdôvodňujú aj presnejšie - zlomkom alebo pomerom.

Riešenie označené ako *Intuitívne* zdôrazňuje aj počet kariet na stole, aj počet losovaných kariet, ale rozhodnutie je len odhadom bez zdôvodnenia.

Viacrát sa opakovalo riešenie označené ako *Skratka*. Žiaci určili šancu otočiť medzi dvomi kartami na stole B bez vysvetlenia ako $\frac{2}{6}$. Je možné, že 2 v čitateli zlomku vyjadruje počet losovaných kariet a 6 v menovateli počet všetkých kariet na stole. Ak by žiaci uviedli $\frac{2}{6}$ z tohto dôvodu, svedčilo by to o neporozumení toho, že do pomeru je potrebné dať výsledky náhodného pokusu, ktorými sú v tomto prípade dvojice. Je možné, že žiaci intuitívne cítili rovnosť šanci, no nevedeli ju zdôvodniť. Rovnosť platí všeobecnejšie. Aj pri losovaní jednej z n kariet (medzi ktorými je jedno eso), aj pri losovaní k z $k \cdot n$ kariet (medzi ktorými je jedno eso), je šanca vylosovať eso $\frac{1}{n}$. Zdôvodniť to možno úpravou $\frac{\binom{k \cdot n - 1}{k - 1}}{\binom{k \cdot n}{k}}$ na $\frac{1}{n}$ alebo úvahou zachytenou v Riešení 3. Aj Riešenie 3. však ešte považujeme pre žiakov 8. ročníka za náročné. Obrázok 1 ukazuje jedno z riešení *Skratka*.

Riešenie zaradené do podkategórie *Postupné losovanie* je pozoruhodné. Jeho autorovi je pravdepodobne bližší procesuálny prístup k riešeniu úlohy ako konceptuálny. Vie, že ak by aj na stole B mal otočiť len jednu kartu, tak šanca, že to bude eso je $\frac{1}{6}$. Intuitívne odhaduje, že na dva pokusy bude šanca dvakrát väčšia. (V preškrtnutom texte dokonca píše $\frac{2}{12}$. Môže to vyjadrovať snahu o vytvorenie dvojnásobku $\frac{1}{6}$.) Intuícia je správna, hoci matematicky svoju odpoveď zatiaľ nevie zdôvodniť. Zdôvodnenie by zodpovedalo Riešeniu 2. Riešenie *Postupné losovanie* je na obrázku 2.

Úloha 1:
 Na stole A sú rozložené tri karty. Len jedna z nich je eso. Otočíme **jednu** kartu.
 Na stole B je rozložených šesť kariet. Len jedna z nich je eso. Otočíme **dve** rôzne karty.
 Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B?
 Ak nie, pri ktorom stole je väčšia šanca otočiť eso?



1 karta so číslom

2. karty so číslom

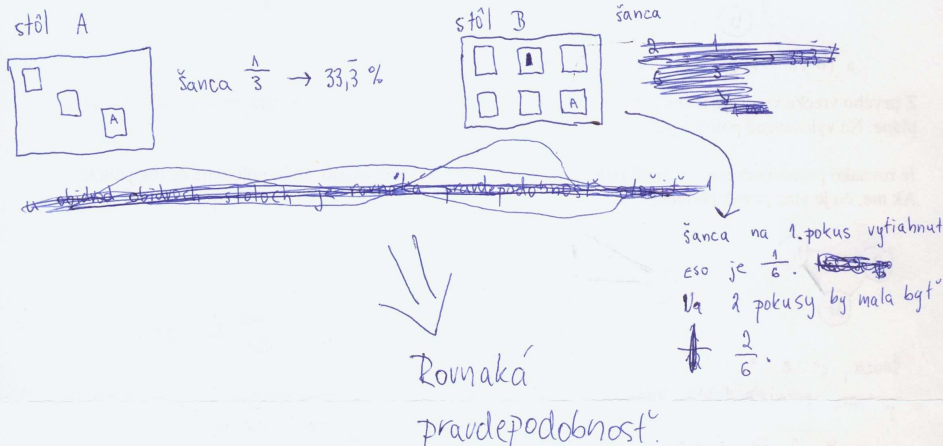
A $\frac{1}{3}$

B $\frac{2}{6}$

pravdepodobnosť je rovnaká

Obrázok 1 – Riešenie typu *Skratka*

Úloha 1:
 Na stole A sú rozložené tri karty. Len jedna z nich je eso. Otočíme **jednu** kartu.
 Na stole B je rozložených šesť kariet. Len jedna z nich je eso. Otočíme **dve** rôzne karty.
 Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B?
 Ak nie, pri ktorom stole je väčšia šanca otočiť eso?



stol A

šanca $\frac{1}{3} \rightarrow 33,3\%$

stol B

šanca

šanca na 1. pokus vytiahnuť eso je $\frac{1}{6}$.

Na 2 pokusy by mala byť $\frac{2}{6}$.

Rovnaká pravdepodobnosť

Obrázok 2 – Riešenie typu *Postupné losovanie*

Žiaci zaradení do kategórie *Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru* riešili úlohu spôsobom 1a alebo 1b. Dvojice buď vypísali alebo ich znázornili grafom. Ukážky sú uvedené na Obrázku 3 a Obrázku 4.

Úloha 1:

Na stole A sú rozložené tri karty. Len jedna z nich je eso. Otočíme **jednu** kartu.
Na stole B je rozložených šesť kariet. Len jedna z nich je eso. Otočíme **dve** rôzne karty.
Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B?
Ak nie, pri ktorom stole je väčšia šanca otočiť eso?

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

5:10

Tu oboch stolech je rovnako veľká pravdepodobnosť vyložiť eso.

Obrázok 3 – Riešenie typu *Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru I*

Úloha 1:

Na stole A sú rozložené tri karty. Len jedna z nich je eso. Otočíme **jednu** kartu.
Na stole B je rozložených šesť kariet. Len jedna z nich je eso. Otočíme **dve** rôzne karty.

Aké sú možné prípady otočenia jednej karty na stole A? Aké sú pravdepodobnosti týchto prípadov?

A $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

B $\frac{10}{30} = 33\frac{1}{3}\%$

12, 13, 14, 15, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

12, 13, 14, 15, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

34, 32, 31, 35, 36, 41, 42, 43, 45, 46

51, 52, 53, 54, 56, 61, 62, 63, 65, 66

Aké sú možné prípady otočenia dvoch kariet na stole B? Aké sú pravdepodobnosti týchto prípadov?

$\frac{1}{3}$ a $\frac{10}{30}$ sú to rovnaké pravdepodobnosti.

Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B?
Ak nie, pri ktorom stole je väčšia šanca otočiť eso?

Áno je rovnaká

Obrázok 4 – Riešenie typu *Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru II*

V riešení zaradenom do kategórie *Cez konštrukciu chybného pravdepodobnostného priestoru* žiak predpokladal, že na stole B sú dve esá.

Kategória *Iné* obsahuje riešenia, ktoré obsahujú len odpoveď, nie sú pre nás zrozumiteľné alebo nie sú porozumené žiakom.

3. Vzťah medzi schopnosťou konštruovať pravdepodobnostný priestor a porozumením pravdepodobnosti

Pýtali sme sa, či riešenie označované ako *Skratka* nie je šikovnejšie ako riešenie z kategórie *Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru*.

Osožné v súvislosti s položenou otázkou je všimnúť si klasifikácie odpovedí vo výskume Watson & Kelly [2]. Odpovede žiakov viacerých ročníkov (3. - 13.) zaradili do jednej zo šiestich kategórií podľa stupňa porozumenia pravdepodobnostnému priestoru založeného na troch hodoch kockou.

Watson & Kelly použili vo svojom výskume nasledujúcu úlohu. Prostredníctvom nej ukážeme, aké odpovede zodpovedali jednotlivým kategóriám.

Úloha 2

Predstav si pravidelnú kocku, ktorá má štyri steny čierne a dve biele. Touto kockou sa hodí trikrát. Čo je viac pravdepodobné:

- V dvoch hodoch padne čierna stena, v jednom hode padne biela stena.
- Vo všetkých troch hodoch padne čierna stena.
- Obe možnosti (a) a (b) sú rovnako pravdepodobné?

Ďalej uvádzame názvy kategórií s charakteristickou odpoveďou.

- *Nezapadajúce*: Nedá sa povedať... neviem.
- *Zohľadňujúce neurčitost'*: Obe (a) aj (b) sú rovnako pravdepodobné, pretože nevieme, čo sa môže stať.
- *Založené na pozorovaní jedného hodu kockou*: Viac pravdepodobné je (a), pretože čiernych stien je viac. Ale môže padnúť aj biela.
- *Založené na intuitívnych pomeroch*: Pomer čiernych stien ku bielym je 4:2. To je to isté ako 2:1. V troch hodoch by mali padnúť dve čierne steny a jedna biela. Viac pravdepodobné je (a).
- *Čiastočne systematické*: Viac pravdepodobné je (b). Je šanca 2:3, že padne čierna stena. To je viac ako 1:3, že padne biela. Šanca, že v troch hodoch padne čierna stena je 8:27. To je viac ako 4:27.
- *Úplne systematické*: Viac pravdepodobné je (a), pretože môže padnúť biela, čierna, čierna alebo čierna, biela, čierna alebo čierna, čierna, biela. Teda šanca pre (a) je $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$. V prípade (b) je len jedna možnosť: čierna, čierna, čierna, teda šanca $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

Porovnali sme kategórie odpovedí zo štúdie Watson & Kelly s riešeniami našej úlohy. Sprehľadňuje to Tabuľka 2.

	Zohľadňujúce neurčitosť
Len jednoduchý pokus	Založené na pozorovaní základnej kocky
Intuitívne Skratka Postupné losovanie	Založené na intuitívnych pomeroch
Cez konštrukciu chybného pravdepodobnostného priestoru Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru	Čiastočne systematické a Úplne systematické
Iné	Nezapadajúce

Tabuľka 2 – Porovnanie dvoch klasifikácií

Zhoda medzi dvomi klasifikáciami je zaujímavá. Riešenia z kategórie *Skratka* sme prirovnali k riešeniam založeným na intuitívnych pomeroch. Myslíme si, že prirovnanie je primerané, pretože zdôvodnenie v týchto úlohách naozaj chýbalo. Klasifikácia Watson & Kelly posudzuje odpovede žiakov z pohľadu ich porozumenia pravdepodobnostnému priestoru. Z tohto pohľadu sú riešenia *Cez pravdepodobnostný priestor* prirodzene na vyššej úrovni ako riešenia *Skratka*. Rozdiel medzi týmito dvomi typmi riešení je však aj v miere podloženia svojej odpovede matematickým zdôvodnením.

Hoci riešitelia z kategórie *Skratka* mali správnu intuíciu, myslíme si, že by svoju odpoveď mali problém matematicky obhájiť. Toto stavia riešenie *Cez pravdepodobnostný priestor* pred riešenie *Skratka*.

V súvislosti s hľadaním odpovede na položenú otázku prináša náš malý výskum jedno zaujímavé zistenie. Trinásti žiaci mali v zadaní úlohy aj pomocné otázky (v písomnej forme):

1. Aké sú možné prípady otočenia jednej karty na stole A? Aké sú pravdepodobnosti týchto prípadov?
2. Aké sú možné prípady otočenia dvoch kariet na stole B? Aké sú pravdepodobnosti týchto prípadov?

Zaujímavé sú riešenia troch žiakov, ktorí vďaka pomocným otázkam skutočne prvky pravdepodobnostného priestoru vypísali, ale tento výpis pri riešení ďalej nepoužili. Na Obrázku 5 je znázornené jedno z nich.

Riešenia mali pripravenú pôdu pre riešenie *Cez pravdepodobnostný priestor*, ale nakoniec využili riešenie *Skratka* alebo *Len jednoduchý pokus*. Tieto riešenia ukazujú, že ak žiak nepoužije pravdepodobnostný priestor, nemusí to byť v dôsledku toho, že by ho nevedel skonštruovať. Pravdepodobne zatiaľ ešte nerozumie jeho významu. Môže to svedčiť v prospech toho,

že riešenie *Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru* je z pohľadu pravdepodobnostného myslenia kvalitnejšie ako riešenie *Skratka*.

Úloha 1:

Na stole A sú rozložené tri karty. Len jedna z nich je eso. Otočíme *jednu* kartu.

Na stole B je rozložených šesť kariet. Len jedna z nich je eso. Otočíme *dve* rôzne karty.

Aké sú možné prípady otočenia jednej karty na stole A? Aké sú pravdepodobnosti týchto prípadov?

eso - ľná	ľná - ľná	$\frac{1}{3}$
eso - ľná	ľná - eso	
ľná - ľná		
ľná - eso		

Aké sú možné prípady otočenia dvoch kariet na stole B? Aké sú pravdepodobnosti týchto prípadov?

eso - ľná	ľná - eso	ľná - eso	ľná - eso	eso - ľná	ľná - eso
eso - ľná	ľná - ľná	ľná - eso ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná
eso - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	- -	- -
eso - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	- -	- -
eso - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	ľná - ľná	- -	- -
					$\frac{2}{6}$

Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B?

Ak nie, pri ktorom stole je väčšia šanca otočiť eso?

Je rovnaká šanca otočiť eso na stole A ako na stole B.

Obrázok 5 – Riešenie s výpisom všetkých možných výsledkov a záverom nie na jeho základe

4. Záver

Konštrukcia pravdepodobnostného priestoru umožňuje žiakom matematicky zdôvodniť svoju odpoveď. Toto sme ohodnotili ako jednu z predností riešení *Cez konštrukciu pravdepodobnostného priestoru*. Na konkrétnych riešeniach sme ukázali, že samotné určenie všetkých možných výsledkov náhodného pokusu ešte nemusí znamenať, že žiak rozumie jeho súvisu s pravdepodobnosťou. Bolo to pre nás prekvapivým zistením.

Na druhej strane však správna intuícia žiakov z kategórie *Skratka* je cenná. Naznačuje, že riešenie cez pravdepodobnostný priestor je možno niekedy zbytočne zložitú. Tiež *Riešenie 2* vyjadruje prístup žiakov, ktorí myslia skôr procesualne. Je trochu iný ako riešenie cez pravdepodobnostný priestor. Zistili sme tiež, že konštruovanie pravdepodobnostného priestoru žiakmi nie je také prirodzené, ako sme sa nazdávali.

Riešenia žiakov sa teda stali pre nás bohatým zdrojom podnetov v súvislosti s otázkou, ako súvisí schopnosť konštruovať pravdepodobnostný priestor a porozumenie pravdepodobnosti.

Podakovanie

Veľká vďaka patrí Jarke Ranošovej, s ktorou autorka konzultovala žiacke riešenia na Letnej škole z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2010. Ona objavila *Riešenie 3*.

Literatúra

- [1] PŁOCKI, A.: *Pravdepodobnosť okolo nás. Stochastika v úlohách a problémoch okolo nás*. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok 2007.
- [2] WATSON, J. M., KELLY, B. A.: *Development of student understanding of outcomes involving two or more dice*. International Journal of Science and Mathematics Education (2009) 7: 25 - 54.

CONJECTURING: AN INVESTIGATION INVOLVING POSITIVE INTEGERS

Jan Kopka^a, Leonard Frobisher^b, George Feissner^c

^a*Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem
České mládeže 8, 400 96 Ústí nad Labem, Czech Republic
e-mail: kopkaj@sci.ujep.cz*

^b*58 Buckstone Avenue, Leeds
LS 17 5HP, England
e-mail: ljfrobisher@btinternet.com*

^c*State University of NY, College at Cortland
Cortland, New York, 13045, USA
e-mail: gffeisner@hotmail.com*

Abstract. Here we demonstrate investigative approach and creation of conjectures with the help of a problem. A conjecture is a statement which appears reasonable, but whose truth has not yet been established. Conjecturing forms the backbone of mathematical thinking and reasoning.

We present an approach to investigate a "mathematical situation." We choose not to define "mathematical situation" but will illustrate it with several examples. Since it is the first step on what can be a long and interesting journey, we feel it is best to allow it to be as general as possible.

A typical method of investigating a mathematical situation follows this sequence of processes:

**Mathematical situation - experimentation - conjecture -
test - proof - mathematical theorem.**

The central activity during the investigation of many mathematical problem situations is that of conjecturing. A conjecture is a statement which appears reasonable, but whose truth has not yet been established. Conjecturing forms the backbone of mathematical thinking and reasoning. We look at a number of famous and interesting conjectures associated with positive integers which can be explored at different levels in elementary and secondary schools.

Example 1 (Goldbach's Conjecture):

Many millions of even numbers have been examined and every one tested can be written as the sum of two prime numbers. Some can be written this way in several different forms. For instance,

$$4 = 2+2, 6 = 3+3, 8 = 3+5, 10 = 5+5 = 3+7, 12 = 5+7, 14 = 7+7 = 3+11.$$

But as it is impossible to test every even number somewhere there may be at least one even number that cannot be written as the sum of two prime numbers. So in mathematics there is the very famous Goldbach's **conjecture**:

Every even number greater than 2 is the sum of two prime numbers.

We exclude 2 since the only way to write 2 as the sum of two positive integers is $1 + 1$ and we do not consider 1 a prime number.

But as yet no one has found a proof that every even number has this property, and it may not even be true. So the statement is "only" a conjecture, not a mathematical theorem. In the future some mathematician may prove the conjecture to be true, but equally some other mathematician may prove it not to be true.

The Prussian mathematician Christian Goldbach (1690 - 1764) made this conjecture in a conversation with the great Euler who later wrote Goldbach to say that "I regard this as a completely certain theorem, although I cannot prove it." It remains unproven to this day and indeed may not be true!

Example 2 (Ulam's Conjecture):

This example involves producing finite sequences.

Choose any positive integer n .

1. If n is even, divide it by 2.
2. If n is odd, multiply it by 3, add 1, then divide it by 2.
3. If the new number is 1, stop; otherwise, repeat.

For example, if $n = 8$, we obtain the sequence $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

If $n = 13$, we obtain $13 \rightarrow 20((13 \cdot 3 + 1)/2) \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8((5 \cdot 3 + 1)/2) \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Will we always get 1? We can experiment further and then state a conjecture:

Conjecture: *For any positive integer n , the above procedure will always terminate with 1.*

Although often called Ulam's Conjecture after the Polish-American mathematician Stanislaw Ulam (1909 - 1984), it was originally stated by the German mathematician Lothar Collatz (1910 - 1990). Paul Erdős remarked that "Mathematics is not yet ready for such problems." As with Goldbach's Conjecture, it is unproven.

It is not true that all conjectures lead to unsolved problems. Now we demonstrate investigative approach and creation of conjectures with the help of the following problem.

Problem: Sum of Consecutive Positive Integers

What positive integers can be written as a sum of consecutive positive integers? For instance, $7 = 3 + 4$ and $15 = 4 + 5 + 6$, but we cannot write 8 as such a sum (try it).

Solution:

Because we do not know anything about it we must start by using the process of experimentation. There are at least two ways of doing this.

- The first way is some times known as the heuristic 'Working backwards'. Take sets of two, then three, then four consecutive numbers, and so on, and find their sums.

For example:

$$\begin{array}{lll}
 1 + 2 = 3 & 1 + 2 + 3 = 6 & 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
 2 + 3 = 5 & 2 + 3 + 4 = 9 & 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \\
 3 + 4 = 7 & 3 + 4 + 5 = 12 & 3 + 4 + 5 + 6 = 18 \\
 \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

This shows us that the integers 3, 5, 7, 6, 9, 12, 10, 14, 18, can be written as the sum of consecutive numbers. Let's order these numbers to see if we can see a pattern.

$$3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 18, \dots$$

If we continue this approach perhaps we might fill in the missing numbers in this sequence or notice a pattern in possible missing numbers. We leave you to continue this approach.

These are the results of experimenting with the integers 1, 2, 3, 4 and 5:

$$\begin{array}{ll}
 1 = 0 + 1 & \text{Not valid! We must use positive integers and 0 is not positive.} \\
 2 = & \text{We cannot write 2 as the sum of consecutive positive integers.} \\
 3 = 1 + 2 & \text{Yes!} \\
 4 = & \text{Again, we cannot find a sum.} \\
 5 = 2 + 3 & \text{Yes!}
 \end{array}$$

After experimenting with the first five integers it is possible to make a conjecture:

The experimentation with integers 6 to 11 shows that conjecture 1 is not true. For example, 6 and 10 are even integers, and $6 = 1 + 2 + 3$ and $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ disprove it. But what about the integer 8? Is it possible to produce another conjecture knowing that the integers 1, 2, 4 and 8 cannot be written as the sum of consecutive integers? What is special about 1, 2, 4 and 8? We know them as powers of 2. Although we have only four of these special numbers we claim:

Conjecture 2: *Powers of two are cannot be written as the sum of consecutive positive integers.*

If we test conjecture 2 with the help of number $16 = 2^4$, we more confident that this conjecture is true. But at this moment we do not know how to construct a proof.

Now as we can continue our **experimentation** working systematically with more and more integers it is possible to say:

Conjecture 3: *All numbers with the exception of powers of two are sums of consecutive positive integers.*

How can we prove conjectures 2 and 3? We must find what distinguishes powers of two from other numbers and then show how this property relates to the property of being a sum of consecutive numbers.

From divisibility theory, we know that the only prime factor of a power of two is two itself. Thus, all factors of a power of two other than 1 are even (indeed, they are also powers of two). On the other hand, any positive integer not a power of two must have at least one odd factor other than 1.

Example:

Factors of $2^5 = 32$ are: 32, 16, 8, 4, 2, 1. All factors except 1 are even.

Factors of 24 are: 24, 12, 6, 4, 3, 2, 1. There is an odd factor other than 1. It is number 3.

Now we have a distinguishing property, so we can reformulate our conjectures.

Conjecture 2a: *If a positive integer has only even factors other than 1, then it cannot be written as the sum of consecutive positive integers.*

Conjecture 3a: *If a positive integer has at least one odd factor other than 1, then it can be so written.*

Further experimentation can help us see how the presence of an odd factor allows us to write an integer as a sum of consecutive positive integers.

Experimentation: Let us take some numbers with at least one odd factor, say multiples of 3, 5 and 7, and examine them. Our experimentations show the following forms:

Multiples of 3:

$$1 \cdot 3 = 1 + 2$$

$$\mathbf{2} \cdot 3 = 1 + \mathbf{2} + 3$$

$$\mathbf{3} \cdot 3 = \quad 2 + \mathbf{3} + 4$$

$$\mathbf{4} \cdot 3 = \quad \quad 3 + \mathbf{4} + 5$$

Multiples of 5:

$$1 \cdot 5 = 2 + 3$$

$$2 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$\mathbf{3} \cdot 5 = 1 + 2 + \mathbf{3} + 4 + 5$$

$$\mathbf{4} \cdot 5 = \quad 2 + 3 + \mathbf{4} + 5 + 6$$

In general

$$g \cdot 3 = (g-1) + g + (g+1)$$

$$g \cdot 5 = (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2)$$

Multiples of 7:

$$1 \cdot 7 = 3 + 4$$

$$2 \cdot 7 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$3 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\mathbf{4} \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$\mathbf{5} \cdot 7 = \quad 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

$$\mathbf{6} \cdot 7 = \quad \quad 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

In general

$$g \cdot 7 = (g-3) + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + (g+3)$$

Note that these general formulas only hold when g is sufficiently large. In the above examples, the cases where the formula holds true are those where some of the numbers appear in bold-face.

And now generally: If positive integer n has an odd factor $2k+1$ (k is positive integer), it means that n can be written in the form

$$n = g(2k+1) \tag{1}$$

then n can also be written as a sum

$$n = (g-k) + \cdots + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + \cdots + (g+k) \tag{2}$$

Really, if we add the terms on the right hand side of formula (2), we get the term on the right hand side of formula (1).

Formula (2) says that such an n is the sum of $2k+1$ consecutive integers, the middle one being g . This is almost Conjecture 3a, but unfortunately, not all the integers need be positive! For instance, if we apply the formula to $n = 3, 5, 7, 10$, and 14 , we obtain

$$3 = 1 \cdot 3 = \mathbf{0} + 1 + 2$$

$$5 = 1 \cdot 5 = -\mathbf{1} + \mathbf{0} + 1 + 2 + 3$$

$$7 = 1 \cdot 7 = -\mathbf{2} + (-\mathbf{1}) + \mathbf{0} + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$10 = 2 \cdot 5 = \mathbf{0} + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$14 = 2 \cdot 7 = -\mathbf{1} + \mathbf{0} + 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

However, this last experiment has shown us exactly what we need to do to show that Conjecture 3a is true. We present it as a proof.

Proof of conjecture 3a): Let positive integer number n have an odd factor $2k + 1$. Then n can be written in the form (1). Now we know, that n can be written also in the form

$$n = (g - k) + \cdots + (g - 2) + (g - 1) + g + (g + 1) + (g + 2) + \cdots + (g + k) \quad (2)$$

where g is also factor of n .

How can we get only two or more positive numbers on the right hand side of formula (2)? If there is zero, we delete it. All we have to do is counteract the negative terms by the corresponding positive terms. There are more positive terms than negative ones because the total sum is positive. After this procedure we get the even number of consecutive positive terms.

So after this proof we rename conjecture 3a as a theorem:

Theorem 1: If a positive integer n has an odd factor other than 1, then it can be written as the sum of consecutive positive integers.

Indeed, our investigation has given us more than what the theorem states; not only do we know that it can be done, but we know how to do it!

Now we have enough experiences to believe that the opposite theorem to theorem 1 also holds.

Theorem 2: If a positive integer n can be written as the sum of consecutive positive integers, then it must have an odd factor other than 1.

Proof: We write n as $n = g_1 + g_2 + \cdots + g_r$ where $g_1, g_2, \dots, g_r$ are consecutive positive integers. We consider two cases:

- (a) r is an odd number
- (b) r is an even number.

Case (a): We can write n in the form shown in Formula 1, and then g will be the number in the middle of the sum. The fact that r is odd guarantees there is a middle term. Then, exactly as in our experimentation, we can then write n in the form $n = g^2 \cdot (2k + 1)$ so n has an odd factor greater than 1, namely $2k + 1$.

Case (b): We are unable to proceed as in Case (a) since now there is no middle term. However, we "augment" the sum $g_1 + g_2 + \cdots + g_r$ by adding to it

$$-(g_1 - 1) + \cdots + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + (g_1 - 1).$$

Note first that we have really just added on 0, since all the positive terms cancel with the corresponding negative ones. Thus, the new sum is still equal to n . Second, we have added on an odd number of terms - an equal number of positive and negative terms and 0. Since we began with an even number of terms in the sum $g_1 + g_2 + \cdots + g_r$ we now have an odd number of terms in the augmented sum, namely an odd number of consecutive integers whose sum is n . The situation is now exactly as it was in Case (a), so we can conclude that n has an odd factor greater than 1.

It is difficult to say exactly how this "trick" of augmenting the sum in Case (b) was conceived. That is part of the creative side of mathematics. However, we can say with confidence that had we not been thinking of sums of consecutive integers and of Formula (2), the trick would not have been thought of.

We now put both theorems together:

Theorem 3: A positive integer n can be written as the sum of consecutive positive integers if and only if the positive integer n has an odd factor other than one.

Corollary of theorem 3 is conjecture 2. The powers of two have no odd factors except 1, so these powers cannot be expressed as the sum of consecutive positive integers. Therefore we can rename conjecture 2 as theorem 4:

Theorem 4: Powers of two are not the sum of consecutive positive integers.

Now we are inspired for another investigation.

Some positive integers can be written as a sum of consecutive positive integers in different ways. For example:

$$\begin{array}{ll} 21 = 3 \cdot 7 & 21 = (0+)1 + 2 + \mathbf{3} + 4 + 5 + 6 \\ & = 6 + \mathbf{7} + 8 \\ & = 10 + 11 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 & 30 = 9 + \mathbf{10} + 11 \\ & = 4 + 5 + \mathbf{6} + 7 + 8 \\ & = 6 + 7 + 8 + 9 \end{array}$$

We pose a new problem.

Problem: Investigate the number of different ways a given positive integer can be written the sum of consecutive positive integers.

Here is our **investigation**:

Again we can start with the process of experimentation. We can also use our mini-theory, which was created above. But first several specific questions.

Question: Which numbers have no representation as the sum of consecutive integers?

Answer: Powers of 2.

Question: Which numbers have a unique representation?

Answer: Those with only one odd factor other than 1, namely primes and products of a power of 2 and a prime, such as $56 = 8 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$.

Question: Which numbers have exactly two such representations?

Answer: Those with exactly two distinct odd factors other than 1, such as $9 = 3^2$. The two distinct factors are 3 and 9.

Question: Which numbers have exactly three such representations?

Answer: Those with exactly three distinct odd factors other than 1, such as $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. The three distinct odd factors are 3, 7, and 21.

We are now in a position to offer a further conjecture.

Conjecture 4: *Let n be positive integer. The number of representations of n as a consecutive sum is the same as the number of odd factors of the integer n .*

We are pretty certain that the conjecture is true, but can we prove it?

Proof: For every odd factor $2k+1$ of n we can construct sum (2) and after counteract we always get a sum of consecutive positive integers.

For example: Number $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ has three odd factors: 3, 5 and $3 \cdot 5 = 15$.

Sum of 3 consecutive integers: $30 = 9 + 10 + 11$

Sum of 5 consecutive integers: $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

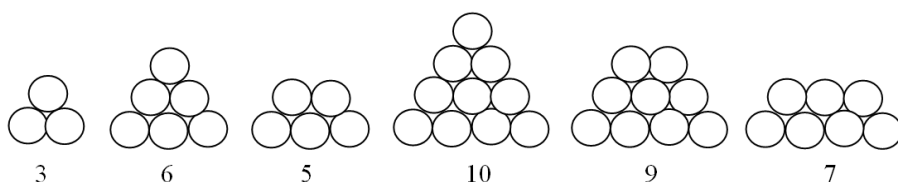
Sum of 15 consecutive integers (or 4 consecutive positive integers):

$30 = (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 6 + 7 + 8 + 9$.

The conjecture 4 can now be claimed to be a **theorem 5**.

We **end** with two remarks of a didactic nature:

Remark 1: We can use a geometric approach to introduce younger students to this problem with the help of figures such as these:



Diagrammatising numbers in geometric shapes helps students visualize patterns in particular numbers. The shapes could be said to represent an assembly of pipes or logs of wood. The numbers below the figures show the number of pipes in a shape and we can refer to numbers as 'pipe' numbers. So we investigate which numbers are pipe numbers. Younger students can also be introduced to experimentation in mathematics by supplying them with a collection of metal or plastic disks and having them "construct" pipe numbers.

A more algebraic view:

It is easy to derive the formula $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$. There are both algebraic and geometric ways to do so. Now, a "sum" number such as $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ can be looked at as

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10) - (1 + 2 + 3 + 4) = (10 \cdot 11)/2 - (4 \cdot 5)/2.$$

Thus, a "sum" number is one that can be written either in the form $n(n+1)/2$ or $n(n+1)/2 - m(m+1)/2$ where in the second case, $m+1 < n$.

See how this relates to the figures: the first formula (where $n = 2, 3, 4, 5, \dots$) produces triangles, more precisely, the triangular numbers: 3, 6, 10, 15, ... The second formula (where $n = 2, 3, 4, 5, \dots$, $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ and $m+1 < n$) produces truncated triangles, or more precisely, the difference of two triangular numbers. If in the second formula we allow $m = 0$, then this formula produces all the "sum" numbers.

Remark 2: Students just beginning algebra can be led to the important formula

$$n = (g - k) + \dots + (g - 2) + (g - 1) + g + (g + 1) + (g + 2) + \dots + (g + k)$$

by considering examples such as

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = (4 - 1) + 4 + (4 + 1) \text{ or}$$

$$6 \cdot 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = (6 - 2) + (6 - 1) + 6 + (6 + 1) + (6 + 2).$$

In each such sum, it is important to begin with an odd number of copies of a given integer so there will be a middle term. Then as we move away from the middle term to the left, we subtract off 1, then 2, then 3, and so on,

while we add these numbers when we move from the middle to the right. It is important that the student sees that doing so does not change the sum.

References

- [1] Orton, A. and Frobisher, L.: *Insights into Teaching Mathematics*. New York, Cassell, 1996
- [2] Kopka, J.: *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí n.L., UJEP, 2006.
- [3] Kopka, J.: *Isolated and Nonisolated Problems*. In: *Teaching of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press 1992.
- [4] Mason, L.: *Thinking Mathematically*. New York, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

DIGITÁLNA PODPORA VYUČOVANIA MATEMATIKY NA STREDNEJ ODBORNEJ ŠKOLE

Lilla Koreňová

*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: korenova@fmph.uniba.sk*

Abstract. Využívaniu digitálnych technológií vo vyučovacom procese sa v súčasnosti venuje veľká pozornosť. Vyučovanie matematiky s podporou digitálnych technológií a s e-learningovou podporou bolo predmetom výskumu realizovaného na strednej obchodnej akadémii. Príspevok chce oboznámiť s realizáciou a poukázať na niektoré zaujímavé výsledky tohto projektu.

1. Úvod

V súčasnosti sa fenoménom využitia digitálnych technológií vo vyučovaní zaoberajú mnohé zahraničné aj slovenské publikácie, čoraz častejšie sa stáva aj predmetom rôznych projektov, pilotáží, aj seriózných výskumných prác. Ako však použiť digitálne technológie na konkrétnej vyučovacej hodine? Ktoré zo širokej škály IKT prostriedkov použiť v súčinnosti s akými formami vyučovania pre danú vekovú skupinu študentov, pre daný typ strednej školy a pre konkrétne vyučovacie ciele? Toto sú otázky, na ktoré dostávame odpovede len čiastočne a ich aktuálnosť je obmedzená veľmi rýchlym vývojom samotných digitálnych technológií. Práve preto sme v súlade s doterajšími skúsenosťami využívania didaktického softvéru a grafických kalkulačiek v jednotlivých témach stredoškolskej matematiky zrealizovali výskum širšieho charakteru, na vzorke štyroch tried jednej školy (s nadštandardným vybavením IKT) v trvaní jedného školského roka. V nasledujúcom uvádzame ciele, hypotézy, ukážkové materiály digitálneho obsahu vyučovania ako aj niektoré výsledky výskumu.

Cieľom našej práce bolo preskúmať efektívnosť využívania digitálnych technológií (hlavne grafických kalkulačiek a softvérov dynamickej geometrie) ako aj e-learningovej podpory výučby vo vyučovaní matematiky na strednej odbornej škole. Výskum sme realizovali v školskom roku 2009/2010 v

štyroch triedach (prvom, druhom, treťom a štvrtom ročníku) Súkromnej Obchodnej Akadémie Liberta v Bratislave (www.liberta.sk)

V súlade s terminológiou Teórie didaktických situácií (Brousseau 1998) sme použili didaktické prostredie, kde materiálna zložka materiálneho prostredia pozostávala z digitálnej techniky, didaktického softvéru, elektronických študijných materiálov a pracovných listov. Študenti mali na vyučovaní k dispozícii notebooky s pripojením na internet, grafické kalkulačky, softvér Graphmatica, GeoGebra, Cabri geometria. V triede mal učiteľ k dispozícii notebook s pripojením na internet a dataprojektor. V rámci prvého kroku, noosférickej situácie sme vykonali analýzu didaktických prác, učebných osnov a plánov podľa nového štátneho vzdelávacieho programu školy. Na základe týchto záverov sme vytvorili prostredie konštrukčnej situácie výberom konkrétnych učebných materiálov, úloh, pracovných listov ako aj vyučovacích metód a foriem.

Cieľom výskumu bolo overenie nasledovných hypotéz:

- H1. Študenti sú vďaka používaniu počítačov a e-learningovej podpory výučby lepšie motivovaní a javia väčší záujem o matematiku.
- H2. Vhodnou aplikáciou digitálnych technológií (grafických kalkulačiek a softvérov dynamickej geometrie) vo vyučovaní matematiky sa zlepšia postoje študentov k vyučovaniu matematiky.

2. Ukážky digitálneho obsahu vyučovania

Podľa nového štátneho vzdelávacieho programu školy je prvoradým cieľom vyučovania matematiky získanie pozitívneho vzťahu k matematike. Nedeľiteľným cieľom matematiky na stredných odborných školách je poskytnúť žiakom vedomosti a zručnosti, ktoré sú potrebné pre úspešné zvládnutie odborných predmetov príslušného študijného odboru. Zároveň by si mal absolvent SOŠ utvoriť obraz o matematike ako celku, mal by získať vedomosti z oblasti algebry, z planimetrie a zo stereometrie, z analytickej geometrie roviny a priestoru, zo základov matematickej analýzy, z kombinatoriky, zo základov pravdepodobnosti. Vo vyučovacom predmete matematika sa má využívať pre utváranie a rozvíjanie nasledujúcich kľúčových kompetencií výchovné a vzdelávacie stratégie, ktoré žiakom umožňujú:

- Schopnosti riešiť problémy
- Spôsobilosti využívať informačné technológie

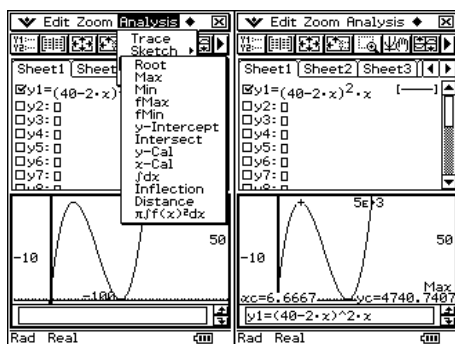
Tieto spôsobilosti pomáhajú žiakom rozvíjať základné zručnosti pri práci s osobným počítačom, internetom, využívať rôzne informačné zdroje a informácie v pracovnom a mimo pracovnom čase. Nová iniciatíva v oblasti

elektronického vzdelávania (eLearning) si kladie za cieľ zvýšiť úroveň digitálnej gramotnosti žiakov.

V nasledujúcej časti uvádzame niekoľko ukážok digitálneho obsahu, ktorý bol študentom prístupný aj na portáli <http://elearn.ematik.fmph.uniba.sk/> ako e-learningová podpora vyučovania.

Úloha 1. Z papiera tvaru štvorca 40x40 cm vystrihneme vo všetkých rohoch rovnaké štvorčeky a zložíme krabičku. Aká veľká má byť strana vystrihnutého štvorčeka, aby mala krabica maximálny objem?

Riešenie pomocou grafickej kalkulačky - žiak vytvorí funkciu závislosti objemu krabice od strany vystrihnutého štvorčeka x . Určí, že definičný obor pre premennú x je interval $(0, 20)$. Maximum funkcie na danom definičnom obore vypočíta pomocou grafickej kalkulačky. Dôležité je správne zvoliť "zoom".

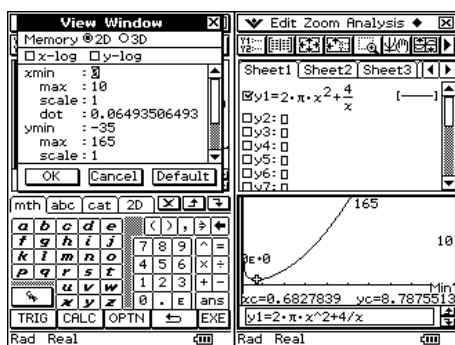


$$V = (40 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$$

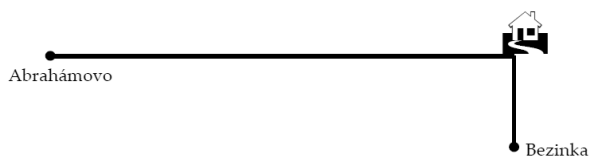
Úloha 2. Nájdite rozmery nádoby tvaru valca tak, aby pri danom objeme 2l bolo ochladzovanie tekutiny v nej čo najmenšie, t. zn. aby bol jej povrch minimálny.

Riešenie pomocou grafickej kalkulačky - žiak vytvorí funkciu závislosti povrchu valca od polomeru podstavy x nádoby. Minimum funkcie na danom definičnom obore vypočíta pomocou grafickej kalkulačky. Dôležité je správne zvoliť "zoom".



$$y = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

Úloha 3. Poľná cesta medzi Abrahámovom a Bezinkou sa skladá z dvoch na seba kolmých rovných úsekov. Dlhší úsek meria 12,1 km, kratší 2,8 km. V mieste, kde poľná cesta mení smer, stojí osamelý dom. Zastupiteľstvo sa rozhodlo nahradiť túto poľnú cestu asfaltovou. Poslanci zastupiteľstva však stáli pred problémom, kade by mala nová cesta viesť.



Odborníci odhadli, že

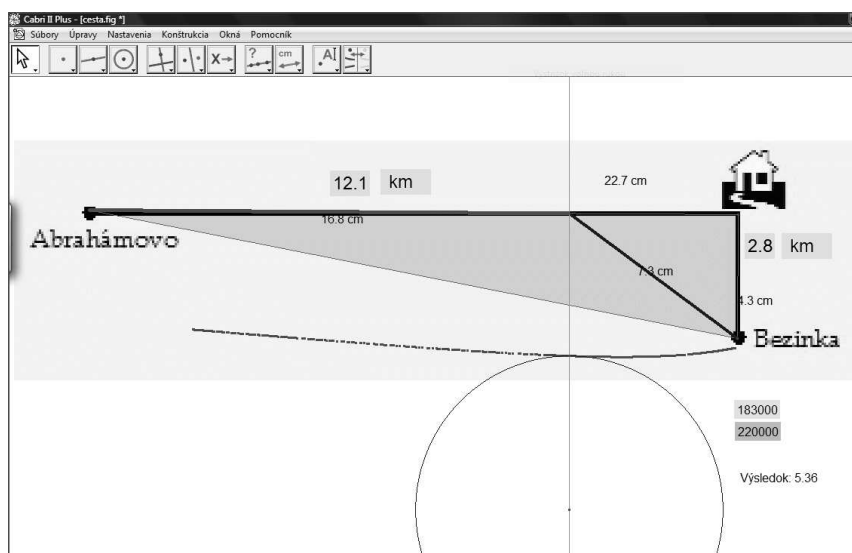
- výstavba 1 km cesty vedenej po trase pôvodnej poľnej cesty by stála asi 183 000 €,
- výstavba 1 km cesty mimo trasy pôvodnej poľnej cesty by stála asi 220 000 €.

Poslankyňa Čížiková navrhla inú trasu: nová cesta povedie z Abrahámovo najprv po poľnej ceste a od určitého miesta sa odkloní a povedie rovno do Bezinky.

Starosta má rozhodnúť, po akej trase sa má nová cesta stavať, aby bola čo najlacnejšia.

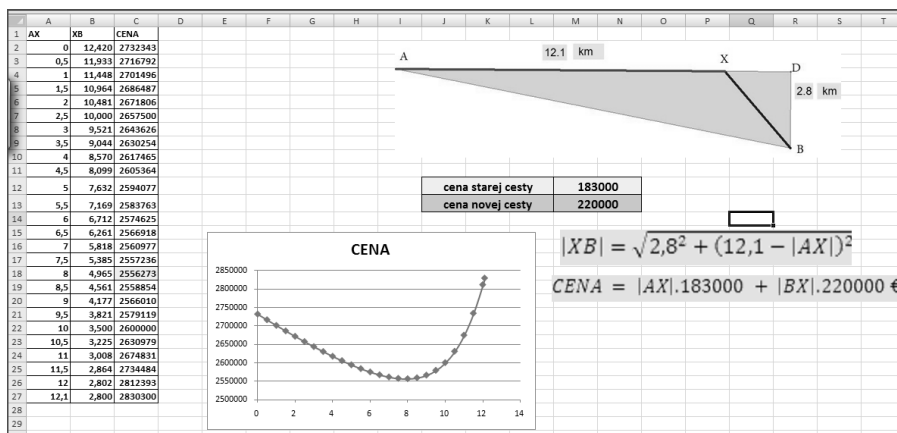
Riešenie pomocou Cabri geometrie:

Pomocou softvéru Cabri geometria II Plus môžeme úlohu nielen graficky znázorniť, ale aj graficky znázorniť vzťah medzi trasou cesty a cenou bez znalosti funkčných závislostí. Graficky a experimentálne môžu študenti nájsť optimálne riešenie.



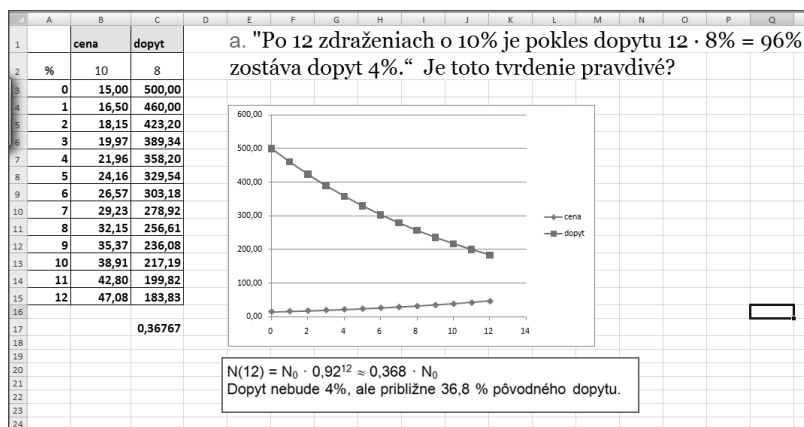
Riešenie pomocou MS EXCEL:

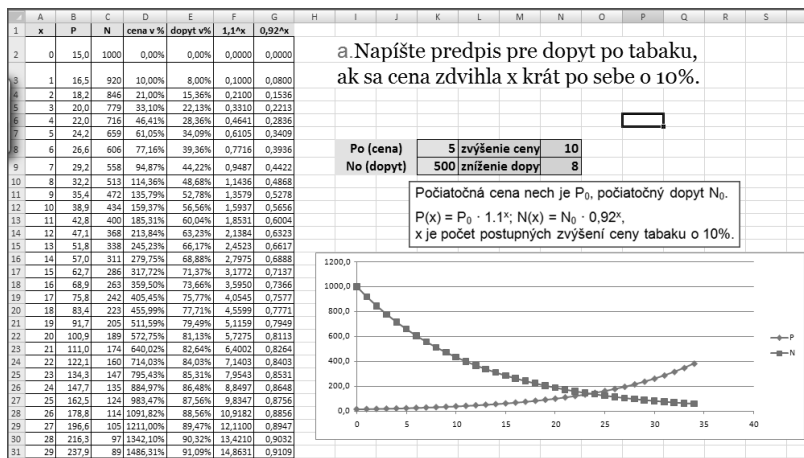
Pomocou softvéru MS EXCEL môžu študenti vytvoriť tabuľku funkčných hodnôt závislosti ceny od trasy. Pritom im stačí znalosť Pytagorovej vety! Načrtnutím grafu na základe tabuľky môžu nájsť optimálne riešenie. Diskusia o "kroku" v tabuľke buduje u študentov kompetenciu vyhodnotenia reálneho problému (napríklad otázka: s akou presnosťou vedia cestári vybudovať novú cestu? s presnosťou 0,5 km?...).



Úloha 4. Britský lekársky časopis "The Lancet" varuje pred celosvetovou epidémiou rakoviny pľúc a požaduje drastický nárast ceny cigariet. Rakovina pľúc sa stala jednou z najrozšírenejších druhov rakoviny, zdôrazňuje najstarší lekársky časopis. Podľa svetovej banky nárast ceny tabaku o 10% zníži dopyt o 8%.

EX: Riešenie pomocou MS EXCEL:

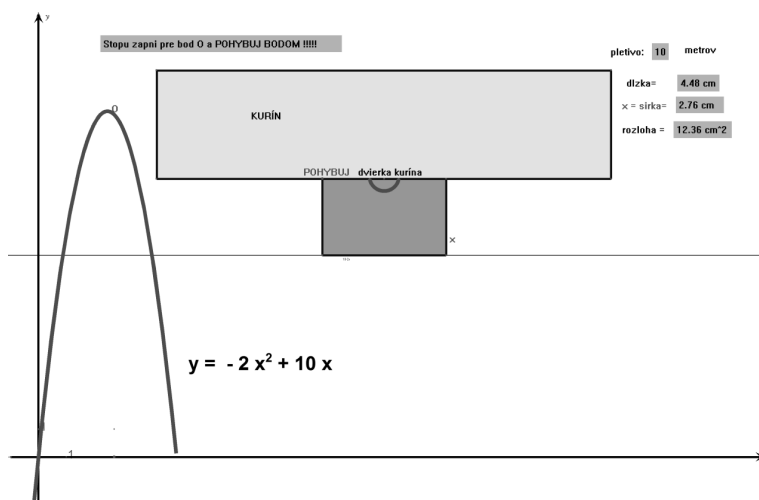




Úloha 5. Aké rozmery má mať výbeh pre kurence tvaru obdĺžnika, ak je postavený pri stene kurína (tiež tvaru obdĺžnika), a ak máme k dispozícii 10 metrov pletiva a má mať čo najväčšiu rozlohu?

EX: Riešenie v Cabri geometria 2 Plus:

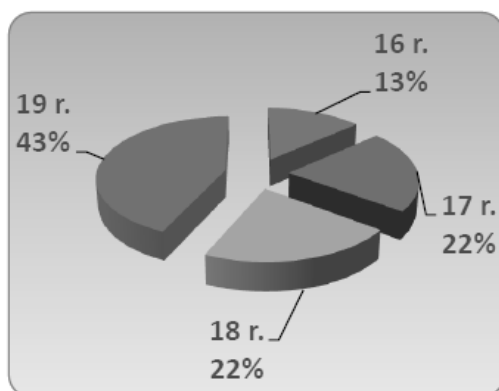
Učiteľ za pomoci študentov zostrojí obdĺžnik - "kurín", potom si zvolia bod "POHYBUJ" na strane obdĺžnika, čím vlastne určia jeden rozmer "výbehu", napríklad x . Potom zostroja "výbeh" podľa daných podmienok. Študenti môžu pod vedením učiteľa experimentovať: môžu si voliť si rôzne veľkosti x , v Cabri vypočítajú veľkosť plochy "výbehu" a sledujú kedy nastane maximum. Ak si zvolia sústavu súradníc v Cabri a vytvorí vztah - funkciu závislosti plochy "výbehu" od x , zostrojí sa príslušný graf kvadratickej funkcie.



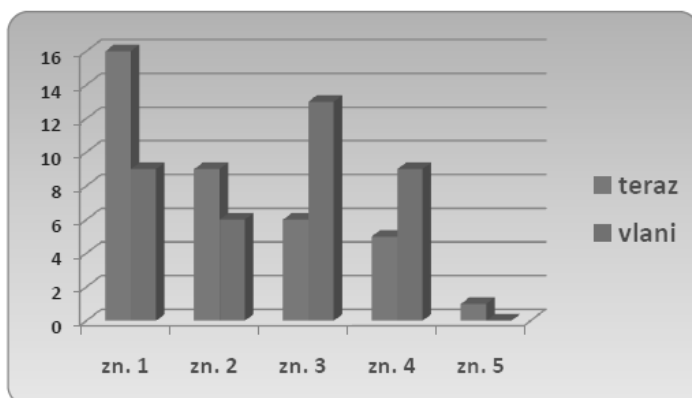
3. Niektoré zaujímavé výsledky výskumu

V tejto časti uvádzame niektoré výsledky výskumu. Ide o vyhodnotenie Ankety, ktorou sme overovali hypotézy výskumu. Dotazník vyplnilo 37 študentov Súkromnej Obchodnej Akadémie Liberta, Borinská 23, Bratislava.

Ankety sa zúčastnilo 16 chlapcov a 21 dievčat. Ich vekové rozloženie je percentuálne znázornené na obrázku:

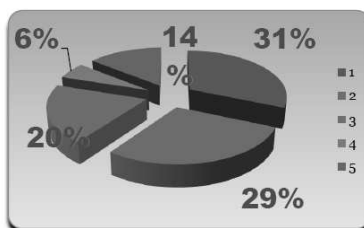


Porovnaním koncoročnej známky z matematiky v minulom školskom roku (bez vyučovania s IKT) a tento rok (s využitím IKT) zisťujeme, že sa výrazne zvýšil počet jednotkárov a dvojkárov a znížil počet trojkárov a štvorkárov. Samozrejme musíme brať do úvahy aj fakt, že za túto výraznú zmenu môže byť zodpovedná aj zmena osoby učiteľa, preto naše hypotézy nepotvrdzujeme touto tabuľkou.



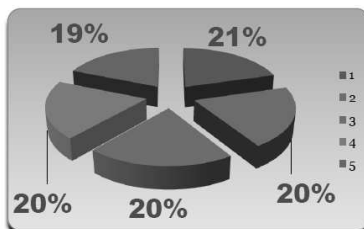
Na otázku: "Myslíte si, že grafická kalkulačka vám pomohla pri pochopení učiva na matematike?" odpovedalo až 31% študentov 1. "určite áno".

1. Určite áno
2. Skôr áno
3. Skôr nie
4. Určite nie
5. Nevie



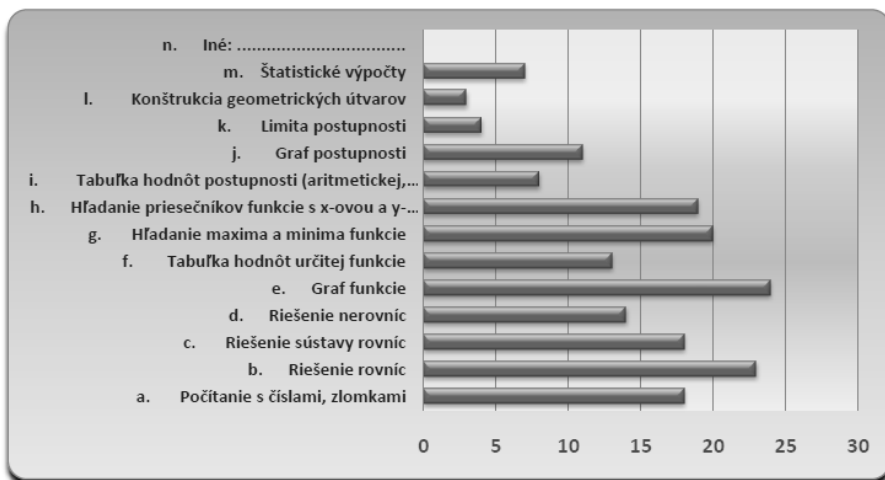
Na otázku: "Myslíte si, že grafická kalkulačka vám pomohla pri výpočtoch" odpovedali študenti približne rovnako na všetky možnosti. Z toho môžeme usudzovať, že hlavný prínos grafickej kalkulačky nie je v uľahčení manuálnych, rutinných výpočtov.

1. Určite áno
2. Skôr áno
3. Skôr nie
4. Určite nie
5. Nevie



Zaujímavé sú aj odpovede študentov na otázku: "Vyznačte, pri ktorých témach vám určite grafická kalkulačka pomohla (môžete vyznačiť aj viac odpovedí)".

- a. Počítanie s číslami, zlomkami
- b. Riešenie rovníc
- c. Riešenie sústavy rovníc
- d. Riešenie nerovníc
- e. Graf funkcie
- f. Tabuľka hodnôt určitej funkcie
- g. Hľadanie maxima a minima funkcie
- h. Hľadanie priesečníkov funkcie s x-ovou a y-ovou osou
- i. Tabuľka hodnôt postupnosti (aritmetickej, geometrickej)
- j. Graf postupnosti
- k. Limita postupnosti
- l. Konštrukcia geometrických útvarov
- m. Štatistické výpočty
- n. Iné:



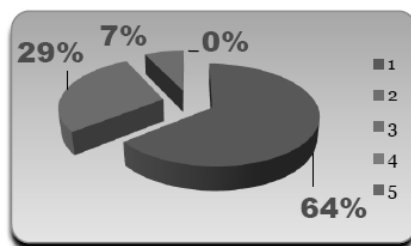
Ako vidíme z grafu, najviac pomohla grafická kalkulačka pri zostrojovaní grafov funkcií a riešení rovníc.

Na otázku: "Myslíte si, že by ste vedeli grafickú kalkulačku využiť aj v reálnom živote (mimo školy)?" odpovedalo najviac študentov "skôr nie", z čoho usudzujeme, že študenti nepovažovali úlohy riešené na hodinách matematiky pomocou grafickej kalkulačky za "real-life" úlohy, teda také, s ktorými by sa mohli stretnúť v reálnom živote.



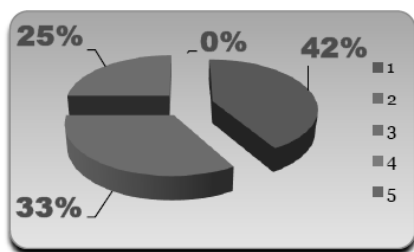
Otázkou "Myslíte si, že vyučovanie matematiky je s grafickou kalkulačkou zaujímavejšie?" sme zisťovali, či sa motivácia študentov k matematike zvýši používaním grafickej kalkulačky. Tu jednoznačne sme dostali kladnú odpoveď.

1. Určite áno
2. Skôr áno
3. Skôr nie
4. Určite nie
5. Neviem



Posledná otázka ohľadom grafickej kalkulačky znela: "Myslíte si, že na hodinách matematiky ste sa pomocou grafickej kalkulačky naučili viac užitočných vedomostí ako by ste sa naučili bez nej?"

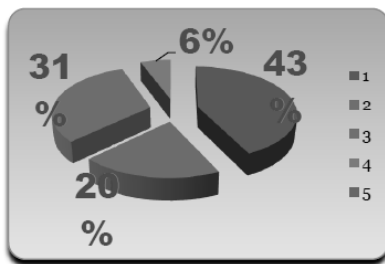
1. Určite áno
2. Skôr áno
3. Skôr nie
4. Určite nie
5. Neviem



Ako vidno z grafu, až 42% študentov s určitou tvrdí, že sa pomocou grafickej kalkulačky naučili viac vedomostí.

Na otázku: "Myslíte si, že GeoGebra vám pomohla pri pochopení učiva na matematike?" až 43% odpovedalo určite áno!

1. Určite áno
2. Skôr áno
3. Skôr nie
4. Určite nie
5. Neviem



4. Záver

Ciele nášho výskumu sa nám podarilo potvrdiť. Študenti sú vďaka používaniu počítačov a e-learningovej podpory výučby lepšie motivovaní a javia väčší záujem o matematiku. Vhodnou aplikáciou digitálnych technológií (grafických kalkulačiek a softvérov dynamickej geometrie) vo vyučovaní matematiky sa zlepšili postoje študentov k vyučovaniu matematiky. Získané e-materiály plánujeme doplniť, systematizovať a materiálne prostredie doplniť o interaktívnu tabuľu. Podobný výskum chceme zrealizovať v budúcnosti aj na gymnáziu.

Literatúra

- [1] Brousseau, G.: *Théorie des situations didactique*. Grenoble: La Pensée sauvage édition, 1998
- [2] Dillingerová M., Koreňová L., Trenčanský I.: *Graphic Calculator as a learning tool*. Zborník konferencie: Information and Communication Technology in Education, University of Ostrava, Faculty of Science, Ostrava, 2007

-
- [3] Koreňová L.: *Didaktický softvér vo vyučovaní matematiky 02*, skriptá a učebné texty, FMFI UK Bratislava 2007
 - [4] Kubáček, Z., Černek, P., Žabka, J.: *Matematika a svet okolo nás*, zbierka úloh. Vydavateľstvo Mgr. Pavol Cibulka Bratislava 2008
 - [5] Žilková, K.: *Školská matematika v prostredí IKT*. PedF UK Bratislava 2009
 - [6] <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ematik/index.html>
 - [7] <http://www.infovek.sk/predmety/matem/mater/cd/cdikt/index.html>
 - [8] <http://www.dqime.uni-dortmund.de/>
 - [9] <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/esfprojekt/>

ON J -CONIC SECTIONS

András Kovács

University of Debrecen, Institute of Mathematics

4032 Debrecen, Egyetem tér 1.

e-mail: kovacs@math.klte.hu

Abstract. The mathematical base of our examples comes from the book *Calculus of Variations* written by Lavrent'ev and Lyusternik. We can read here about the J -hyperbolas. As well-known, we proceed at the normal definition of the hyperbola from given two points. In complete analogy now two lines are given. These two lines take the role from the two points. In this presentation different cases (in respect of signs) are discussed with the help of computers. Finally it turns out that eight rays occur. So a mistake, an incompleteness in the mentioned book was discovered. At the end of the lecture a new problem is posed. What about the case that the two points both are circles or one point is a circle and the other is a line?

J-hyperbolas

We will mention the J -conic sections in detail according to Lavrent'ev and Lyusternik. For knowing of the J -hyperbolas in the general case we have to give the curves and of the plane.

Consider such extremal curves Γ_1 and Γ_2 from the P points of the plane, which intersect Γ_1 and Γ_2 at right angles. Denote by $J(\Gamma_1)$ and $J(\Gamma_2)$ the lengths of the curves between the pairs $(P; \Gamma_1)$ and $(P; \Gamma_2)$. Then the set of points P for those the difference $J(\Gamma_1) - J(\Gamma_2)$ is constant is called a J -hyperbola.

(The authors of the book did not use the signs of absolute values in connection with J -hyperbolas.)

J-hyperbolas of two lines

In an example of the book *Calculus of Variations* the authors define a plane curve which is passing through a given point A of the plane. At this time let Γ_1 and Γ_2 be two lines.

If we draw two lines perpendicular to Γ_1 and Γ_2 from different points P of this curve then for the points of intersection $T'P$ and $T''P$ - that is for the distances of the points and lines - the

$$(1) \quad PT'P - PT''P = AT'A - AT''A = 2a$$

equality must be true. (For the writing down of the previous equality we use that $J(\Gamma_1) = PT'P$ and $J(\Gamma_2) = PT''P$.)

The solution, according to the Soviet authors, is a line passing through the A . We denote this line by e on the figure 1.

Two hypotheses

We accept this solution as the *1st hypothesis* and then we tried to check the idea of the book.

We did not use (1) for the starting of the examination. We considered the fact that in the school definition of hyperbolas there are signs of absolute values. Therefore we studied that more general case, which includes the solution of the above-mentioned book. So our equality was

$$(2) \quad |PT'P - PT''P| = |AT'A - AT''A| = 2a$$

We found that the solutions of (2) are two rays of the line e , which start from Γ_1 and Γ_2 .

So the curve which satisfies (1) can not be the whole line. We had to modify further the 1st hypothesis. The solution is two rays of e according to the *2nd hypothesis*.

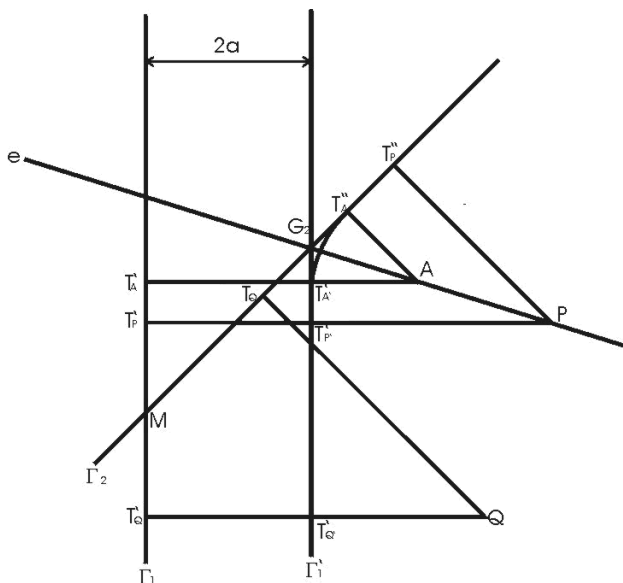


Figure 1. The J -hyperbola belonging to two lines

Comments

We took the Γ'_1 , which is parallel to Γ_1 for the examination. (It was the first step of suggestion for problem-solving.)

The points of the J -hyperbola are at an equal distance from Γ'_1 and Γ_2 because of the construction of Γ'_1 . In this way the points of the J -hyperbola lie on the bisector of Γ'_1 and Γ_2 .

For the details we examined closely this problem. The points of that ray which starts from G_2 give the bisector of the angle $T'_P PT''_P$, so because of $PT'_{P'} = PT''_P$, the next equality is true:

$$PT'_P - PT''_P = PT'_{P'} - PT''_{P'} = 2a.$$

Similarly, we can get the $PT''_P - PT'_P = 2a$ equality, if the points P are on the other ray of e . Consider those points P of e , which can be found between the two rays. These points don't belong to our solution, because for these P , as we can see it easily, the next equality is true:

$$PT'_P + PT''_P = 2a.$$

(We were inspired to initiate a new set of points by this new result later.)

It is easy to see that another point Q of the plane doesn't belong to the set of points of the J -hyperbola. By using the $|QT'_Q - QT''_Q| = |QT'_{Q'} + 2a - QT''_Q| = 2a$ equality we get that $QT'_{Q'} = QT''_Q$. So Q is in the normal bisector of the $T''_Q T'_{Q'}$, which is parallel to the normal bisector of $T''_P T'_{P'}$. Because of this fact, the point Q is not an element of the set of the J -hyperbola.

A special case

In that case when Γ_1 is parallel to Γ_2 , the solution is a line, passing through the A and parallel to the others.

We could see that the process of problem-solving showed some kind of mistake. Since our results, which was taken with geometrical consideration, disagree with the solution of the book, we applied for computers. Because we should have liked to try a new learning method, therefore we turn to a software which run according to Computer Algebraic System.

A concrete example

We chose a simple example for checking. The $\Gamma_1 : x = 0$, $\Gamma_2 : y = x$ and $A(4; 2)$ simple data lead equations of rays. We know that for point $P(x; y)$ the equalities $J(\Gamma_1) = |x|$ and $J(\Gamma_2) = \left| \frac{x - y}{\sqrt{2}} \right|$ hold.

It is easy to calculate that the distance of A and Γ_1 is 4, the distance of A and Γ_2 is $\sqrt{2}$. By using these equalities and data we get that

$$\left| \left| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right| - |x| \right| = 4 - \sqrt{2}.$$

First we make the decomposition of the absolute value in checking with the software.

We thought to get 8 sets of points because of the number of the signs of absolute values. And really we have got the next equations.

Results of the concrete example

$$I. \ x = -\sqrt{2}y + 6 + 2\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y \leq \frac{2(3 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 2}$$

$$II. \ x = -\sqrt{2}y - 6 - 2\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y \leq -\frac{2(3 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1}$$

$$III. \ x = \sqrt{2}y + 10 - 6\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y > -\frac{2(3\sqrt{2} - 5)}{-\sqrt{2} + 2}$$

$$IV. \ x = \sqrt{2}y - 10 + 6\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y \geq \frac{2(3\sqrt{2} - 5)}{\sqrt{2} - 1}$$

$$V. \ x = \sqrt{2}y + 10 - 6\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y < \frac{2(3\sqrt{2} - 5)}{\sqrt{2} - 1}$$

$$VI. \ x = -\sqrt{2}y + 6 + 2\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y > \frac{2(3 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1}$$

$$VII. \ x = \sqrt{2}y - 10 + 6\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y \leq \frac{2(3\sqrt{2} - 5)}{-2 + \sqrt{2}}$$

$$VIII. \ x = -\sqrt{2}y - 6 - 2\sqrt{2} - y \quad \text{ha} \quad y > \frac{2(3 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 2}$$

So we reached the 3rd hypothesis which means eight rays. We can see the graphs of these eight rays in the next picture.

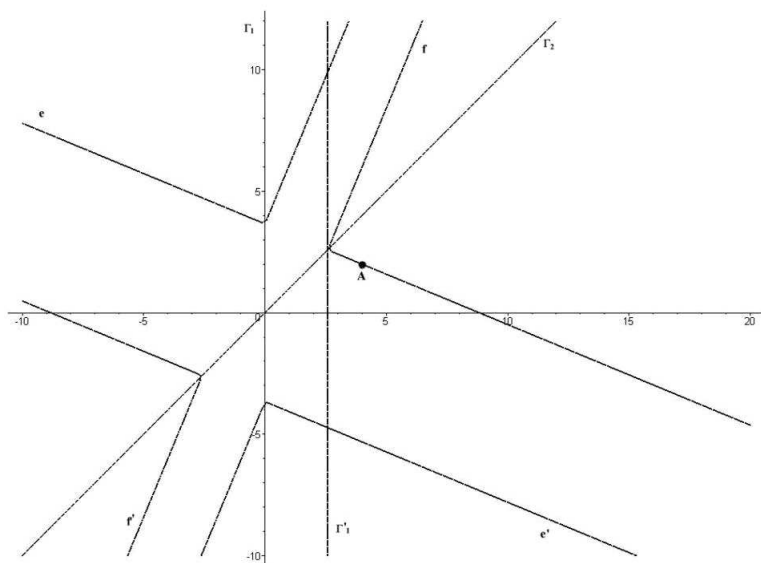


Figure 2. The drawing of J -hyperbola according to the computer

Discussion of the results

Now we see that every ray is parallel to the bisectors of Γ_1 and Γ_2 , so the (2) equality is true for all of them.

But among of these eight rays, there exists only two which lie on the line e passing through the A .

(e' , which is parallel to e , is an image of e reflected about the point of intersection of Γ_1 and Γ_2 , so (2) holds for e' too because of the distance-preserving. But neither of the two rays of e' contain point A . The f set of points, which consists of two rays, is an element of another bisector of Γ'_1 and Γ'_2 . Since all points of this bisector are equidistant from the arms of the angle, so (2) holds for f too. f' - similar to e' - is the image of f reflected about point O . Neither f nor f' contains point A .)

The J -ellipses

The detailed examination of the *3rd hypothesis* showed that the role of the bisectors are how important in this example. Thus we understood that the *3rd hypothesis* was not a wrong way. It could help us to differentiate our knowledge further. The *2nd hypothesis* gives the result after all.

We can examine that set of points which we call J -ellipse, in a similar way. The points of J -ellipse satisfy the

Preparing a computer drawing of the J -ellipse

$$\left| \left| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right| + |x| \right| = 4 + \sqrt{2}$$

The computer draws on the basis of this equation that figure which can see on Figure 4. The drawing of the computer little bit differs what we have got from our analysis. (We can see on this figure bisectors of Γ_1 and Γ_2 , which are between Γ_1 and Γ'_1 and the images of theirs reflected about the point of intersection of Γ_1 and Γ_2 . But among of these segments, only the e passing through the A .) This example shows the fact that the use of computers is not the aim, but only an instrument of the teaching.

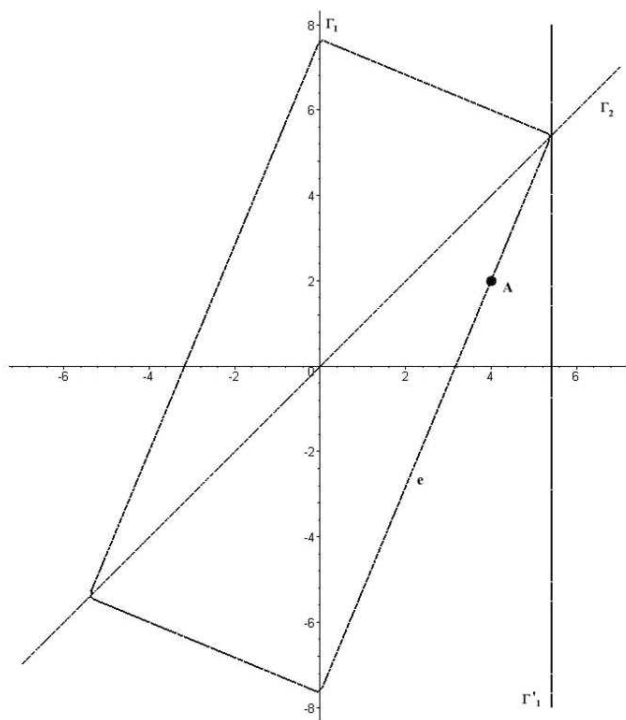


Figure 4. The drawing of J -ellipse according to the computer

Another examples

Then we could discussed those cases, when both curves are circles or Γ_1 is a circle and Γ_2 is a line.

So we got another J -hyperbolas, J -ellipses and J -parabolas.

Now we will show another example for this case.

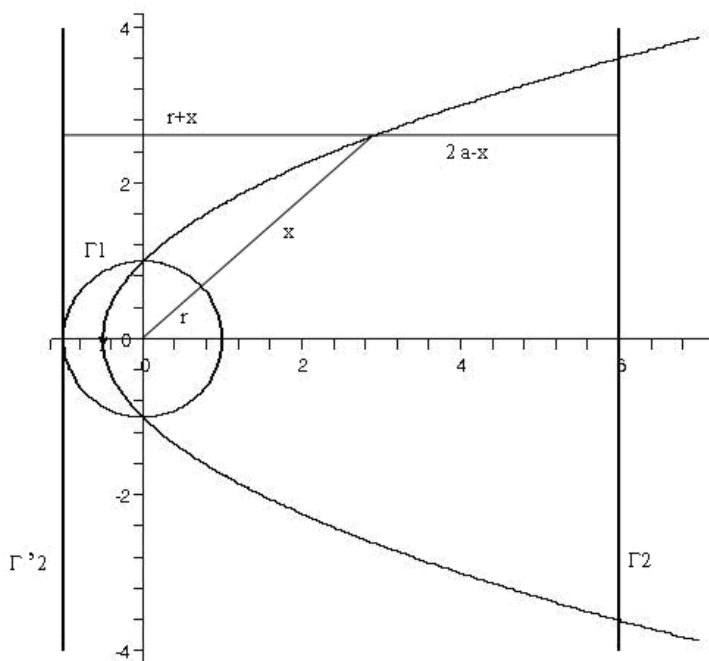


Figure 5. The drawing of J -ellipse according to the computer

References

- [1] M. A. Lavrent'ev und L. A. Lyusternik, *Lehrgang der Variationsrechnung*, Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, 1950. (in Russian)
- [2] Problem-solving in mathematics with the help of computers (Teaching Mathematics and Computer Science 2003(2), 405-422. o., Institute of Mathematics University of Debrecen)

REFLEKSJE NAD WYKORZYSTYWANIEM WIEDZY SZKOLNEJ DO ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ MATEMATYCZNYCH

Joanna Major

*Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
e-mail: jmajor@up.krakow.pl*

Abstract. The subject of this paper concerns the deliberation on the use of school mathematical knowledge by pupils in the process of solving maths problems. The deliberation has been conducted on the notion of even parity. This paper shows, among other things, results of research on the knowledge and skills that pupils possess, as well as their intuition concerning the discussed notion.

Wstęp

Przedmiotem pracy są rozważania dotyczące wykorzystywania przez uczniów, w procesie rozwiązywania zadań, szkolnej wiedzy matematycznej. Rozważania prowadzone są na przykładzie pojęcia parzystości. W pracy przedstawiono m.in. wyniki badań na temat posiadanych przez uczniów wiadomości i umiejętności oraz intuicji dotyczących omawianego pojęcia.

Zauważmy, że w wielu sytuacjach życiowych odwołujemy się do pojęcia parzystości. Często używany zwrotów „do pary” i „nie do pary”. Jedną z pierwszych sytuacji, gdzie dzieci spotykają się z liczbami parzystymi i nieparzystymi jest przedszkole bądź szkoła. Dzieci ustawiają się w pary idąc na spacer bądź wycieczkę. Wtedy są dwie możliwości albo wszystkie dzieci będą mieć parę, albo jedno dziecko pozostanie samo. W codziennym, dorosłym życiu mamy również do czynienia z liczbami parzystymi. Przykładem mogą być numery budynków w miastach (numery domów o tej samej parzystości znajdują się po tej samej stronie ulicy).

Warto tu wspomnieć, że O. Becker badając teksty źródłowe stwierdził, że *teoria parzystości i nieparzystości została stworzona przez wczesnych Pitagorejczyków w VI-V w. p.n.e. i była załączkiem, jak byśmy powiedzieli dziś, arytmetyki liczb naturalnych. ... Używając nazwy „liczba” Pitagorejczycy nadawali jej znaczenie różne od dzisiejszego. Mieli na myśli tylko liczby naturalne i to bez jedności...*

- *Jedność jest tym, dzięki czemu każda z rzeczy może być uważana za jedyną (Elementy, ks. VII, okr. 1);*
- *Liczba jest mnogością zbudowaną z jedności (Elementy, ks. VII, okr. 2);*
- *Liczba parzysta to taka, którą można podzielić na dwie równe części (Elementy, ks. VII, okr. 6);*
- *Liczba nieparzysta to taka, która nie może być podzielona na dwie równe części, różni się o jedność od liczby parzystej (Elementy, ks. VII, okr. 7) (zob. [1]).*

We współczesnej matematyce pojęcia liczby parzystej i nieparzystej definiuje się za pomocą pojęcia podzielności. W słownikach szkolnych podawane są różne określenia tych liczb, przy czym część z nich zawiera zapisy symboliczne. Jednocześnie wszystkie one określają liczbę parzystą jako liczbę całkowitą podzielną przez 2, zaś liczbę nieparzystą jako liczbę całkowitą, która przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1 (zob. [5], [6], [7]).

W cyklu nauczania matematyki, w szkole podstawowej, mówi się o cechach podzielności liczb, co związane jest z parzystością. Uczniowie poznają cechy podzielności m.in. przez liczbę 2. Liczba podzielna przez 2 to taka liczba, która w rzędzie jedności ma cyfrę: 0, 2, 4, 6, 8 (zob. np. [8]). Uczniowie powinni (bez wykonywania działań) rozpoznać liczby podzielne m.in. przez 2 oraz wyjaśnić cechę podzielności przez 2, a także powinni również umieć zastosować cechy podzielności do rozwiązywania zadań tekstowych. Warto tu podkreślić, że uczniowie w toku nauki szkolnej dowiadują się także, że *liczby podzielne przez 2 nazywamy liczbami parzystymi. Liczby naturalne, które nie są podzielne przez 2, nazywamy liczbami nieparzystymi* (por. [8]).

Jak wspomniano wcześniej, programy nauczania matematyki w szkole podstawowej zawierają informację, iż uczeń powinien umieć zastosować cechy podzielności liczb do rozwiązywania zadań. W założeniu mają to być w większości zadania ćwiczenia i zadania proste zastosowania teorii (zob. [9]) bezpośrednio odwołujące się do poznanych przez uczniów cech podzielności. W prowadzonych i opisanych dalej badaniach wykorzystano zadania, których rozwiązania odwołują się do umiejętności skorzystania z pojęcia parzystości. Użyte zadania są w pewnym sensie nietypowe, część z nich jest otwarta ze względu na metodę rozwiązania. Drugą istotną cechą części zadań jest to, iż nie są one standardowymi zadaniami, z którymi spotykają się uczniowie codziennie. Można więc powiedzieć, że zadania te znajdują się na pograniczu *zadań prostych zastosowań teorii* i *zadań-problemów*.

1. Omówienie badań

Badania, których fragment omówiono w pracy, zostały przeprowadzone w grudniu 2009 r., w gimnazjum w Proszowicach, w klasach pierwszych oraz trzeciej. W badaniach, w których uczestniczyło 20 osób z klasy trzeciej gimnazjum oraz 46 osób z klasy pierwszej, wykorzystano kwestionariusz składający się z 8 zadań i pytań. Uczniowie pracowali nad zadaniami i pytaniami kwestionariusza przez 45 minut. Metodę badań stanowiła analiza pisemnych rozwiązań zadań podanych przez gimnazjalistów. Głównym celem badań było określenie zakresu wiedzy i umiejętności szkolnych wykorzystywanych przez uczniów w procesie rozwiązywania zadań kwestionariusza badań. W szczególności zwracano uwagę na posługiwanie się przez uczniów pojęciem parzystości. Podjęto też m. in. próbę określenia sposobów rozumienia przez uczniów pojęcia liczby parzystej i liczby nieparzystej, a także próbę zdiagnozowania wiadomości i umiejętności uczniów odnoszących się do omawianych pojęć. Oto zadania kwestionariusza badań.

Zadanie 1

Podaj po 3 przykłady:

- a) liczb parzystych;
- b) liczb nieparzystych.

Zadanie 2

Wskaż, które z liczb -12 , -5 , -4 , $-\frac{1}{2}$, 0 , π , $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$, $\frac{44}{11}$, $\frac{3}{2}$, 11 , 22 , 100001 są:

- a) parzyste;
- b) nieparzyste.

Zadanie 3

- a) Co to znaczy, że liczba jest liczbą parzystą?
- b) Co to znaczy, że liczba jest liczbą nieparzystą?

Zadanie 4

Czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedz TAK lub NIE. Swoją odpowiedź UZASADNIJ.

- a) Suma dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą;
- b) Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą;
- c) Suma liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą parzystą;
- d) Różnica dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą;
- e) Różnica liczby nieparzystej i liczby parzystej jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 5

Piotr kupił w sklepie papierniczym, w którym wszystkie ceny są liczbami naturalnymi, 6 zeszytów, dwa bloki rysunkowe, długopis za 4 zł i pewną liczbę ołówków po 2 zł. Sprzedający wystawił mu rachunek za te towary

na sumę 21 zł. Piotr stwierdził, że sprzedawca się pomylił. Wyjaśnij, czy Piotr miał rację. Swoją odpowiedź UZASADNIJ.

Zadanie 6

Czy kasjer może wydać:

- a) 20 zł pięcioma monetami o wartości 1 zł i 5 zł? UZASADNIJ odpowiedź;
- b) 70 zł siedemnastoma monetami o wartości 1 zł i 5 zł? UZASADNIJ odpowiedź.

Zadanie 7

Dane są liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Na tych liczbach wykonujemy „operację” polegającą na dodawaniu do dwóch dowolnych spośród nich liczby 1. Na nowoutworzonych sześciu liczbach powtarzamy wielokrotnie operację opisaną wyżej. Czy przy tej procedurze uzyskamy sześć takich samych liczb? Odpowiedź UZASADNIJ.

Zadanie 8

Czy można tablicę o wymiarach 5×5 wypełnić kostkami domina o wymiarach 2×1 ? Odpowiedź UZASADNIJ.

Zadania zawarte w kwestionariuszu badań zostały dobrane zgodnie z zasadą stopniowania trudności. Te znajdujące się na początku odwołują się bezpośrednio do definicji liczby parzystej i nieparzystej (podanie własnych przykładów liczb parzystych oraz nieparzystych; wskazanie w zbiorze liczbowym liczb parzystych oraz nieparzystych). Zadanie 3 dotyczy podania określenia liczby parzystej oraz nieparzystej. W zadaniu 4 zawarto stwierdzenia matematyczne dotyczące cech parzystości, których prawdziwości należy ocenić, przypisując zdaniom logicznym wartości prawdy bądź fałszu. Należy tu także skonstruować odpowiedni kontrprzykład, bądź uzasadnić prawdziwość zdania w przypadku ogólnym. Kwestionariusz badań zamykają cztery zadania tekstowe, które można uznać za niestandardowe. Zadanie 5 na pozór nie zawiera wystarczających danych do jego rozwiązania. W treści zadania nie podano informacji dotyczących ceny zeszytu, bloku rysunkowego oraz liczby zakupionych ołówków. Istota rozwiązania polega na poczynieniu obserwacji, iż suma pewnej liczby parzystych składników jest parzysta. W zadaniu 6 należało zauważyć, iż nie jest możliwym rozłożenie liczb parzystych (20 i 70) na nieparzystą liczbę (odpowiednio 5 i 17) składników, które są liczbami nieparzystymi (1 oraz 5). W zadaniu 7 została opisana nieskończona procedura polegająca na dodawaniu do dwóch dowolnych wyrazów (sześciowyrazowego ciągu) liczby 1. W rozwiązaniu zadania należało zauważyć, że w każdym kroku nieskończonej procedury suma wszystkich wyrazów ciągu jest liczbą nieparzystą. Zatem nie jest możliwym uzyskanie ciągu stałego (suma elementów tego ciągu byłaby liczbą

parzystą). W zadaniu 8 odpowiedź na pytanie sformułowane w treści zadania jest negatywna bowiem pole tablicy 5×5 jest liczbą nieparzystą, a pole domina o wymiarach 1×2 jest liczbą parzystą. Analizując uczniowskie rozwiązania zadań 5-8 można więc wnioskować, czy uczniowie potrafili wykorzystać w procesie rozwiązywania zadań „własności” parzystości, takie jak:

- parzystość (nieparzystość) sumy pewnej naturalnej liczby parzystych (nieparzystych) składników (zadania 5 oraz 6);
- parzystość sumy (zadanie 7);
- rozkład na pary (zadanie 8).

W dalszej części artykułu nie będę szczegółowo omawiać wszystkich rozwiązań zadań zaprezentowanych przez uczniów, podam tylko kilka refleksji dotyczących rozwiązań zadań 5 oraz 6, a także sformułuję wybrane wnioski powstałe na bazie analizy całego zebranego materiału badawczego.

2. Uwagi do rozwiązań zadania 5

Większość badanych (55% uczniów) przedstawiło błędne rozwiązania zadania 5 a bardzo wiele osób (32% uczniów) nie podjęło się pracy nad zadaniem. Prawidłową odpowiedź bez uzasadnienia przedstawiło 9% badanych. Uczniowie pisali np. *Piotr został oszukany, sprzedawca się pomylił*. Pozostałe 4% osób przedstawiło prawidłowe rozumowanie – wskazujące na to, iż rachunek powinien być wystawiony na kwotę będącą liczbą parzystą. Przy czym tylko jedna osoba zinterpretowała swoje obliczenia poprawnie i stwierdziła, że sprzedawca się pomylił. Wynika stąd, iż badani mieli duże kłopoty z prawidłowym rozwiązaniem zadania. Uczniowie nie byli tu bowiem w stanie podać dokładnego kosztu zakupów. W sześciu rozwiązaniach pojawiła się informacja, iż zadania nie da się rozwiązać (*brakuje danych do rozwiązania zadania*).

Poniżej podaję rozwiązanie zadania, w którym prowadzono poprawne rozumowanie.

$6x = \text{parzysta}$
 $2x = \text{parzysta}$
 1. Dodając do siebie 6 dowolnych liczb otrzymamy liczbę parzystą.
 2. Dodając do siebie dwie dowolne liczby otrzymamy liczbę parzystą.
 3. Długość jest liczbą parzystą. $4 = \text{parzysta}$
 4. Mnożąc pewną liczbę przez 2 otrzymamy liczbę parzystą. $2x = \text{parzysta}$
 więc. Dodując do siebie 4 liczby parzyste, otrzymamy liczbę parzystą.
 $21 \neq \text{liczba parzysta}$

Rysunek 1.

Badany analizował koszt zakupu poszczególnych produktów (albo grup produktów) i na bazie obserwacji, iż liczby te są parzyste wyciągnął wniosek: *sprzedawca oszukał Piotra.*

Pozostali badani pracujący nad zadaniem poszukiwali w zbiorze umysłowych narzędzi wykonawczych odpowiedniej dla zadania metody rozwiązania. Błędne rozwiązania uczniów można zaliczyć do 3 zasadniczych grup.

Do pierwszej z nich należą te, w których próbowano niejako „na siłę” wyznaczyć całkowity koszt zakupów. Oto przykład jednego z 9 takich rozwiązań.

Dane
 zeszytów: 2
 blok: r.
 długopis: 1 szt
 ołówek: 2 szt
 całkowita suma: 21 zł

Obp: ~~suma~~ ~~na~~ ~~całe~~ ~~zakup~~ ~~sp~~ ~~przedawca~~ ~~się~~
 pomylił, ponieważ 20,4 zł.

$6 \times 13 = 7,8 \text{ zł}$
 $13 \times 2 = 2,6 \text{ zł}$
 $17 - 6 - 2 = 9 \text{ zł}$
 $9 : 8 = 1,125 \text{ zł}$
 $1,125 \times 6 = 6,75 \text{ zł}$
 $6,75 + 2,6 = 9,35 \text{ zł}$
 $21 - 9,35 = 11,65 \text{ zł}$
 $11,65 : 2 = 5,825 \text{ zł}$
 $5,825 \times 2 = 11,65 \text{ zł}$
 $11,65 + 9,35 = 21 \text{ zł}$

13
 11 : 8
 8
 30
 24
 6

14,8
 + 2,6
 17,4

10,4
 4,0
 6,0

Rysunek 2.

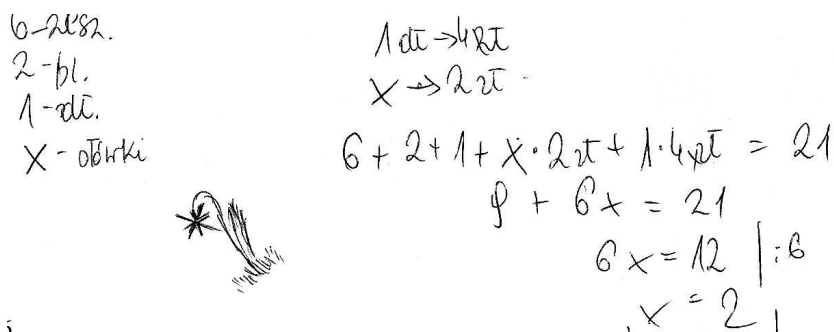
W analizowanym rozwiązaniu od całkowitej kwoty 21 zł odjęto 4 zł tj. kwotę, jaką zapłacono za długopis. Następnie obliczono cenę dwóch bloków rysunkowych przyjmując, że jeden blok kosztuje 3 zł (w rozwiązaniu zapisano to jako 2 zł-3, nie zaś – jak powinno być – $2 \cdot 3$ zł). Kolejno od 17 zł odjęto koszt zakupu bloków rysunkowych. Wynik 11 zł podzielono przez 8. Liczbę, jaką otrzymano pomnożono przez liczbę zeszytów (przez 6) oraz cenę ołówka, tj. przez 2 zł. Z obliczeń przeprowadzonych przez badanego wynika, że całkowity koszt zakupu produktów wynosił 20,4 zł. Kończąc swoje rozważania badany stwierdził, że sprzedawca się pomylił.

Do drugiej grupy zaliczono 2 rozwiązania, w których treść zadania (a w szczególności dane w nim zawarte) uzupełniono danymi pochodzącymi z otaczającej nas rzeczywistości. Mam tu na myśli ustalenie (na bazie własnych życiowych doświadczeń) ceny zeszytu oraz bloku rysunkowego. Uczniowie, których rozwiązania zaliczono do omawianej grupy, w dalszej części pracy nad zadaniem zapisywali wyrażenie arytmetyczne np. $6 \cdot 1$, $5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + x \cdot 2 = 21 + 2x$, w którym przez x oznaczyli liczbę zakupionych ołówków. Następnie zauważali, iż kwoty jakie otrzymali ($21 + 2x$ oraz $27 + 2x$) są większe od 21 więc sprzedawca z pewnością się pomylił.

Można przypuszczać, iż uczniowie, których rozwiązania zaliczono do omawianej grupy potraktowali zadanie jak „historyjkę z życia wziętą” (której prawdziwość należy zweryfikować). Dane zawarte w treści zadania uzupełnili o potrzebne, ich zdaniem, informacje (zaczerpnięte z realnego świata). Dane te uważali za niezbędne do udzielenia odpowiedzi na pytanie sformułowane w zadaniu.

Trzecia grupa rozwiązań jest najliczniejsza, należy do niej 25 rozwiązań, w których uczniowie przyjmują, iż kwota jaką Piotr zapłacił w sklepie za zakupy wynosi 21 złotych. Badani układają następnie równanie w celu wyznaczenia liczby zakupionych ołówków. Uczniowie przyjmują przy tym, że cena jednego zeszytu oraz bloku to 1 zł i układają w większości (poza jedną osobą) równanie postaci $6 + 2 + 4 + x \cdot 2 = 21$. Otrzymują stąd, iż $x = 4,5$. Warto tu podkreślić, iż żaden z badanych nie miał chwili refleksji nad sensownością otrzymanego rozwiązania (wskazującego, iż zakupiono 4,5 ołówka).

Jedna uczennica przedstawiła rozumowanie podobne do omówionego wyżej. Oto to rozumowanie.



$6 - \text{zesz.}$
 $2 - \text{bl.}$
 $1 - \text{zł.}$
 $x - \text{ołówki}$

$1 \text{ zł} \rightarrow 4 \text{ gr}$
 $x \rightarrow 2 \text{ gr}$

$6 + 2 + 1 + x \cdot 2 \text{ gr} + 1 \cdot 4 \text{ gr} = 21$
 $9 + 6x = 21$
 $6x = 12 \quad | :6$
 $x = 2$

Rysunek 3.

Uczennica próbując wyznaczyć zakupioną liczbę ołówków wypisała dane, a następnie ułożyła równanie ilustrujące zależność między kwotą wydaną na zakupy (21 zł) a cenami i liczbą kupionych produktów. Z obliczeń uczennicy wynika, że kupiono dwa ołówki. Zauważmy, że uczennica przyjęła, iż cena bloku rysunkowego oraz zeszytu wynosi 1 zł. Jednocześnie po lewej stronie równania w sumie pojawiła się liczba 1. Przyczyny błędu można, moim zdaniem, upatrywać w wypisaniu i dalszym manipulowaniu, bez głębszej refleksji, zapisanymi danymi liczbowymi.

Badani, których rozwiązania należą do grupy 3 jako niewiadomą potraktowali liczbę zakupionych ołówków. Zauważmy, że sam sposób sformułowania zadania niejako narzucił uczniom metodę rozwiązania. W treści

zadania pojawia się sformułowanie „... pewna liczbę ołówków ...” co może sugerować, iż ta wielkość jest poszukiwana. Badani układali więc równanie z jedną niewiadomą. Można przypuszczać, iż na taką drogę rozwiązania naprowadziła ich próba dopasowania do zadania którejś z poznanych w szkole procedur rozwiązywania zadań tekstowych.

Na koniec warto również podkreślić, iż przeważająca część uczniów biorących udział w badaniach skupiała się na wypisaniu danych, nie zaś na poszukiwaniu związków między danymi, a pytaniem sformułowanym w treści zadania. Uczniowie wypisując dane często zatracali sens zadania. Wypisanie danych liczbowych prowokowało uczniów do częstego, przypadkowego manipulowania zapisanymi liczbami. Zapisanie danych kierowało uczniów na drogę formalnego, algebraicznego sposobu rozwiązania. Wyrazem tego było układanie równań bądź wykonywanie przekształceń algebraicznych. Takie metody rozwiązania zadania można traktować jako próby dopasowania zadania do określonej, poznanej metody rozwiązywania zadań. Uczniowie próbowali rozpoznać „typ zadania”, a następnie przywoływali z pamięci właściwą procedurę postępowania, a gdy to zawodziło część z nich uruchamiała „strategie zastępcze” (np. dodawanie wszystkich liczb występujących w treści zadania).

3. Uwagi do rozwiązań zadania 6

Analizując rozwiązania zadania 6 można stwierdzić, że 7 osób (około 5% badanych) w części a) zadania oraz 6 osób (około 4% badanych) w części b) podało poprawne, pełne rozwiązanie. Rozwiązania błędne przedstawiło 3% uczniów w części a) zadania oraz 8% badanych w części b). Jednocześnie trzech uczniów (2% badanych) nie podjęło się rozwiązania części a) zadania, dla części b) uczniów takich było dziesięciu (7% badanych). Pozostałe osoby podawały odpowiedzi bez pełnego uzasadnienia.

Analizując rozwiązania należy stwierdzić, że tylko jedna z osób pracujących nad częścią a) zadania posłużyła się własnością parzystości do rozwiązania zadania. Osoba ta napisała: *kasjer nie może wydać kwoty 20 zł pięcioma monetami o wartości 1 zł i 5 zł, ponieważ liczby te są nieparzyste, a liczba 20 jest liczbą parzystą*. Jednocześnie badany nie rozwiązał części b) zadania co może sugerować, iż nie zauważył on wspólnej struktury obu części zadania. Pozostali badani, którzy przedstawili poprawne rozumowanie, poszukiwali stosownego rozkładu. Pokazali, iż kwoty (o której mowa w treści zadania) utworzyć się nie da, bowiem uzyskane kwoty są „za duże” bądź „za małe”. Oto przykład takiego rozumowania.

a) 20 zł pięcioma monetami o wartości 1 zł i 5 zł? UZASADNIJ odpowiedź.

$$\text{I} \quad 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} = 17 \text{ zł} < 20 \text{ zł}$$

$$\text{II} \quad 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 1 \text{ zł} = 21 \text{ zł} > 20 \text{ zł}$$

Odp: Kasjer nie może wydać 20 zł pięcioma monetami o wartości 1 zł i 5 zł, ponieważ albo wyjść za mało, albo za dużo złotych.

b) 70 zł siedemnastoma monetami o wartości 1 zł i 5 zł? UZASADNIJ odpowiedź.

$$\text{I} \quad 10 \cdot 5 \text{ zł} + 7 \cdot 1 \text{ zł} = 50 \text{ zł} + 7 \text{ zł} = 57 \text{ zł} < 70 \text{ zł}$$

$$\text{II} \quad 13 \cdot 5 \text{ zł} + 4 \cdot 1 \text{ zł} = 65 \text{ zł} + 4 \text{ zł} = 69 \text{ zł} < 70 \text{ zł}$$

$$\text{III} \quad 16 \cdot 5 \text{ zł} + 1 \cdot 1 \text{ zł} = 81 \text{ zł} > 70 \text{ zł}$$

Odp: Kasjer nie może wydać 70 zł siedemnastoma monetami o wartości 1 zł i 5 zł, ponieważ również wyjść więcej lub mniej złotych.

Rysunek 4.

Warto w tym miejscu wspomnieć, iż wśród rozwiązań znalazło się również 5 takich, w których uczniowie oszacowali podaną kwotę tylko „z jednej strony” tzn. stworzyli albo kwotę większą, albo mniejszą od podanej. Należy też wspomnieć o sporej grupie 6 rozwiązań podobnych do poniżej prezentowanego, w których pominięto jeden z istotnych warunków zadania.

a) 20 zł pięcioma monetami o wartości 1 zł i 5 zł? UZASADNIJ odpowiedź.

20 zł

$$5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} = 20 \text{ zł}$$

odp: kasjer może wydać 20 złotami

b) 70 zł siedemnastoma monetami o wartości 1 zł i 5 zł? UZASADNIJ odpowiedź.

70 zł

$$5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} + 1 \text{ zł} = 70 \text{ zł}$$

odp. Można 70 zł wydać po 1 zł i 5 zł

Rysunek 5.

Badany, którego rozwiązanie zaprezentowano wyżej uzyskał stosowne kwoty (20 i 70 złotych) bez zachowania warunku dotyczącego liczby monet.

Warto tu zauważyć, że spora część badanych uczniów nie była w stanie przenieść wypracowanej metody rozwiązania zadania 6a) na zadanie analogiczne do danego z „dużymi liczbami” (zadanie 6b)) chociaż struktura obu zadań była identyczna. Można przypuszczać, iż część uczniów nie widzi związku między tymi zadaniami i nie podejmuje prób rozwiązania tego, w którym występują „duże liczby”. Prawdopodobną przyczyną podejmowania się przez uczniów rozwiązania tylko pierwszej części zadania jest wypracowanie przez nich strategii poszukiwania na chybił trafił odpowiedniego rozkładu, która to strategia jest trudna w realizacji w przypadku dużych liczb.

Można tu sformułować hipotezę, iż na rozwiązanie (z powodzeniem) zadania ma ogromny wpływ nie tylko sama treść zadania (struktura zadania), co dane liczbowe. Rozwiązanie zadania z „dużymi liczbami” jest dla badanych trudne, a dla niektórych wręcz staje się niemożliwe.

4. Wnioski z prowadzonych badań

Przeprowadzone badania ukazują, iż większość uczniów gimnazjum posiada wiadomości i umiejętności w zakresie:

- wskazywania wśród danych liczb, liczb parzystych i nieparzystych,
- podawania własnych przykładów liczb parzystych i nieparzystych,
- określania wartości logicznej zdań dotyczących własności liczb parzystych i nieparzystych,
- konstruowania kontrprzykładów dla zdań o fałszywej wartości logicznej.

Jednocześnie spora grupa badanych osób przedstawia rozwiązania wskazujące na rozumienie zbiorów liczb parzystych i liczb nieparzystych jako dwóch rozłącznych wzajemnie dopełniających się do zbioru liczb rzeczywistych. To jest, jak można przypuszczać, związane z pierwszymi doświadczeniami uczniów w posługiwaniu się liczbami naturalnymi. Można przypuszczać, iż stopniowe rozszerzanie zakresu liczbowego nie skorygowało błędnych przekonań uczniów.

Przeprowadzone badania wskazują na trudności uczniów w zakresie:

- Formułowania opisu definicyjnego liczby parzystej i liczby nieparzystej;

W przeprowadzonych badaniach ujawniły się poniższe sposoby rozumienia liczby parzystej, które stanowią bazę intuicyjno-skojarzeniową

elementu obrazu pojęcia liczby parzystej (zob. Major, 2006). Liczba parzysta to:

- liczba podzielna przez 2,
- liczba, która ma 0, 2, 4, 6, 8 jedności,
- liczba „co druga od zera”,
- liczba, którą jeśli zostanie scharakteryzowany dany obiekt, to poszczególne elementy (części obiektu) dadzą się ustawić w pary.

Do bazy intuicyjno-skojarzeniowej pojęcia liczby nieparzystej należą:

- liczba niepodzielna przez 2 (istotny jest tu brak założenia, o tym iż liczba musi być całkowita),
 - liczba „co druga od 1”,
 - liczba, która ma 1, 3, 5, 7, 9 jedności.
- „Zauważania” związku treści zadania z parzystością i zastosowania własności pojęcia do rozwiązywania zadań tekstowych;
 - Uzasadniania prawdziwości zdania w ogólnym przypadku (dowodzenie twierdzeń).

Należy także zwrócić uwagę na trudności uczniów związane z dostrzeganiem wspólnej struktury niektórych zadań kwestionariusza, a w tym z wykorzystaniem wcześniej uzyskanych wyników do rozwiązywania kolejnych zadań tekstowych.

Na koniec warto zauważyć, że wyniki badań wskazują, iż uczniowie radzą sobie dobrze z rozwiązaniem typowych zadań szkolnych i wykazują się bezradnością w sytuacjach nietypowych. Wyniki badań korespondują więc np. z badaniami PISA dotyczącymi polskich piętnastolatków (por. [1]).

Literatura

- [1] DĄBROWSKI, M.: *O akceptowalności dowodów przez uczniów na przykładzie dowodów pewnych własności liczb naturalnych*, Dydaktyka Matematyki **14**, 5-71, 1991.
- [2] DĄBROWSKI, M.: *Pozwólmy dzieciom myśleć, O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa, 2008.

- [3] MAJOR, J.: *Uwagi dotyczące obrazu pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów matematyki*, w: *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, red. Czajkowska M., Treliński G., Wyd. Akad. Świętokrzyskiej, Kielce 2006, 143-150.
- [4] KURA, K.: *Rozumienie pjęcia parzystości przez uczniów gimnazjum*, praca dyplomowa powstała w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego, promotor Joanna Major, Kraków 2010.
- [5] *Mała Encyklopedia PWN*, Warszawa 2000.
- [6] FILIST, L. – MALINA, A. – SOLECKA, A.: *Słownik encyklopedyczny – matematyka*, Wydawnictwo Europa, 1998
- [7] CIESIELSKA, D. – EDIGARIAN, A. – KORDYKA, A. – WITECKA, B.: *Zielona Sowa, Słownik Szkolny Matematyka*, Kraków 2003.
- [8] BRAUN, M. – MAŃKOWSKA, A. – PASZYŃSKA, M.: *Matematyka z kluczem*, Wydawnictwo Nowa Era, 2008.
- [9] KRYGOWSKA, Z.: *Zarys Dydaktyki Matematyki, t.3*, WSiP, Warszawa 1977.

LOSOWE GRY HAZARDOWE A PROCES DECYZYJNY

Maciej Major

*Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
e-mail: mmajor@up.krakow.pl*

Abstract. In his article it is presented how one can make use of the notion of calculus of probability such as expected value, variance, standard deviation, semi-variance and semi-standard deviation in order to make the optimal decision as to the choice of a gambling game.

Wstęp

Praktycznie każdej działalności ludzkiej towarzyszy proces podejmowania decyzji. W każdym procesie decyzyjnym można wyróżnić kilka kolejnych faz. W literaturze najczęściej wymienia się następujące fazy:

1. identyfikacja sytuacji decyzyjnej,
2. sformułowanie problemu decyzyjnego,
3. zbudowanie modelu decyzyjnego,
4. wyznaczenie decyzji dopuszczalnych i decyzji optymalnych,
5. podjęcie ostatecznej decyzji,
6. realizacja podjętej decyzji.

W artykule podjęto próbę ukazania w jaki sposób pojęcia rachunku prawdopodobieństwa można wykorzystać do budowania modelu decyzyjnego i wyznaczania optymalnych decyzji w przypadku wybierania „lepszego” (bardziej opłacalnego z punktu widzenia gracza) hazardowej gry losowej.

1. Podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa wykorzystywane w pracy

Na wstępie zaprezentujemy definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszej części pracy (zob. [1], s. 19, 25-27, 30-32).

Definicja 1. Niech Ω będzie dowolnym zbiorem co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym. Każdą funkcję p ze zbioru Ω w zbiór $\mathbb{R}$, nieujemną i taką, że

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω . Parę (Ω, p) nazywamy ziarnistą albo dyskretną przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 2. Przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) nazywamy modelem probabilistycznym doświadczenia losowego δ , jeśli Ω jest zbiorem wszystkich możliwych wyników doświadczenia δ , a funkcja p przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo z jakim doświadczenie δ może się tym wynikiem zakończyć.

Definicja 3. Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{Z}$ zaś rodziną wszystkich zdarzeń w tej przestrzeni. Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję $P : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } \overline{A} \geq 2. \end{cases}$$

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A .

Definicja 4. Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Każdą funkcję $X_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową w tej przestrzeni.

Definicja 5. Jeżeli X jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) , Ω_X jest zbiorem jej wartości, a p_X jest funkcją określoną wzorem

$$p_X(x_j) = P(X = x_j) \quad \text{dla } x_j \in \Omega_X,$$

to parę (Ω_X, p_X) nazywamy przestrzenią probabilistyczną generowaną na prostej przez zmienną losową X , a funkcję p_X – rozkładem zmiennej losowej X .

Definicja 6. Niech X będzie zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) , Ω_X – zbiorem jej wartości, p_X zaś jej rozkładem. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę $E(X)$, gdzie

1° $E(X) = c$, gdy $\Omega_X = c$,

2° $E(X) = x_1 \cdot p_X(x_1) + x_2 \cdot p_X(x_2) + \dots + x_t \cdot p_X(x_t)$, gdy $\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$,

3° $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot p_X(x_j)$, gdy $\Omega_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, pod warunkiem, że ten szereg jest zbieżny i to bezwzględnie.

Twierdzenie 1. Jeżeli zmienna losowa X posiada wartość oczekiwaną, a i b zaś są ustalonymi liczbami rzeczywistymi ($a \neq 0$), to $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Twierdzenie 2. Jeżeli zmienne losowe X i Y określone są w tej samej przestrzeni probabilistycznej i każda posiada wartość oczekiwaną, to posiada ją również ich suma i $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Definicja 7. Jeżeli zmienna losowa X w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) posiada wartość oczekiwaną $E(X)$, to wariancję zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$D^2(X) = E[X - E(X)]^2.$$

Twierdzenie 3. Jeżeli X jest zmienną losową ziarnistą posiadającą wariancję, to wariancję tej zmiennej wyraża się wzorem

$$D^2(X) = \sum_{x_j \in \Omega_X} [x_j - E(X)]^2 p_X(x_j).$$

Definicja 8. Pierwiastek kwadratowy z wariancji $D^2(X)$ nazywamy odchyleniem standardowym zmiennej losowej X i oznaczamy σ_X .

Twierdzenie 3. Jeżeli zmienna losowa X posiada wartość oczekiwaną i wariancję, to

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

2. Hazardowa gra losowa jako problem decyzyjny

2.1. Pojęcie hazardowej gry losowej

Wiele zagadnień probabilistycznych związanych jest z analizą gier losowych, w których wygrywa się pieniądze, a za udział w których należy zapłacić. W takiej sytuacji zarówno wygrana gracza jak i zysk bankiera są zmiennymi losowymi określonymi na zbiorze możliwych wyników doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze. Tego typu gry będziemy nazywać *hazardowymi grami losowymi*. Uścielijmy to pojęcie.

Niech δ będzie doświadczeniem losowym o dającym się określić *a priori* modelu probabilistycznym. Załóżmy, że jest nim przestrzeń probabilistyczna $(\Omega_\delta, p_\delta)$. W tej przestrzeni określona jest zmienna losowa W o wartościach nieujemnych i wymiernych (złotówek, dolarów itp.) (...) Za udział w grze gracz wpłaca kwotę z złotych. Następnie przeprowadza się doświadczenie losowe δ i jeśli zakończy się ono wynikiem ω , gdzie $\omega \in \Omega_\delta$ to graczowi wypłaca się kwotę $W(\omega)$ zł. Opisaną grę nazywamy *hazardową grą losową*. Zmienną losową W , tj. kwotę uzyskaną za wynik doświadczenia δ (które dopiero nastąpi), nazywamy *wygraną gracza*.

zob. [2], s. 228.

Przykładami *hazardowych gier losowych* są gry oferowane przez Totalizator Sportowy (Lotto, Multi Multi, Mini Lotto). W wielu sytuacjach (np. w Multi Multi) wejście do gry jest związane z pewnym procesem decyzyjnym. Zauważmy, że w hazardowych grach losowych może uczestniczyć dowolna liczba osób.

2.2. Sprawiedliwa hazardowa gra losowa

Rozważmy następującą grę hazardową g_h^1 , w której rekwizytem jest urna U_1 o 100 kulach. Na każdej kuli znajduje się liczba naturalna z przedziału $[1, 7]$. Skład urny U_1 określa tabela.

numer na kuli	1	2	3	4	5	6	7
liczba kul	25	15	8	4	8	15	25

Po wpłaceniu kwoty z złotych za udział w grze, gracz uzyskuje prawo do wylosowania kuli z urny U_1 a jego wygraną (w złotych) określa liczba na wylosowanej przez niego kuli.

Rodzą się tu pytania: Przy jakiej opłacie z taką grę uznamy za *grę sprawiedliwą*? Jak rozumieć należy tę *sprawiedliwość*?

W celu odpowiedzi na postawione pytania zaprezentujemy pewne rozumowanie (por. [2], s. 228-231).

Po uiszczeniu przez gracza opłaty ale przed losowaniem kuli, wygrana gracza jest zmienną losową W_1 , której rozkład p_{W_1} określa poniższa tabela.

$j \in \Omega_{W_1}$	1	2	3	4	5	6	7
$p_{W_1}(j)$	$\frac{25}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$

Załóżmy, że gracz zamierza zagrać w grę g_h^1 bardzo wiele razy; przyjmijmy, że będzie to 100 powtórzeń gry i przeanalizujmy spodziewane zyski i straty gracza w tych stu grach.

Za udział w 100 grach gracz musi zapłacić $100 \cdot z$ zł. – to jego strata. Spodziewane zyski gracza prezentuje poniższa tabela.

j (wygrana gracza [zł])	1	2	3	4	5	6	7
l_j (oczekiwana liczba gier z wygraną j)	25	15	8	4	8	15	25
$j \cdot l_j$	25	30	24	16	40	90	175

Uzyskana kwota $1 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 25 = 25 + 30 + 24 + 16 + 40 + 90 + 175 = 400$ zł jest oczekiwaną wygraną gracza a zarazem oczekiwaną stratą bankiera. Grę g_h^1 nazwiemy sprawiedliwą, gdy

$$100 \cdot z = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 25,$$

a więc, gdy

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 25}{100} \\
 &= 1 \cdot \frac{25}{100} + 2 \cdot \frac{15}{100} + 3 \cdot \frac{8}{100} + 4 \cdot \frac{4}{100} + 5 \cdot \frac{8}{100} + 6 \cdot \frac{15}{100} + 7 \cdot \frac{25}{100} \\
 &= 1p_{W_1}(1) + 2p_{W_1}(2) + 3p_{W_1}(3) + 4p_{W_1}(4) + 5p_{W_1}(5) + 6p_{W_1}(6) + 7p_{W_1}(7) \\
 &= E(W_1).
 \end{aligned}$$

Na podstawie przeprowadzonego rozumowania można przyjąć następujące określenie *hazardowej gry losowej sprawiedliwej* (por. [2], s. 231).

Hazardową grę losową, w której wygrana jest zmienną losową W o skończonym zbiorze wartości i za udział w której należy wnieść opłatę z nazywamy *sprawiedliwą* jeśli ta opłata jest równa wartości oczekiwanej wygranej, tzn. jeśli $z = E(W)$.

2.3. Wariancja zmiennej losowej jako narzędzie wyłaniania optymalnej decyzji

Określmy teraz dwie zmienne losowe $Z_g := W - z$ oraz $Z_b := z - W$. Zmienna Z_g jest zyskiem (netto) gracza, zaś zmienna Z_b jest zyskiem (netto) bankiera. Hazardowa gra losowa będzie zatem sprawiedliwa, gdy $E(Z_g) = E(Z_b) = 0$. W przypadku hazardowej gry losowej na ogół jest $E(Z_g) < 0$, a więc $E(Z_b) > 0$ – salony gier muszą przecież prosperować.

Jest oczywistym, że jeśli gracz ma do wyboru jedną z dwu (lub więcej) gier to dla niego grą lepszą (najlepszą) jest ta, dla której jest większa wartość oczekiwana zysku (netto) gracza. W przypadku bankiera sytuacja jest dokładnie odwrotna.

Założmy teraz, że za udział w grze g_h^1 należy zapłacić 5 zł. Wyznamy wartości oczekiwane zmiennych losowych $Z_g^1 := W_1 - 5$ (będącej zyskiem gracza) oraz $Z_b^1 := 5 - W_1$ (będącej zyskiem bankiera).

Mamy

$$E(Z_g^1) = E(W_1 - 5) = E(W_1) - E(5) = 4 - 5 = -1.$$

Ponieważ $Z_b^1 = -Z_g^1$, więc $E(Z_b^1) = 1$.

Rozważmy teraz kolejną grę hazardową g_h^2 , w której rekwizytem jest urna U_2 , również o 100 kulach oznaczonych cyframi od 1 do 7, ale o innym składzie niż urna U_1 . Skład urny U_2 określa poniższa tabela.

numer na kuli	1	2	3	4	5	6	7
liczba kul	4	10	25	22	25	10	4

Po wpłaceniu kwoty 5 złotych za udział w grze, gracz uzyskuje prawo do wylosowania kuli z urny U_2 a jego wygraną (w złotychkach) określa, tak samo jak w przypadku gry g_h^1 , liczba na wylosowanej przez niego kuli.

Niech Z_g^2 będzie zyskiem gracza w grze g_h^2 (ujemny zysk jest stratą gracza). Poniższa tabela określa rozkład tej zmiennej losowej.

$j \in \Omega_{Z_g^2}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$p_{Z_g^2}(j)$	$\frac{4}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{22}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{4}{100}$

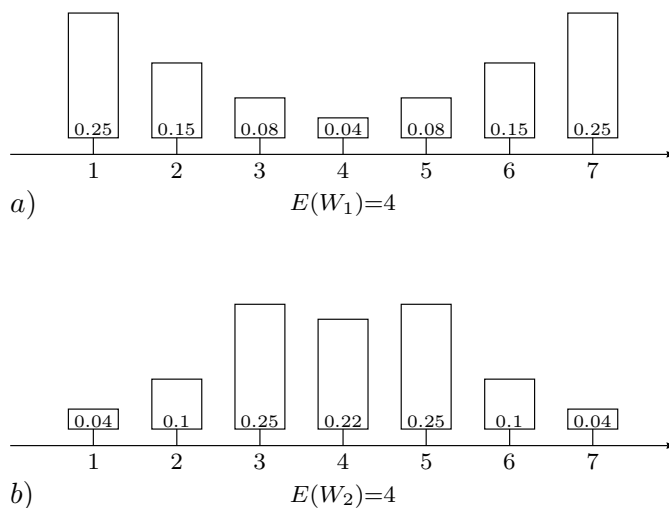
Zauważmy, że $E(Z_g^2) = -1$.

Założmy, że bankier oferuje dwie omówione gry hazardowe: g_h^1 i g_h^2 . Przypomnijmy, że za udział w każdej z nich należy zapłacić 5 zł. Z przeprowadzonych rozumowań wynika, że $E(Z_g^1) = E(Z_g^2) = -1$. Jest oczywistym, że w tej sytuacji mamy $E(W_1) = E(W_2) = 4$. Można zatem postawić hipotezę, że obydwie gry hazardowe są dla gracza równie dobre. Pojawia się pytanie, czy tak jest w istocie.

Zauważmy, że jeśli w każdą z dwu oferowanych przez bankiera gier zagra dostatecznie dużo graczy (lub jeden gracz dużą liczbę razy) to oczekiwane średnie zyski bankiera z każdej z rozegranych gier są takie same i wynoszą 1 zł. (tak jest, gdyż $E(Z_b^1) = E(Z_b^2) = 1$). Przy takich założeniach gry g_h^1 i g_h^2 są dla bankiera równie dobre (przynoszą takie same spodziewane zyski).

W przypadku gracza zamierzającego grać w wybraną przez siebie grę (spośród gier g_h^1 i g_h^2) bardzo wiele razy również jest obojętne, którą grę wybierze – oczekiwana wygrana gracza (a tym samym oczekiwany jego zysk (netto)) w obydwu grach jest taka sama.

Jeśli natomiast gracz zamierza zagrać w grę jeden raz, czy też kilka, kilkanaście razy, to sytuacja się zmienia. Przyjmijmy, że gracz kieruje się zasadą „maksimum zysku przy minimum ryzyka” (zob. [3], s. 71.) Spodziewana wygrana (a tym samym spodziewany zysk) w obydwu przypadkach jest taka sama, a więc należy poszukiwać kryterium porównywania ryzyka gry w tych dwu grach. W tym celu przeanalizujemy wykresy rozkładów zmiennych losowych W_1 i W_2 (formalnie należałoby analizować rozkłady zmiennych losowych Z_g^1 i Z_g^2 ale ponieważ $E(Z_g^1) = E(Z_g^2)$ i opłata za udział w obydwu grach jest taka sama, więc można analizować rozkłady zmiennych W_1 i W_2).



Rysunek 1.

Zauważmy, że dla zmiennej losowej W_2 (rys. 1b)) istotnie prawdopodobne wartości zmiennej losowej skupiają się blisko jej wartości oczekiwanej, zaś w przypadku zmiennej losowej W_1 jej bardzo prawdopodobne wartości są znacznie oddalone od jej wartości oczekiwanej (rys. 1a)). Oznacza to że jest bardziej prawdopodobne, że wygrana gracza w grze g_h^2 będzie mało różnić się od $E(W_2)$ (średniej wygranej w tej grze g_h^2) niż, że wygrana gracza w grze g_h^1 będzie mało różnić się od $E(W_1)$ (średniej wygranej w grze g_h^1).

Gracz stosujący strategię „maksimum zysku przy minimum ryzyka” powinien zatem wybrać grę g_h^2 , w której narażony jest na mniejsze ryzyko uzyskania wygranej istotnie różniącej się od oczekiwanej wygranej.

Przeprowadzone rozumowania nasuwa pomysł wykorzystania wariancji zmiennej losowej (będącej miarą odchylenia (rozproszenia) poszczególnych wartości zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej) lub też odchylenia standardowego (pierwiastka kwadratowego z wariancji) jako miar ryzyka pozwalających wartościować (porządkować) zmienne losowe o takiej samej wartości oczekiwanej – im mniejsza wariancja zmiennej losowej (mniejsze odchylenie standardowe) tym mniejsze ryzyko uzyskania wygranej znacznie różniącej się od wartości oczekiwanej zmiennej losowej.

Powróćmy do problemu wyboru lepszej z gier g_h^1 i g_h^2 w sytuacji, gdy gracz stosuje zasadę „maksimum zysku przy minimum ryzyka” i obliczmy wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennych losowych W_1 oraz W_2 . Mamy

$$D^2(W_1) = 5.86, \quad D^2(W_2) = 2.02, \quad \sigma_{W_1} \approx 2.42, \quad \sigma_{W_2} \approx 1.42.$$

Jest $D^2(W_2) < D^2(W_1)$, a więc grą o mniejszym ryzyku jest gra g_h^2 .

2.4. Semiwariancja zmiennej losowej jako narzędzie wyłaniania optymalnej decyzji

Rozważmy teraz sytuację, w której bankier oferuje dwie gry g_h^3 i g_h^4 . Przyjmijmy że opłata za udział w każdej z tych dwu gier wynosi 4.1 zł.

Niech W_3 i W_4 będą zmiennymi losowymi będącymi wygranymi gracza odpowiednio w grach g_h^3 oraz g_h^4 . Rozkłady tych zmiennych losowych prezentują poniższe tabele.

$$p_{W_3}:$$

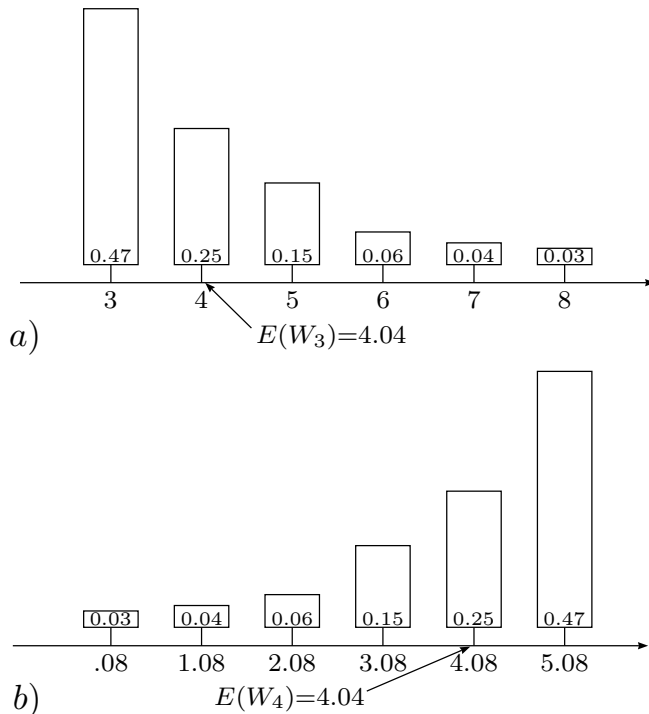
$j \in \Omega_{W_3}$	3	4	5	6	7	8
$p_{W_3}(j)$	$\frac{47}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{3}{100}$

$$p_{W_4}:$$

$j \in \Omega_{W_4}$	0.08	1.08	2.08	3.08	4.08	5.08
$p_{W_4}(j)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{47}{100}$

Przeanalizujmy, którą z gier g_h^3 i g_h^4 powinien wybrać gracz stosujący strategię „maksimum zysku przy minimum ryzyka”.

Rysunek 2 prezentuje wykresy rozkładów zmiennych losowych W_3 i W_4 .



Rysunek 2.

Zauważmy, że $E(W_3) = E(W_4)$ oraz $D^2(W_3) = D^2(W_4)$ (ostatnia równość jest prawdziwa, ponieważ $W_4 = -W_3 + 8.08$). Nasuwa się tu pytanie: Czy gry g_h^3 i g_h^4 są jednakowo dobre dla gracza stosującego strategię „maksimum zysku przy minimum ryzyka”?

W celu odpowiedzi na postawione pytanie przeanalizujemy wykresy z rysunku 2. Dla rozkładu zmiennej losowej W_3 „większość” prawdopodobieństwa (przeszło 70%) skupiona jest „poniżej” wartości oczekiwanej. Dla rozkładu zmiennej losowej W_4 jest na odwrót. Obserwacja ta skłania do uznania gry g_h^4 lepszą od g_h^3 .

Możemy taki wybór uzasadnić następująco. Określmy tak zwaną semiwariancję zmiennej losowej X modyfikując definicję wariancji zmiennej losowej X następująco

$$SV^2(X) = \sum_{x_j \in \Omega_X} p_X(x_j) d_j^2,$$

$$\text{gdzie } d_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_j \geq E(X), \\ x_j - E(X) & \text{dla } x_j < E(X) \end{cases}$$

Zdefiniujmy jeszcze semiodchylenie standardowe następująco

$$SV(X) := \sqrt{SV^2(X)}.$$

Jeśli założymy, że ryzyko gracza powinno być określane na podstawie niepożądaných, tj. ujemnych odchyień od oczekiwanej wygranej, to za miarę ryzyka można przyjąć semiwariancję lub też semiodchylenie standardowe.

Powróćmy do problemu wyboru lepszej z gier g_h^3 i g_h^4 w sytuacji, gdy gracz stosuje zasadę „maksimum zysku przy minimum ryzyka” i obliczmy semiwariancję oraz semiodchylenie standardowe zmiennych losowych W_1 oraz W_2 .

Mamy

$$SV^2(W_3) = 1.47, \quad SV^2(W_4) \approx 0.32, \quad SV(W_3) \approx 1.21, \quad SV(W_4) \approx 0.56.$$

Jest $SV^2(W_4) < SV^2(W_3)$, a więc grą o mniejszym ryzyku jest gra g_h^4 .

Rozważmy teraz sytuację, w której bankier oferuje dwie gry g_h^5 i g_h^6 , takie że średnie zyski gracza (netto) w tych grach są dodatnie oraz różne tj. $E(Z_g^5) > 0$, $E(Z_g^6) > 0$ oraz $E(Z_g^5) \neq E(Z_g^6)$. Tego typu gry nie mogą być samofinansujące, gdyż w krótkim czasie doprowadzą bankiera do bankructwa, niemniej jeśli bankier posiadałby sponsora¹⁴, to taka gra może funkcjonować. Tego typu gry nazwijmy *sponsorowanymi hazardowymi grami losowymi*.

¹⁴Możliwość udziału w takiej grze może być np. premią za częstą grę w inne gry hazardowe.

Niech Z_g^5 i Z_g^6 będą zmiennymi losowymi będącymi zyskami gracza odpowiednio w grach g_h^5 oraz g_h^6 . Rozkłady tych zmiennych losowych prezentują poniższe tabele.

$$p_{Z_g^5}:$$

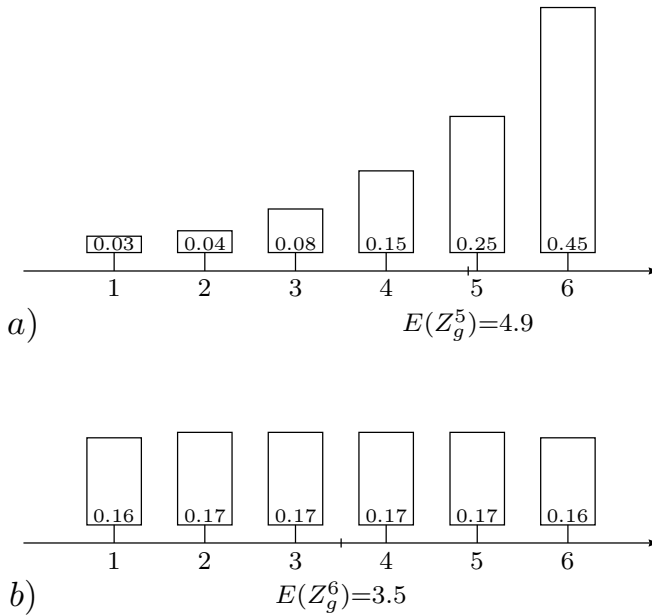
$j \in \Omega_{Z_g^5}$	1	2	3	4	5	6
$p_{Z_g^5}(j)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{45}{100}$

$$p_{Z_g^6}:$$

$j \in \Omega_{Z_g^6}$	1	2	3	4	5	6
$p_{Z_g^6}(j)$	$\frac{16}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{16}{100}$

Przeanalizujemy którą z gier g_h^5 i g_h^6 powinien wybrać gracz stosujący strategię „maksimum zysku przy minimum ryzyka”.

Rysunek 3 prezentuje wykresy rozkładów zmiennych losowych Z_g^5 i Z_g^6 .



Rysunek 3.

Zauważmy, że $4.9 = E(Z_g^5) > E(Z_g^6) = 3.5$. Gra g_h^5 wydaje się być korzystniejsza dla gracza od gry g_h^6 , gdyż gracz który ją wybierze może spodziewać się większego zysku od gracza, który wybrał grę g_h^6 . Słuszność wyboru gry potwierdzają wariancje zmiennych losowych Z_g^5 oraz Z_g^6 . Mamy

$$D^2(Z_g^5) = 1.75, \quad D^2(Z_g^6) = 3.5, \quad \text{oraz} \quad \sigma_{Z_g^5} \approx 1.32, \quad \sigma_{Z_g^6} = 1.87,$$

a więc gra g_h^5 charakteryzuje się mniejszym ryzykiem niż gra g_h^6 .

2.5. Współczynnik zmienności losowej jako narzędzie wyłaniania optymalnej decyzji

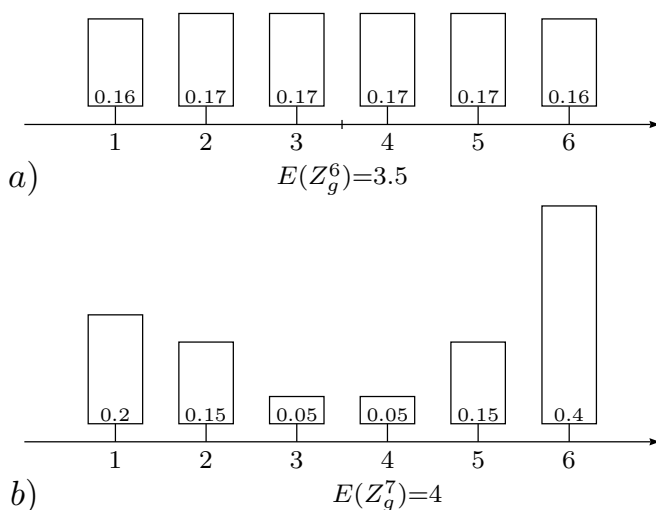
Rozważmy na koniec sytuację, w której bankier oferuje dwie gry, wspomnianą już grę g_h^6 oraz grę g_h^7 .

Niech Z_g^7 będzie zmienną losową będącą zyskiem gracza w grze g_h^7 . Rozkład zmiennej losowej prezentuje poniższa tabela.

$$p_{Z_g^7}: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline j \in \Omega_{Z_g^7} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_{Z_g^7}(j) & \frac{20}{100} & \frac{15}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{15}{100} & \frac{4}{100} \\ \hline \end{array}$$

Przeanalizujemy którą z gier g_h^6 i g_h^7 powinien wybrać gracz stosujący strategię „maksimum zysku przy minimum ryzyka”.

Rysunek 4 prezentuje wykresy rozkładów zmiennych losowych Z_g^7 i Z_g^6 .



Rysunek 4.

Zauważmy, że także w tej sytuacji średnie zyski gracza (netto) w tych grach są dodatnie oraz różne tj. $E(Z_g^6) > 0$, $E(Z_g^7) > 0$ i $4 = E(Z_g^7) > E(Z_g^6) = 3.5$. Gra g_h^7 wydaje się być korzystniejsza dla gracza od gry g_h^6 , gdyż gracz który ją wybierze może spodziewać się większego zysku od gracza, który wybrał grę g_h^6 . Pojawia się pytanie: Czy jest tak na pewno?

Zbadajmy, która z oferowanych gier charakteryzuje się mniejszym ryzykiem. W tym celu obliczmy wariancje zmiennych losowych Z_g^6 i Z_g^7 . Mamy

$$D^2(Z_g^6) \approx 2.85, \quad D^2(Z_g^7) = 4.2, \quad \text{oraz} \quad \sigma_{Z_g^6} \approx 1.69, \quad \sigma_{Z_g^7} \approx 2.05,$$

a więc gra g_h^6 jest dla gracza korzystniejsza od gry g_h^7 (charakteryzuje się mniejszym ryzykiem).

Zastosowane kryteria nie pozwalają zatem na podjęcie optymalnej decyzji. W rozważanej sytuacji gracz, który chce maksymalizować swój zysk jednocześnie minimalizując ryzyko, będzie preferował tę grę, w której przypada mniej ryzyka na jednostkę zysku.

Miarą, która pozwala różnicować zmienne losowe (a tym samym gry), których wartość oczekiwana jest różna od zera, jest współczynnik zmienności losowej zmiennej losowej X określany wzorem

$$V_X = \frac{\sigma_X}{E(X)}.$$

Przyjmując jako kryterium podejmowania decyzji przy wyborze gry lepszej współczynnik zmienności losowej, jako lepszą należy uznać tę grę, dla której wartość współczynnika zmienności zysku gracza (netto) będzie najmniejsza.

Obliczmy zatem współczynniki zmienności losowej dla zmiennych Z_g^6 i Z_g^7 . Mamy

$$V_{Z_g^6} \approx 0.482, \quad V_{Z_g^7} \approx 0.512,$$

co oznacza, że mniej ryzyka na jednostkę zysku przypada w przypadku gry g_h^6 . Tak więc lepszą okazuje się gra o mniejszej wartości oczekiwane zysku gracza (netto).

Zaproponowane narzędzie rozstrzygania, która z gier jest lepsza ma jednak wadę. Otóż można go stosować tylko do zmiennych losowych o dodatniej wartości oczekiwanej. Rozszerzenie stosowalności kryterium także na zmienne o ujemnej wartości oczekiwanej nie powoduje matematycznych komplikacji ale prowadzi do sprzeczności, gdyż w takiej sytuacji najbardziej ryzykowne gry (duże odchylenie standardowe) o największym ujemnym średnim zysku (największej stracie) uznawane byłyby za najlepsze.

Niedogodność tę można w pewnym sensie usunąć definiując współczynnik W_X będący odwrotnością współczynnika V_X , tj.

$$W_X = \frac{E(X)}{\sigma_X}.$$

Tak określony współczynnik nie ma sensu jedynie dla zmiennych losowych dla których $\sigma_X = 0$, ale w tym przypadku rozkład zysku gracza jest jednopunktowy, a więc wygrana jest znana i nie ma mowy o ryzyku (takich gier nikt nie oferuje w praktyce).

Przyjmując jako kryterium hierarchizowania gier współczynnik W_X należy wybierać te, dla których jest on największy.

Zakończenie

W pracy zaproponowano pewne kryteria wyłaniania gry lepszej od pozostałych. Można konstruować też inne miary pozwalające wspomagać proces podejmowania decyzji. Zaproponowane przykłady mogą być wykorzystane np. w analizie zachowań graczy giełdowych.

Literatura

- [1] PŁOCKI, A.: *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo naukowe NOVUM, Płock 2005.
- [2] PŁOCKI, A.: *Stochastyka dla nauczyciela*, Wydawnictwo naukowe NOVUM, Płock 2005.
- [3] TARCZYŃSKI, W. – MOJSIEWICZ, M.: *Zarządzanie ryzykiem*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001.

VPLYV IMPLICITNÝCH KOMBINATORICKÝCH MODELOV NA KOMBINATORICKÉ MYSLENIE

Daša Palenčárová

*Prírodovedecká fakulta, Ústav matematických vied
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: dasa.palencarova@student.upjs.sk*

Abstract. We say that the combinatorial problem is elementary if it can be solved using one combinatorial operation (permutations, combinations, variations with or without repetition). Elementary combinatorial problems may be classified into three different combinatorial models (selection, partition and distribution). In this paper, we describe the effect of the implicit combinatorial model for understanding the problem. We consider also the most common errors in the solutions of the problems. Based on our results we formulate ideas of the selection of combinatorial problems for mathematics lessons.

1. Úvod

Kombinatorika je významnou časťou diskkrétnej matematiky, stretávame sa s ňou v každodennom živote. Tvorí súčasť učebných plánov na základných a stredných školách.

Keď sa povie kombinatorika, pre mnohých žiakov a študentov je to asociácia s negatívnou skúsenosťou počítania permutácií, kombinácií, variácií a s hľadaním správneho vzorca. Na druhej strane kombinatorika je časťou matematiky, ktorá na začiatku nevyžaduje žiadny zložitý matematický aparát len znalosť základného matematického učiva.

Pre zvýšenie pozornosti žiakov a zefektívnenie učenia kombinatoriky je vhodné na hodinách voliť úlohy zo života žiakov, s ktorými majú žiaci reálne skúsenosti alebo sú im blízke (úlohy s kódovacími zámkami, s rozsadnením žiakov v triede). Aj napriek vhodnej motivácii sú problémy s riešením týchto úloh.

Dva základné kroky pre zlepšenie vyučovania kombinatoriky sú

- a) porozumenie podstaty žiackych chýb, keď riešia kombinatorické úlohy,
- b) identifikácia zmien, ktoré môžu mať vplyv na túto ťažkosť (zmeny vo formuláciách úloh, zmeny vo výučbe).

2. Implicitný kombinatorický model v jednoduchých kombinatorických úlohách

V príspevku sa zmeriame na to, ako môže formulácia ovplyvniť obtiažnosť úlohy. Budeme vychádzať z výsledkov výskumu Batanera, Navarra - Pelaya a Godina [1].

Jednoduchou kombinatorickou úlohou budeme nazývať úlohu, pri riešení ktorej je možné použiť jednu kombinatorickú operáciu (kombinácie, variácie, permutácie s opakovaním alebo bez opakovania).

Príklad jednoduchej kombinatorickej úlohy:

Koľko zápasov sa odohrá vo futbalovom turnaji, v ktorom hrá päť družstiev systémom každý s každým jeden zápas?

Príklad nejednoduchej kombinatorickej úlohy:

Určte počet všetkých desaťciferných čísel, ktorých ciferný súčet sa rovná 3. Koľko z nich je párnych?

Podľa Duboisia [2] jednoduché kombinatorické úlohy môžu byť klasifikované v troch implicitných kombinatorických modeloch (ICM):

Model selection - znenie úlohy požaduje výber n objektov z m (vziať, vybrať, ťahať, zbierať, zvoliť).

Úloha na model selection: V triede je 10 žiakov. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať predsedu a pokladníka triedy?

Model distribution - je propedeutikou zobrazenia, znenie úlohy požaduje rozdelenie n objektov do m buniek (umiestni, rozdeľ, vlož, priradiť, rozložiť).

Úloha na model distribution: Garáž v budove má 5 očíslovaných miest. Keďže budova je nová, má iba troch obyvateľov (Peťo, Janka, Danko), ktorí parkujú v garáži. Koľko rôznych spôsobov majú na parkovanie? Napríklad dnes Peťo parkuje na č. 1, Janka na č. 2 a Danko na č. 5.

Model partition - je propedeutikou rozdelenia množín na podmnožiny, znenie úlohy požaduje oddeliť n objektov do m skupín (separovať, oddeliť, rozdeliť).

Úloha na model partition: Danko a Janka majú známky očíslované číslami 1 až 4. Rozhodli sa podeliť si známky, dve pre každú z nich. Koľkými možnými spôsobmi si môžu podeliť známky?

Batanero a kol. [1] skúmali vplyv ICM na správnosť riešenia úlohy v Španielsku na 13 školách. Vo svojom výskume zadávali 720 žiakom 13 úloh, z toho 352 žiakov už absolvovalo výučbu kombinatoriky a 348 žiakov nie. U žiakov, ktorí neabsolvovali predchádzajúcu výučbu sa očakávalo, že úlohy budú riešiť pravidlom súčtu, súčinu, rekurzívnym myslením.

Vyhodnotenie výskumu:

- v skupine, ktorá výučbu kombinatoriky nemala sa nenachádzali veľké odlišnosti v riešeníach úloh jednotlivých ICM.
- v skupine, ktorá už absolvovala výučbu kombinatoriky sa objavilo zlepšenie najmä u úloh modelu selection, u distribution zlepšenie nebolo značné a u partition žiadne.

3. Experiment

Na základe vyššie uvedených výsledkov sme sa rozhodli uskutočniť experiment medzi žiakmi ZŠ, v ktorom sme sa zamerali na zistenie vplyvu ICM na správnosť riešenia úlohy. Ďalej sme analyzovali, akých najčastejších chýb sa žiaci dopustili. V prvej fáze sme uskutočnili predexperiment na PF UPJŠ.

Výber úloh

Do experimentu sme navrhli tri úlohy, každú na iný implicitný kombinatorický model, ale všetky sa dali riešiť rovnakou kombinatorickou operáciou. Pri tvorbe úloh sme sa zamerali na to, aby text bol pre žiakov napísaný zrozumiteľne a nebol príliš dlhý. Pre žiakov základnej školy boli tieto úlohy upravené tak, aby ich bolo možné riešiť výpisom všetkých možností.

Úloha 1

V škatuli sú tri očíslované guľky (s číslami 2, 4, 7). Vyberieme jednu guľku a zapíšeme jej číslo. Guľku vrátime späť do škatule. Opakujeme to, až kým nedostaneme štvorciferné číslo. Koľko rôznych štvorciferných čísel môžeme získať? Napríklad po vytiahnutí guľky s číslom 2 štyrikrát za sebou získame číslo 2222.

Úloha 2

Štyri deti: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícii dve rôzne izby (jednu na prízemí a ďalšiu na poschodí). Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti? Napríklad jedna možnosť je, že všetky deti budú spať v izbe na prízemí.

Úloha 3

Chlapec má tri autíčka rôznych farieb (čierne, červené a žlté) a chce ich rozdeliť štyrom kamarátom - Peťovi, Jožovi, Danielovi a Maťovi. Koľkými spôsobmi môže rozdeliť autíčka? Napríklad jedna možnosť je, že všetky autíčka dá Peťovi.

Predexperiment

Zúčastnilo sa ho 63 študentov Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach, konkrétne študenti matematiky a informatiky. Vyhodnotenie správnosti úloh uvádzame v Tabuľke 1.

	Úloha 1 (selection)	Úloha 2 (distribution)	Úloha 3 (partition)
Správne	44 (70%)	28 (44,4%)	13 (20,6%)
Nesprávne	14 (22%)	34 (54%)	43 (68,3%)
Neriešili	5 (8%)	1 (1,6%)	7 (11,1%)

Tabuľka 1 – vyhodnotenie experimentu na PF UPJŠ

Analýza učebníc

Na základe výsledku tohto predexperimentu sme sa rozhodli analyzovať učebnice používané vo výučbe na základných školách a gymnáziách na Slovensku. Boli to učebnice od vydavateľstva Orbis Pictus Istropolitana (OPI) a Slovenského pedagogického nakladateľstva (SPN). V učebniciach sa nachádza veľké množstvo úloh, ktoré nabádajú žiakov k výpisu všetkých možností (Napíš všetky trojciferné čísla pomocou číier 1, 2, 3.). Tieto úlohy sme vyčlenili pri úlohách modelu distribution (*). Počet úloh jednotlivých ICM uvádzame v Tabuľke 2 a 3.

	selection	distribution	partition
SPN 6	9	6 + 45*	1
SPN 7	30	10 + 3*	1
OPI 6	12	8 + 2*	0
OPI 7	25	17 + 3*	1

Tabuľka 2 – analýza učebníc základných škôl

	selection	distribution	partition
SPN 2	33	21 + 6*	8
OPI 1	25	9 + 3*	2

Tabuľka 3 – analýza učebníc gymnázií

V učebniciach prevládajú úlohy modelu selection, v menšom množstve sa tam nachádzajú úlohy modelu distribution a úlohy na model partition sa na základnej škole takmer vôbec nenachádzajú a na gymnázium sú zastúpené v menšej miere ako úlohy ostatných ICM.

Vyhodnotenie predexperimentu

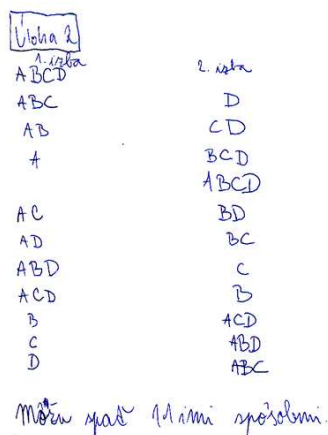
Najviac správnych riešení nachádzame v úlohe 1(model selection). Môže to byť práve tým, že v slovenských učebniciach je najviac úloh práve na tento model. Najmenej úspešná je úloha 3 (model partition). Úlohy na tento model sa riešia na hodinách matematiky v malom množstve.

Najčastejšie chyby u študentov PF UPJŠ

Študenti často riešili úlohy použitím kombinačných čísel a výpisom možností. Práve tu vznikali najčastejšie chyby. Žiaci používali pri riešení nekorektné operácie a to napríklad: vynásobili alebo sčítali medzi sebou

Najčastejšie chyby u žiakov ZŠ

Až 78 percent riešených úloh boli riešené výpisom možností. Najčastejšou chybou bol práve nesystematický alebo nedokončený výpis možností (Obrázok 3) a nekorektné operácie pri hľadaní riešenia, u žiakov to bolo konkrétne vynásobenie, vydelenie, sčítanie alebo odčítanie ľubovoľných čísel zo zadania úlohy (Obrázok 4).



Obrázok 3 – riešenie úlohy 2 u žiaka výpisom možností

$$\textcircled{2} \text{ Ľuboš, Beáta, Cyril, Daniel} = 744 \cdot 2 = \underline{32} + 2 = \underline{34} \text{ možností}$$

Obrázok 4 – riešenie úlohy 2 u žiaka použitím nekorektných operácií

4. Záver

Výsledky experimentu ukazujú, že implicitný kombinatorický model má vplyv na obtiažnosť úlohy. Pre žiakov, ktorí absolvovali výučbu kombinatoriky sú úlohy modelu selection ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu partition. V jednotlivých riešeniach sme pozorovali, že niektorí žiaci aplikujú vzorec pre výpočet kombinatorickej operácie u úlohy selection, no v inom kombinatorickom modeli to aplikovať neboli schopní. U žiakov, ktorí kombinatoriku ešte nemali, neboli veľké rozdiely v úspešnostiach jednotlivých úloh. Príčinu môžeme hľadať aj vo výbere úloh v učebniciach, s ktorými žiaci pracujú na hodinách matematiky, kde prevládajú úlohy na model selection a úlohy na model partition sa vyskytujú len veľmi málo. Pri analýze chýb sme spozorovali u študentov nárast použitia kombinačných čísel a faktoriálov, bez akejkoľvek snahy overenia správnosti výsledku. Z nášho

výskumu, ale aj z ďalších môžeme usúdiť, že na hodinách matematiky je potrebné riešiť v rovnakom množstve úlohy na každý implicitný kombinatorický model.

Literatúra

- [1] Batanero, C. – Navarro-Pelayo, V. – Godino, J. D.: *Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils*. Educational Studies in Mathematics 32 (1997): 181 - 199.
- [2] Godino, J. D. – Batanero, C. – Roa, R.: *An Onto-semiotic Analysis of Combinatorial Problems and the Solving Processes by University Students*. Educational Studies in Mathematics (2005) 60 : 3 - 36.
- [3] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 6. ročník základných škôl*, 1. vydanie, 2. časť. SPN, Bratislava 1999.
- [4] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl*, 1. vydanie, 2. časť. SPN, Bratislava 2000.
- [5] Repáš, V. a kol.: *Matematika pre 6. ročník základných škôl*, 1. vydanie, 2. diel. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 1999.
- [6] Repáš, V. a kol.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl*, 1. vydanie, 2. diel. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2000.
- [7] Odvárko, O. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia*, 1. vydanie. SPN, Bratislava 1985.
- [8] Hecht, T. a kol.: *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ - Kombinatorika* 2. vydanie, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 2000.

PREMENA INTERAKTÍVNEJ TABULE Z HRAČKY NA EFEKTÍVNU UČEBNÚ POMÔCKU PRE VYUČOVANIE MATEMATIKY

Edita Partová

*Pedagogická fakulta, Univerzita Komenského v Bratislave
Račianska 59, 813 34 Bratislava
e-mail: partova@gmail.com*

Abstract. The paper deals with effectivity of digital whiteboard in mathematics teaching. There are presented some results of investigations from using of this tool in teacher training and their comparation with literature. There are presented some examples and suggestions for elementary teachers how improve the interactivity and effectivity of their teaching by digital whiteboard.

1. Úvod

Každá nová učebná pomôcka zaujme žiaka už svojou novosťou a motivuje ho používať. Po istom čase nastupuje rutina v používaní pomôcky a atraktivita rýchlo klesá ak sa nenájde zmysluplné používanie vo vyučovaní. Tento osud pravdepodobne čaká aj digitálne tabule ak nedokážeme ich integrovať zmysluplným a spôsobom do vyučovania a zvýšiť efektivitu vyučovania. Efektivitu nemožno zredukovať na ekonomický vzorec "za kratší čas viac učiva", vyučovanie je efektívne, ak žiak získa čo najširšie vedomosti o danej problematike, čiže poznatky z rôznych pohľadov, ktoré sú v súlade s najnovšími vedeckými výsledkami, aby si mohol svoje vedomosti prehĺbiť, podrobiť kritike, dotvoriť, revidovať a konfrontovať s praxou. Samozrejme, to všetko musí nastať v rozumnom časovom intervale, nie však v strese. Očakávanie voči interaktívnej tabuli sú veľké, až neopodstatnené. Potenciál interaktívnej digitálnej tabule je možné v plnom rozsahu využiť len vtom prípade ak popri zručnosti ovládania pomôcky sa podarí existujúci digitálny obsah integrovať do vyučovania dotvoriť a obohatiť pedagogickým majstrovstvom.

2. Súčasný stav používania digitálnej tabule vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ

Informácie z oblasti využívania digitálnej tabule vo vyučovaní sú dostupné najmä na internete, ale sú často neobjektívne, lebo väčšinou ich zverejňujú:

- učitelia-nadšenci, majstri vo vyučovaní, ktorí by akoukoľvek pomôckou učili úspešne a zaujímavo,
- technicky založení učitelia, ktorých nadchli technické možnosti interaktívnej tabule
- výrobcovia a reklamné firmy, ktoré propagujú svoj výrobok.

O výsledkoch seriózneho výskumu sa dočítame len zriedkakedy aj to sú parciálne zistenia zverejnené najmä na konferenciách. Krátka doba od hromadného rozšírenia tejto pomôcky ani neumožňuje vyvodiť významné všeobecne platné závery, skôr sa ukazujú nejaké tendencie a rysujú sa nedostatkové oblasti.

Vidíme určitú paralelu so zavedením počítačov do vyučovania, kedy prvé odporúčané aktivity pre začiatočníkov boli hry, ale začiatočné nadšenie z novej "hračky" vystriedal pocit nedostatku vhodného vyučovacieho obsahu. Domnievame sa, že podobný proces môžeme očakávať aj pri používaní digitálnej tabule. Je prirodzené, že prvá reakcia detí bude nadšenie z novej pomôcky a pravdepodobne najprv budú skúšať hry alebo hrové činnosti na tabuli. Bolo by smutné a z pohľadu vyučovacích cieľov ani nežiaduce, keby zostali pri týchto činnostiach. Na školách by sa zakonzervovala domnienka, že interaktívna tabuľa je len dokonalejšie premietacie plátno a nenapomáha zmene vyučovacieho štýlu učiteľa ani k efektívnejšiemu osvojovaniu učiva.

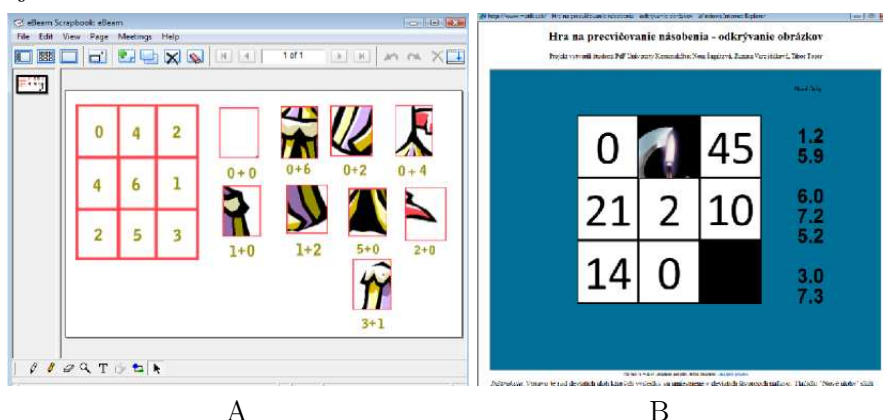
3. Hry, didaktické hry a hrové činnosti na digitálnej tabuli

Vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ majú didaktické hry významnú úlohu, vzhľadom na vekové charakteristiky žiakov. Mladší žiaci preferujú skôr zábavné hry, oddychové, rolové alebo hry s jednoduchými pravidlami. Povaha hier sa mení so zvýšením veku žiakov smerom ku komplexnejším, kreatívnym strategickým hrám, k hrám so zložitejšími pravidlami a dlhším priebehom. Nová technická pomôcka nosí v sebe hrovú činnosť už samotnou novosťou, je to pre žiakov tajomná "hádanka". Skúmajú aká bude reakcia pomôcky na ich činnosť. Digitálne tabule s dotykovým ovládaním majú v tejto fáze, fáze zoznamovania sa s pomôckou potenciál najdlhšie zaujať žiakov. Ovládanie virtuálnych objektov na tabuli rukou je fascinujúce aj pre dospelého, pre deti to platí viacnásobne. V súlade s Krejčovou (Krejčová, 2009) tvrdíme, že pri výbere hry alebo hrovej činnosti musíme dbať na to, aby nevyvolali obavu z neúspechu, preto sú vhodné tie hry, ktoré vyžadujú poznatky z rôznych oblastí (nie len z matematiky) a tie, v ktorých na úspešnosti sú zastúpené v rovnakej miere vedomosti aj náhoda.

Takými hrami sú rôzne kartové hry, domino alebo rôzne hry s hracími kockami. Pričom pod kartovými hrami rozumieme všetky hry, v ktorých sa ťahá karta - lístok. Karta môže slúžiť na riešenie úlohy, dávať inštrukciu,

môže sa vložiť do skladačky alebo slúži na hru podľa pravidiel klasických kartových hier. Na digitálnej tabuli sú dostupné digitálne verzie niektorých z uvedených typov hier napríklad na www.matika.sk.

Na obrázku 1 je znázornená tá istá didaktická hra dvoma spôsobmi: 1A je pracovný list na interaktívnej tabuli, 1B program v jazyku Imagin na internete. Sú to dve možnosti digitalizácie hry na spôsob skladania obrázka z papierových kartičiek. Pri manipulácii s papierovými kartičkami, žiak vníma hrovú činnosť v utajení obrazu a skladaní dielikov, teda v manipulácii so skutočnými objektmi. Pri počítačovej verzii z uvedeného ostáva len utajenie, manipulácia myšou na podložke, ktorá vyvolá pohyb kartičiek na obrazovke sa nadá stotožniť s manipuláciou v pravom zmysle (chytím a preložím). V prípade interaktívneho pracovného listu 1A je manipulácia priama, hoci nie so skutočnými, ale s virtuálnymi kartičkami. Ak použijeme dotykovú digitálnu tabuľu, efekt je blízky k efektu skladania skutočných dielikov, pričom didaktický efekt je vo všetkých prípadoch rovnaký, precvičenie základných spojov násobenia.



Obrázok 1 - skladanie obrazu, didaktická hra na precvičovanie základných spojov násobenia

Nevýhodou hier na tabuli je, že aktívne hrá naraz len jeden žiak, ostatní len radia alebo sa žiaci striedajú pri tabuli. Tento spôsob hry nepája každého žiaka tak, ako sa od didaktickej hry očakáva (Krejčová, 2009). Rovnako to platí aj pre digitálny vyučovací obsah, preto práca s digitálnou interaktívnou tabuľou je nápomocná predovšetkým pri frontálnom vyučovaní. Interktivita medzi žiakmi a tabuľou nenastane automaticky, vyžaduje aj zmenu metodiky a vyučovacieho štýlu učiteľa.

4. Vyučovací obsah pre digitálne tabule

Na digitálnej tabuli je možné využiť už hotový vyučovací obsah, ktorý je dostupný z rôznych zdrojov.

- Najjednoduchšie je používať softvér, ktorý už učiteľ predtým používal pomocou projektora alebo v počítačovej učebni na počítačoch.
- Na internete je množstvo stránok s výučbovým softvérom, ich tematika aj didaktické kvality sú na rôzne úrovni, a naozaj kvalitný softvér ponúka len niekoľko web stránok.
- K niektorým typom interaktívnych tabúl je priložený softvér, väčšinou nie špecificky spracovaný pre predmet, ale univerzálnejšieho charakteru. (mapy, šablóny, podklady, predkreslené tvary...)

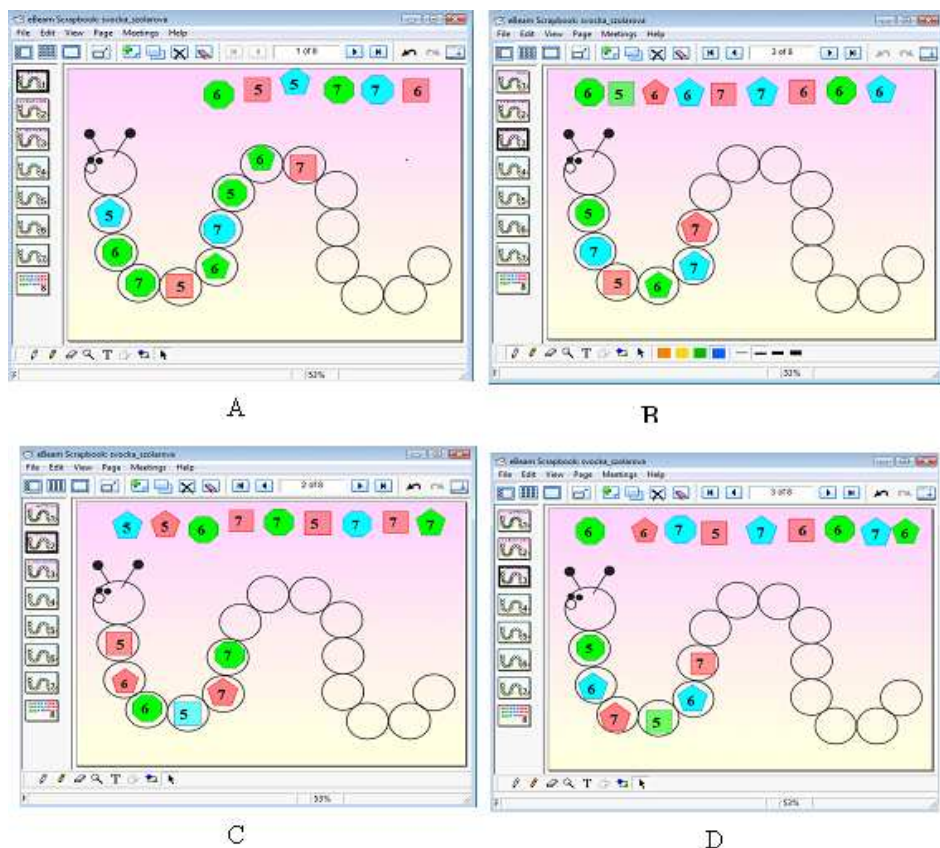
Učiteľ môže vytvoriť vyučovací obsah aj sám, či v priloženom softvéri alebo v inom zaužívanom softvéri, napríklad v tabuľkovom editore, v prezentačnom softvéri, prípadne môže vytvoriť úlohy v špeciálnom matematickom softvéri ako je napríklad Cabri, C.a.R., Geogebra, Derive, kreslič grafov a podobne.

Digitálnym vyučovacím obsahom možno nazývať aj rôzne schémy, obrázky, zvukové a obrazové záznamy, ktoré na interaktívnej tabuli môžeme prezentovať, dotvárať, upravovať a kombinovať s inými prvkami. Nemá zmysel kupovať digitálnu tabuľu ak sa tam budú premietal len textové dokumenty, alebo prezentácie. Tabuľa má význam, vtedy ak je potrebné medzi jednotlivými softvérmi prepínať, ak je vhodné do premietaného obrazu niečo dopísať, dokresliť, zmeniť alebo dotvoriť. Rovnako je vhodné na priblíženie a dotváranie nedostupných objektov. Príkladom môže byť vyhľadávanie geometrických útvarov na rôznych historických budovách aj na neexistujúcich alebo zistenie vzdialenosti dvoch miest, oddelených jazerom.

5. Interaktívne pracovné listy

Tvorba vlastného vyučovacieho obsahu je zameraná v súčasnosti najmä na interaktívne pracovné listy. Na obrázku 2 sú uvedené pracovné listy v e-Beam softvéri s tematikou "algoritmus", boli vytvorené v rámci ŠVOČ v r. 2009. Pracovné listy obsahujú motív "húsenice" v jednotlivých článkoch húsenice - políčkach sú umiestnené geometrické útvary rôznych tvarov farieb a číselného označenia. Úlohou žiakov je pozorovať vzor a odhaliť pravidlo - algoritmus, podľa ktorého budú doplnené ďalšie prázdne políčka. Na liste A pravidlo tvorí triedenie čísel, na liste B striedanie farieb, na C striedanie tvaru, ostatné informácie sú nepodstatné. Na liste D je vzor vytvorený tak, že je možné pokračovať podľa čísel alebo podľa farby. Výhodou tohto súboru je rôznorodé didaktické využitie. Pre frontálne vyučovanie pri zoznamovaní sa s takýmto typom úloh je vhodné vyvolať žiakov postupne aby presunuli jeden z tvarov z hornej časti do voľných políčok a vysvetlia dôvod, prečo ten by mal byť nasledujúci. Žiaci sa pri tabuli striedajú a žiaci v laviciach pripomienkujú voľby spolužiakov. Po pochopení podstaty

hry učiteľ môže vytvoriť skupiny, ktoré majú k dispozícii svoje počítače a zdieľať jednotlivé listy s rôznymi skupinami. Po danom čase každá skupina prezentuje svoje riešenie s zdôvodní.



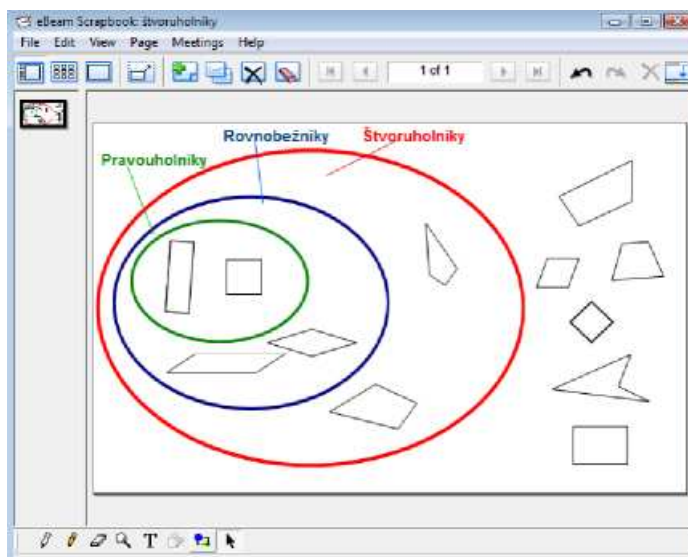
Obrázok 2 - pracovné hárky v e-Beam softvéri, odhalenie algoritmu

Úlohy na obrázku 2D odporúčame zadať až v ďalšej fáze vyučovania, prípadne len diferencovane. Viaceré skupiny môžu dostať rovnaký list, aby sa zistilo či našli rôzne riešenia, prípadne našli viac riešení. Učiteľ pozoruje prácu skupín, ich diskusiu a dohodu o tom, ktoré riešenie budú skupiny uprednostňovať.

Posledná úloha je ukážkou toho, ako môže interaktívna tabuľa prispieť k zmene vyučovacej metódy v súlade so zistením podľa [2] "ak učitelia používajú tabuľu dlhodobo a majú podporu, sú schopní zmeniť svoje vyučovacie stratégie".

Druhý príklad zmysluplného využitia interaktívnej tabule je pracovný list na obrázku 3 s témou triedenie štvoruholníkov. V mladšom školskom veku je dôležité dodržať postup pri reprezentácii pojmov od skutočných predmetov (fyzická reprezentácia) cez grafické znázornenie (ikonická repre-

zentácia) až po používanie matematických symbolov (symbolická reprezentácia). V prvých ročníkoch sa žiaci oboznamujú so štvoruholníkmi prostredníctvom skutočných modelov a triedia len na štvorce a obdĺžniky, pričom ani nie je nutné aby si uvedomili že obe tvary patria do množiny štvoruholníkov. Počas porozumenia a prehľbovania pojmu množina - podmnožina, celok- časť je vhodné triediť podrobnejšie a tým si uvedomovať vzťahy medzi štvoruholníkmi. Dynamický pracovný list je v tomto prípade vhodnejšou pomôckou ako napríklad hotový softvér alebo skutočné predmety. Jednoducho sa dajú premiestniť útvary, dokresliť zmeniť polohu, alebo vrátiť útvary na pôvodné miesto, prípadne doplniť kontrolný útvar, nie štvoruholník. Najjednoduchšie sa využíva pri frontálnom vyučovaní. Tu je dôležité zdôvodnenie žiaka, prečo daný útvar umiestnil práve do daného políčka. Skupinové využitie je vhodné opäť zdieľania, v tomto prípade synchronne, tj. všetky skupiny dostanú rovnaký list a majú umiestniť nezaraďené štvoruholníky do políčok. Prezentácia výsledkov spojená s kontrolou prebieha na interaktívnej tabuli.



Obrázok 3 - pracovný list, triedenie štvoruholníkov

6. Prínos interaktívnej tabule pre zefektívnenie vyučovania

Pokúsime sa sformulovať v čom vidíme hlavný prínos digitálnej tabule. Najvýznamnejším prínosom je motivačný účinok tabule, založený na technológii, ktorú žiaci používajú aj mimo školy. Interaktivita na rozdiel od premietacieho plátna digitálna tabuľa je interaktívna, môžu zasahovať do programu jednoduchým spôsobom, používaním náhrady kriedy- elektronického pera alebo aj vlastnou rukou. Zvyšuje dynamiku vyučovania, tým, že

jednotlivá doteraz používané technické možnosti sa tu objavujú integrovane: klasická tabuľa, premietacie plátno obrazovka počítača, stačí jednoducho prepínať medzi aplikáciami. Priama manipulácia- hoci deti nemanipulujú so skutočnými predmetmi, prichytenie a presúvanie obrázkov dáva pocit skutočnej jednoduchej manipulácia, čo oceňujú najmä mladší žiaci. Narábanie myšou vyžaduje riadenie na diaľku: vykonávajú pohyby na vodorovnej ploche stola a výsledok sa ukáže na obrazovke, čo je pre malé deti namáhavá fyzická i psychická činnosť.

Digitálna tabuľa je predovšetkým učiteľská pomôcka, no užitočná a efektívna bude len vtedy, ak učiteľ zmení svoje vyučovacie návyky. S digitálnou tabuľou môže byť vyučovanie rovnako nudné a pasívne ako bez nej. Je potrebné vypracovať metodiku používania tejto novej pomôcky v progresívnych vyučovacích formách. Na digitálnej tabuli s možnosťou zdieľania je pohodlnejšia organizácie a hodnotenia skupinovej práce. Uľahčenie skupinovej práce vedie aj diferencovanému vyučovaniu.

Zahraničné skúsenosti potvrdzujú kladné prijímanie pomôcky zo strany učiteľov aj žiakov, na profesionalite používania má veľký vplyv dĺžka používania aj podpora nadriadených. Učitelia sa cítia pohodlnejšie a sebaistejšie pred tabuľou, preto, že ju používajú pri príprave a za niekoľko sekúnd môžu otvoriť pripravené súbory dokonca aj z predchádzajúcich hodín.

Nemožno súhlasiť s používaním digitálnej tabule v prípade, keď to vedie k formalizmu. Treba varovať pred ukážkami pokusov na tabuli, ktoré sa dajú jednoduchými pomôckami urobiť v skutočnosti. Takými príkladmi sú simulácia hádzania kockou, prekladania papiera alebo simulácia kružidla alebo z prírodovedy varenie vody a topenie ľadu. Takéto ukážky sú programátorsky zaujímavé, ale nezabezpečia tie didaktické efekty, ktoré zabezpečia ich originály.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť projektu MŠ SR KEGA 3/7027/09 Vyučovanie matematiky a prírodovedy pomocou interaktívnej tabule.

Literatúra

- [1] Krejčová, E.: *Hry v matematike na 1. stupni základnej školy*. SPN, Praha, 2009.
- [2] Kolektív: *Evaluation of the Primary Schools Whiteboard Expansion Project*. Education & Social Research Institute, Manchester Metropolitan University, 2007, dostupné na: <http://www.becta.org.uk>
- [3] MORISSON, B.: *Applying SMART Board Technology in Elementary School Classrooms: Investigation of a School-Wide Initiative*. University of New Brunswick, 2008, dostupné na: www.smarttech.com

- [4] PARTOVÁ, E. - ŽILKOVÁ, K.: *Schopnosť odhaliť lineárny vzor pomocou softvéru u detí predškolského veku*. In: IMEM Congress 2009. Ružomberok : Katolícka univerzita, Pedagogická fakulta, 2009 S. 648-653.
- [5] PARTOVÁ, E. - ŽILKOVÁ, K.: *Rozvíjanie pojmu relácia v predškolskom veku prostriedkami IKT*. In: Acta universitatis palackianae olomucensis Facultas paedagogica 2010, Mathematica VII, Olomouc, 2010.
- [6] PARTOVÁ, E.: *Očakávania a realita efektivity interaktívnej digitálnej tabule*. In: Acta universitatis palackianae olomucensis Facultas paedagogica 2010, Mathematica VII, Olomouc, 2010.

VEDOMOSTI ŠTUDENTOV ZO ŠTATISTIKY PO UKONČENÍ STREDNEJ ŠKOLY

Jana Pócsová^a, Ivana Katreničová^b

^a*Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií
Technická univerzita v Košiciach
B. Němcovej 3, 042 00 Košice
e-mail: jana.pocsova@tuke.sk*

^b*Katedra tvárnenia kovov, Hutnícka fakulta
Technická univerzita v Košiciach
Vysokoškolská 4, 042 00 Košice
e-mail: ivana.katrenicova@tuke.sk*

Abstract. The main aim of this paper is the investigation of students' understanding of statistical concepts at secondary school level. Our investigation was carried through the tasks motivated by secondary school curriculum and based on report of OECD PISA 2003. At the end we summarize the observations and we suggest possible improvements in process of data analysis teaching.

1. Úvod

Naším dlhodobým zámerom je zlepšiť výučbu štatistiky pre technické odbory na vysokej škole. K naplneniu tohto cieľa použijeme metódu známu pod názvom „Design Experiments“ [1]. Táto metóda je založená na iteráciách, skúšaní a úprave vyučovacieho procesu, ktorý sa každým krokom zlepšuje. V prvom rade je však nevyhnutné zistiť stupeň aktuálnych znalostí študentov po absolvovaní strednej školy. K tomuto účelu sme zostavili test, ktorý zisťuje úroveň vedomostí študentov v oblasti popisná štatistika. Zamerali sme sa len na tie vedomosti a schopnosti, ktoré sú nevyhnutným vstupom k úspešnému zvládnutiu základného kurzu štatistiky na vysokej škole technického zamerania.

Považujeme za vhodné formulovať v teste otvorené problémy,¹⁵ ktoré sú zamerané na intuitívnu aplikáciu známych pojmov. Pri riešení takýchto úloh má riešiteľ značnú slobodu. Keďže rôzne pohľady na riešenie vedú k

¹⁵Problém je **otvorený**, ak jeho počiatočná a/alebo cieľová situácia sú otvorené.

rozdielnym porozumeniam problému a môžu byť zdrojom rôznych výsledkov. Tie je však potrebné primerane zdôvodniť. Aj z tohto dôvodu riešenie otvorených problémov môže lepšiť argumentačné schopnosti žiakov [2]. Samotné riešenia otvorených problémov umožňuje výskumníkom lepšie sledovať hĺbku porozumenia pojmov.

V testoch sa najčastejšie vyskytujú úlohy, ktoré merajú kompetencie v troch základných úrovniach: reprodukcie, prepojenia a reflexie [4].

- Úlohy merajúce kompetencie na *reprodukčnej* úrovni možno opísať slovami: reprodukcia naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr, riešenie rutinných problémov.
- Úlohy merajúce kompetencie na úrovni *prepojenia* nie sú rutinné. Tieto úlohy zvyčajne vyžadujú prepojenie vedomostí z viacerých matematických oblastí alebo kombináciu rôznych reprezentácií problému.
- Úlohy merajúce kompetencie na úrovni *reflexie* vyžadujú hlbší prienik do problému, schopnosť argumentovať, abstrahovať, zovšeobecňovať a riešiť problém v rôznych kontextoch.

Úlohy v teste sú zostavené tak, aby ich náročnosť gradovala. Jednotlivé schopnosti a zručnosti študentov sú testované na viacerých úrovniach.

Pri zostavovaní testu sme brali do úvahy to, čo by študenti mali vedieť z predchádzajúceho štúdia ([5]), či už zo základnej alebo strednej školy. Už na ZŠ sa žiaci stretávajú s pojmami ako štatistické zisťovanie, štatistická jednotka, súbor, znak, relatívna a absolútna početnosť súboru, aritmetický priemer, diagram (kruhový, stĺpcový). Na strednej škole sa tieto poznatky prehĺbujú, pridávajú sa pojmy ako modus a medián, rozptyl a smerodajná odchýlka štatistického súboru a práca s koreláciami. Žiaci po absolvovaní popisnej štatistiky na strednej škole by mali byť schopní spracovať štatistický súbor, interpretovať dané číselné charakteristiky, posúdiť ich vhodnosť a na ich základe formulovať relevantný záver.

2. Metodológia

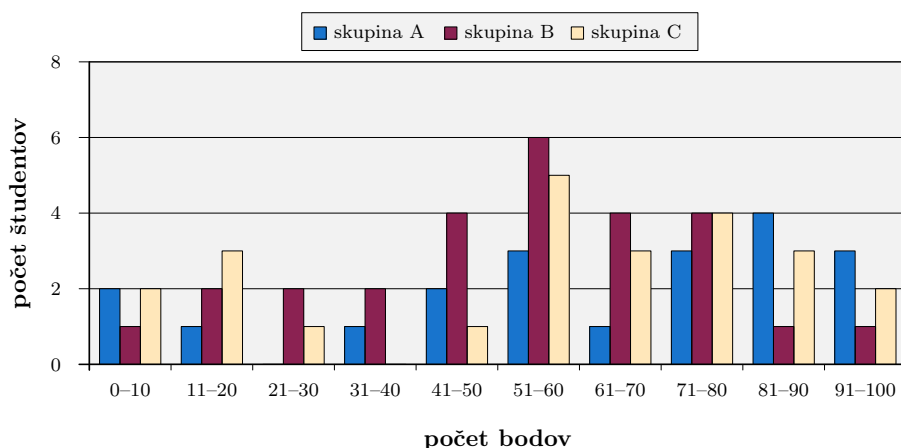
Test pozostával zo štyroch úloh. V tomto článku podrobne zanalyzujeme zadanie a študentské riešenia iba jednej z nich. Táto úloha z vyššie uvedených vedomostí testuje len tie, ktoré sú zamerané na schopnosť čítať z diagramu, pracovať so štatistickým súborom, formulovať záver v kontexte úlohy.

Úloha bola predložená 99 študentom prvého ročníka vysokej školy technického zamerania. Na vypracovanie všetkých štyroch úloh mali študenti 30 minút. Po ukončení tohto limitu už nikto z respondentov nepracoval.

Riešenia sme rozdelili do troch hlavných skupín: *správne riešenie*, *nesprávne riešenie* a *bez riešenia*. Niektoré riešenia bolo ťažké jednoznačne zaradiť do jednej z uvedených kategórií. Medzi správne riešenia sme zaradili aj riešenia s numerickou alebo s inou menej závažnou chybou v prípade, ak myšlienka riešiteľa bola správna. Riešenie, v ktorom sa spojilo viac nedostatkov sme zaradili do skupiny nesprávnych riešení.

Úloha:

Nasledujúci diagram zachytáva výsledky zápočtovej písomky v troch skupinách. Študent úspešne napísal písomku, ak dosiahol aspoň 51 bodov.



Na základe diagramu:

- určíte počet študentov v skupine A,
- uvedte príklad možných bodových ziskov študentov v skupine A,
- určíte poradie skupín od najlepšej po najhoršiu. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3. Analýza úloh a ich riešení

Úloha je zameraná na zistenie a overenie schopností študentov čítať základné informácie z diagramu a na ich základe voliť relevantné kritériu na formuláciu záveru. Začína uvedením do situácie, pričom jej dôležitou časťou je definovanie úspešného študenta. Úvodné pokyny sú spoločné pre všetky podúlohy a)–c).

V diagrame sú spracované tri skupiny, pričom je zachytený počet študentov a počet bodov. Pôvodný štatistický súbor (v úlohe konkrétne neuve-

dený) prešiel variačným triedením, preto sú prvky rozdelené do tried. Variačné triedenie je zaužívané aj vo verejne dostupných zdrojoch (ako napr. tlač), doteraz sa však študenti počas štúdia nestretli s variačným triedením. Podúlohy a) a b) sa zámerne týkajú len skupiny A, pretože sme chceli študentom zjednodušiť prácu s dátami a urýchliť proces zisťovania informácií z diagramu.

V nasledujúcich riadkoch postupne analyzujeme zadanie jednotlivých podúloh, správne riešenia, ale aj nesprávne riešenia, ktoré sme našli v odovzdaných pracovných materiáloch.

a) Na základe diagramu určite počet študentov v skupine A.

Úloha testuje kompetencie na úrovni reprodukcie. Na tejto úlohe je možné vyčleniť riešiteľov, ktorí nevedia pracovať s diagramom ani na základnej úrovni a nedokážu interpretovať údaje v ňom zachytené.

Táto otázka je zameraná na počet študentov. Vedie k identifikácii údajov a k spočítaniu počtu študentov v skupine A (os y predstavuje počet študentov). Jediné správne riešenie je 20. Tak ako sme predpokladali, väčšina študentov túto úlohu vyriešila správne – 95%, chybné riešenie sa vyskytlo len v 4% riešení.

b) Na základe diagramu uveďte príklad možných bodových ziskov študentov v skupine A.

Pri riešení sa vyžaduje vytvorenie súboru vyhovujúceho daným podmienkam, čo je proces opačný k tomu, na ktorý sú študenti zvyknutí. Preto táto úloha nie je rutinná a zaradili sme ju k úlohám testujúcim kompetencie na úrovni prepojenia. Táto úloha je otvorená, pretože umožňuje niekoľko správnych riešení.

Úlohou študentov je uviesť jeden ľubovoľný príklad pozostávajúci z 20 možných bodových ziskov študentov v danej skupine. Jedným z možných riešení je: 0; 0; 11; 31; 41; 41; 51; 51; 51; 61; 71; 71; 71; 81; 81; 81; 81; 91; 91; 91.

Uvádzame jedno riešenie spomedzi správnych (14% riešení):

5, 5, 15, 35, 45, 45, 55, 55, 55, 65
75, 75, 75, 85, 85, 85, 85, 95, 99, 100

Obrázok 1 – správne riešenie

Vybrali sme riešenie, v ktorom sa prejavil vyšší stupeň abstraktného myslenia riešiteľa vo voľbe štatistického znaku (stredy intervalov) na reprezentovanie jednotlivých tried.

Z množstva nesprávnych riešení (47%) usudzujeme, že študenti nesprávne pochopili formuláciu: *uvedte príklad možných bodových ziskov*. Slovo *príklad* nepochopili vo význame vytvorenia konkrétného štatistického súboru.

Riešenia často obsahovali len jedno číslo, ktorým chceli reprezentovať všetky prvky daného súboru.

Najčastejšie nesprávne riešenia (uvádzame prepis konkrétného príkladu takého riešenia):

- uvedenie celého intervalu (0-100)
- prípadne trocha vhodnejšie rozdelenie na dve časti (0-20 a 31-100) (pretože nikto z danej skupiny nedosiahol body v rozmedzí 21-30)
- možný zisk jedného študenta (100)
- maximálna možná suma bodov všetkých študentov (2000)
- možná suma bodov všetkých študentov (1148; 1330)

Túto skutočnosť sme mohli očakávať, keďže počas predchádzajúceho štúdia sa len veľmi zriedkakedy stretávajú s úlohami, ktorých správne riešenie vyžaduje tvorbu štatistického súboru za určitých podmienok.

Uvádzame jedno z riešení, ktoré sme zaradili medzi nesprávne, pretože neudáva priamu odpoveď na uvedenú otázku. Je zjavné, že študent ovláda čítanie z diagramu. Tiež je zrejmé, že problémom riešiteľa je voľba konkrétneho reprezentanta z danej triedy.

$2 \text{ št.} \rightarrow 0 - 10 \text{ b}$
 $1 \text{ št.} \rightarrow 11 - 20 \text{ b}$
 $1 \text{ št.} \rightarrow 31 - 40 \text{ b}$
 $3 \text{ št.} \rightarrow 41 - 50 \text{ b}$
 $4 \text{ št.} \rightarrow 51 - 60 \text{ b}$
 $1 \text{ št.} \rightarrow 61 - 70 \text{ b}$
 $2 \text{ št.} \rightarrow 71 - 80 \text{ b}$
 $4 \text{ št.} \rightarrow 81 - 90 \text{ b}$
 $3 \text{ št.} \rightarrow 91 - 100 \text{ b}$

Obrázok 2 – nesprávne riešenie

Problém vidíme predovšetkým v nedostatočnej skúsenosti s prácou s takýmito úlohami. V tejto domnienke nás utvrdzuje aj vysoký počet študentov, ktorí túto úlohu ani nezačali riešiť (39%).

c) Na základe diagramu určite poradie skupín od najlepšej po najhoršiu. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

V tejto úlohe je potrebná individuálna voľba kritéria, tá je na riešiteľovi a ovplyvňuje smer riešenia a aj jeho odpoveď. Svoju voľbu má riešiteľ aj zdôvodniť, preto úloha tiež zisťuje argumentačné schopnosti riešiteľov. Otázka v tejto úlohe je otvorená, testuje kompetencie na úrovni reflexie.

Už pred zadaním testu sme si pripravili zoznam obhájiteľných kritérií, ktoré sme očakávali. Samozrejme sme nevylúčili možnosť výskytu aj ďalších kritérií. V riešeníach študentov sme však žiadne iné nenašli.

Pri jednotlivých vhodných kritériách uvádzame stručný argument, výsledné poradie skupín a počet najdených takých riešení:

I počet úspešných študentov v skupine (CBA - 10%)

II pomer počtu úspešných a všetkých študentov v skupine (CAB - 9%)

III pomer počtu úspešných a neúspešných študentov v skupine (CAB - 1%)

IV priemerný počet bodov študentov v skupine (ACB - 2%)

V počet neúspešných študentov v skupine (ACB - 0%)

V tabuľke uvádzame stručné výpočty v jednotlivých kritériách:

	I	II	III	IV			V
				min	priemer	max	
A	14	$\frac{14}{20} = 0,7$	$\frac{14}{6} \doteq 2,33$	57,4	61,5	66,5	6
B	16	$\frac{16}{27} \doteq 0,59$	$\frac{16}{11} \doteq 1,45$	48	52,04	57,04	11
C	17	$\frac{17}{24} \doteq 0,71$	$\frac{17}{7} \doteq 2,43$	51,75	55,83	60,83	7

Obr. 3

Obr. 4

Obr. 5

Obr. 6

Na ilustráciu uvádzame niekoľko správnych riešení.

$$\begin{aligned}
 A &= 3 + 1 + 3 + 4 + 3 = 14 \\
 B &= 6 + 4 + 4 + 1 + 1 = 16 \\
 C &= 5 + 3 + 4 + 3 + 2 = 17
 \end{aligned}$$

Obrázok 3 – porovnanie skupín podľa počtu úspešných študentov

A	20	14	70%
B	27	16	59,25%
C	24	17	70,83%

Obrázok 4 – porovnanie skupín podľa pomeru úspešných a všetkých študentov

$$\begin{array}{l}
 A - 20 - 14 - 6 \\
 B - 27 - 16 - 11 \\
 C - 24 - 17 - 7 \\
 \\
 A = \frac{14}{6} = 2,3\overline{3} \\
 B = \frac{16}{11} = 1,45\overline{45} \\
 C = \frac{17}{7} = 2,42\overline{85} \\
 \\
 \underline{\underline{C, A, B}}
 \end{array}$$

Obrázok 5 – porovnanie skupín podľa pomeru úspešných a neúspešných študentov

$$\begin{aligned}
 A &= (2 \cdot 5) + (1 \cdot 15) + (0 \cdot 25) + (1 \cdot 35) + (2 \cdot 45) + (3 \cdot 55) + (1 \cdot 65) + \\
 &\quad + (3 \cdot 95) + (4 \cdot 85) + (3 \cdot 95) = 1230 : 20 = 61,5 \\
 B &= 1405 : 27 = 52,0 \\
 C &= 1450 : 26 = 55,7 \\
 \\
 \boxed{A > C > B} &= 61,5 > 55,7 > 52,0
 \end{aligned}$$

Obrázok 6 – porovnanie skupín na základe priemerného počtu bodov

Úloha je pre študentov náročná. Správnych riešení je 22%, nesprávnych riešení je 17%, bez riešenia je 9%. Vo viac ako v polovici riešení nie je uvedené kritérium úspešnosti (52%), hoci v zadaní je uvedené „Svoje tvrdenie zdôvodnite“. Nie je možné presne zistiť, či je zvolené kritérium vhodné alebo nevhodné. Z uvedeného vyplýva, že študenti aj na VŠ majú problém s písomnou argumentáciou, alebo formulovaním vlastných myšlienok.

Spomedzi nevhodných kritérií uvádzame najčastejšie sa vyskytujúce:

- I počet všetkých študentov v skupine,
- II súčet bodov všetkých študentov v skupine,
- III úspešnosť skupiny v každej triede,...

	I	II			III
		min	priemer	max	
A	20	1148	1230	1330	3
B	27	1296	1405	1540	6
C	24	1242	1340	1460	3

Obr. 7

Obr. 8 Obr. 9

$$a) A = 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 1 + 3 + 4 + 3$$

$$A = 20$$

$$c) B = 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 6 + 4 + 4 + 1 + 1$$

$$B = 27$$

$$C = 2 + 3 + 1 + 1 + 5 + 3 + 4 + 3 + 2$$

$$C = 24$$

$$- B, C, A$$

Obrázok 7 – porovnanie skupín podľa počtu všetkých študentov v skupine

$$\begin{array}{l}
 A \quad 20 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 100 \quad 160 \quad 70 \quad 670 \quad 340 \quad 300 \quad = 1290 \\
 B \quad 16 \quad 40 \quad 60 \quad 40 \quad 200 \quad 260 \quad 200 \quad 520 \quad 90 \quad 1000 \quad = 1500 \\
 C \quad 20 \quad 60 \quad 30 \quad 80 \quad 50 \quad 300 \quad 210 \quad 270 \quad 270 \quad 200 \quad = 1240
 \end{array}$$

Obrázok 8 – porovnanie skupín podľa súčtu bodov všetkých študentov v skupine

$$\begin{array}{ll}
 0-10 & - A, C \\
 11-20 & - C \\
 21-30 & - B \\
 31-40 & - B \\
 41-50 & - B \\
 51-60 & - B \\
 61-70 & - B \\
 71-80 & - B, C \\
 81-90 & - A \\
 91-100 & - A
 \end{array}$$

B, C, A

Obrázok 9 – porovnanie skupín podľa úspešnosti skupiny v každej triede

4. Záver

Kompetencie študentov na úrovni reprodukcie sú vysoko rozvinuté, pričom ich kompetencie na iných úrovniach značne zaostávajú. Študenti sú schopní takmer bezchybne vyčítať základné informácie z diagramu avšak ich konkrétna aplikácia je pre nich veľmi náročná. Prejavujú sa problémy v argumentácii slovom aj číslom a z riešení sú zrejmé vedomosti len formálneho charakteru.

Schopnosti a zručnosti, overované v teste, nie sú výlučne obsahom stredoškolskej matematiky, sú súčasťou prirodzeného logického myslenia. Preto pre ich rozvíjanie by sa mal a mohol vytvoriť priestor i v iných stredoškolských predmetoch. Domnievame sa, že potom by študenti boli viac pripravení na ďalšie štúdium.

Kurz vysokoškolskej štatistiky obsahuje celky ako popisná štatistika, rozdelenie náhodných veličín, intervalové odhady, testovanie štatistických hypotéz, atď. Na základe nášho prieskumu sme zistili, že študentom chýba hlbšie pochopenie základných princípov práce s dátami. Na vysokej škole, v priebehu jedného semestra, je prakticky nemožné tento nedostatok odstrániť, preto vzniká nechcený priestor na rozšírenie formálnych vedomostí zo strednej školy.

PodĎakovanie

Tento článok vznikol čiastočne s podporou grantu VEGA 1/0390/10.

Literatúra

- [1] Design Experiments in Educational Research. Cobb, Paul; Confrey, Jere; diSessa, Andrea; Lehrer, Richard; Schauble, Leona. Educational Researcher, Jan 2003; vol. 32: pp. 9 - 13. Online ISSN: 1935-1011 Print ISSN: 0002-8312 Educational Researcher, Vol. 32, No. 1, 9-13 (2003)
- [2] PEHKONEN, E. (autor state a editor zborníku): *Introduction to the concept „open-ended problem“*. In Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom, edit.: Pehkonen, E., Helsinki Univ. (Finland), Dept. Of Teacher Education, 1997.
- [3] ŠPÚ: PISA SK 2003: *Matematická gramotnosť, správa*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2004.
- [4] *PISA: The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving, Knowledge and Skills* [online]. [cit. 2010-09-02]. Dostupné na internete: <<http://www.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf>>.

- [5] *Štátny pedagogický ústav: Vzdelávacie štandardy a učebné osnovy pre základné školy 2. stupeň* [online]. [cit. 2010-09-02]. Dostupné na internete: <<http://www.statpedu.sk>>.

KĽÚČOVÉ KOMPETENCIE A DISKRÉTNÁ MATEMATIKA

Anna Polomčáková

*Prírodovedecká fakulta, Ústav matematických vied
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: anna.polomcakova@student.upjs.sk*

Abstract. In this paper we present different views on key mathematical competences and possibilities of their development through different types of mathematical tasks. It is appropriate to focus primarily on some key competences among the varieties of topics included in school mathematics teaching content. In our contribution we focus on Combinatorics and key competence Visualization, description of mathematical objects and situations, representation. We analyze solution a non-standard task of combinatorial geometry.

1. Úvod

O kľúčových kompetenciách sa dnes veľa hovorí a sú na nich rôzne názory. Kombinatorika, obzvlášť kombinatorická geometria, je pre žiakov náročné a neobľúbené učivo. Nazdávame sa, že v oblasti kombinatoriky je zaujímavé pozorovať schopnosť žiakov zvoliť si vhodnú reprezentáciu. V učebniciach pre základné a stredné školy sa reprezentácii venuje veľmi malá pozornosť. Reprezentácia je jednou z ôsmich kľúčových matematických kompetencií popísaných v štúdiu OECD PISA (**P**rogramme for **I**nternational **S**tudents **A**ssessment). Štúdia podáva pohľad na kompetencie z pohľadu troch oblastí a to čitateľskej, matematickej a prírodovednej. V roku 2003 sa aj Slovensko po prvýkrát zúčastnilo tejto štúdie, kde hlavnou oblasťou testovania bola matematická gramotnosť. Diskrétna matematika pri tomto testovaní neobstála najlepšie.

2. Štúdia OECD PISA

Matematická gramotnosť je v štúdiu OECD PISA definovaná ako schopnosť použiť nástroje matematiky v reálnom svete a využiť ich pre vlastnú potrebu. Teda predstavuje schopnosť žiakov použiť svoje matematické poznatky pri riešení problémov bežného života. V mnohých situáciách nie je na

prvý pohľad zrejme, že by použitie matematických vedomostí mohlo byť užitočné pri ich riešení. Žiak musí situáciu alebo problém preložiť do podoby, v ktorej sa ukáže užitočnosť matematiky. Ak žiaci nemajú skúsenosti s aplikáciou vedomostí z matematiky, nevyužívajú potenciál matematiky pri riešení problémov, s ktorými sa stretnú. Teda matematická gramotnosť je schopnosť rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené hodnotenia, používať matematiku spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmyšľajúceho občana, t.j. schopnosť objaviť matematiku okolo seba.

Pri podrobnejšom opise matematickej gramotnosti štúdia rozlišuje tri zložky:

1. *situácie alebo kontexty*, do ktorých sú problémy umiestnené,
2. *matematický obsah*, resp. nástroje matematiky, ktoré reflektujú spôsob, akým sa na tento reálny svet pozeráme optikou matematiky,
3. *kompetencie*.

Zamerajme sa bližšie na tretiu zložku. Žiak, ktorý je schopný úspešne používať matematiku v rôznych situáciách, má isté matematické schopnosti, ktorých súhrn možno považovať za jeho celkovú matematickú kompetenciu. Na určenie a zhodnotenie týchto schopností používa štúdia OECD PISA osem typických matematických kompetencií:

- myslenie a usudzovanie,
- argumentácia,
- komunikácia,
- modelovanie,
- polozenie otázky a riešenie problému,
- reprezentácia,
- použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií,
- použitie nástrojov a prístrojov.

PISA pritom nepoužíva testové otázky, ktoré by skúmali uvedené kompetencie jednotlivo nakoľko používanie matematiky vedie totiž väčšinou k súčasnemu použitiu viacerých kompetencií. OECD PISA opisuje aktivity obsahujúce tieto kompetencie pomocou troch úrovní:

- reprodukčná úroveň,
- úroveň prepojenia a
- úroveň reflexie.

Úlohy merajúce kompetencie na reprodukčnej úrovni si vyžadujú reprodukciu naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr a riešenie rutinných problémov. Kompetencie na úrovni prepojenia umožňujú riešenie úloh, ktoré nie sú úplne rutinné, ale obsahujú známe alebo pomerne známe prvky. Úlohy spojené s touto úrovňou kompetencií vyžadujú schopnosť prepojenia rôznych oblastí matematiky alebo prácu s viacerými navzájom rôznymi reprezentáciami daného problému. Kompetencie na úrovni reflexie obsahujú prvok uvažovania o procesoch potrebných k vyriešeniu úlohy. Vzťahujú sa k žiakovým schopnostiam plánovať stratégie riešenia a uplatniť ich v úlohách, ktoré obsahujú viac súčastí a môžu byť originálnejšie (menej zvyčajné) v porovnaní s úlohami zodpovedajúcimi kompetenciám na úrovni prepojenia.

3. Kombinatorika

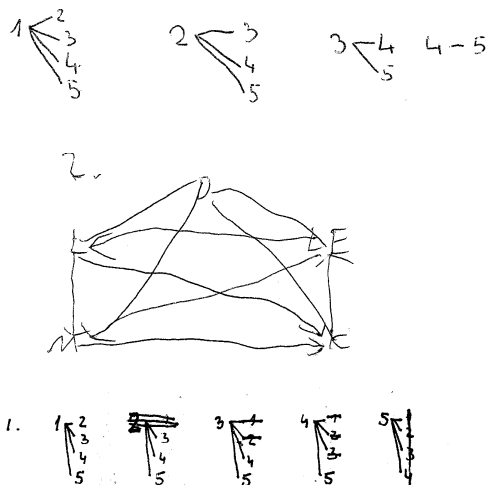
Nazdávame sa, že na rozvíjanie kompetencií matematického myslenia a usudzovania, reprezentácie je obzvlášť vhodná oblasť kombinatoriky. Tak tiež je to vhodný tematický celok na zistenie úrovne argumentácie žiakov, lebo kombinatorika je nenáročná na vstupné vedomosti a teda sa žiaci nemôžu vyhovárať na nedostatky z predchádzajúceho učiva. Na druhej strane na kombinatoriku nadväzuje pravdepodobnosť a štatistika. Pri niektorých tematických celkoch je vhodné ak učiteľ hneď na začiatku zavádza značenie a algoritmus na riešenie. Je to hlavne tam, kde je značenie a algoritmus na riešenie ustálené. Napríklad v matematike je všeobecne zaužívaný symbol pre sčítanie $+$, tak nebudeme hľadať nejaké iné označenie. Myslíme si, že vyučovanie kombinatoriky je vhodné na to, aby sa systém značenia a algoritmus nezavádzal hneď na začiatku. Ak sa pri vyučovaní kombinatoriky príliš skoro zavedie algoritmus alebo systém značenia, žiaci sa budú snažiť „napasovať“ to na všetky úlohy a prestanú rozmýšľať o úlohe. Práve pri kombinatorike je priestor pre žiaka zvoliť si vhodný systém reprezentácie daného problému z množstva možných reprezentácií. Každý žiak si môže nájsť ten svoj spôsob ako riešiť úlohy, ktoré sú pri kombinatorike rôznorodé.

Podme sa bližšie pozrieť na dve už spomenuté matematické kompetencie:

1. Matematické myslenie a usudzovanie ktorého súčasťou je

- logicky myslieť a usudzovať,
- klásť charakteristické otázky: Existuje...? Ak áno, koľko...? Ako nájdeme...? a odpovedať na tieto otázky,
- analyzovať, analyticky a kriticky myslieť, vypisovať možnosti, skúmať, či nájdená možnosť je riešením úlohy (Pri vyučovaní kombinatoriky by sme túto kompetenciu mohli rozvíjať napr. nasledujúcou úlohou: V meste sa naraz stretlo 5 spolužiakov.

Pozdravili sa podaním rúk. Koľko podaní rúk bolo, ak sa pozdravil každý s každým? Rôzne prístupy k riešeniu sú na obr. 1),



Obr. 1 – Konkrétne príklady vypisovania možností

- abstraktne myslieť a priestorová predstavivosť (Príklad vhodnej úlohy na rozvíjanie tejto kompetencie: Koľko rôznych kvádrov viete postaviť z 20 kociek tak, aby sa vám žiadna kocka nezvyšila?),
- funkčne myslieť, ale aj mať intuíciu a správny odhad (Čo sa bude diať, ak v klasickej úlohe o podávaní rúk pribudne jeden človek? A ďalší? Ako sa bude meniť riešenie? Žiaci tu môžu odhaľovať iný typ závislosti, než na aký sú zvyknutí).

2. Znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia ktoré zahŕňa

- zvoliť si vhodnú reprezentáciu (Na Dankine narodeniny jej prišli zablahoželať 4 kamarátky - Lucka, Lenka, Majka a Katka. Na zdravie oslávenkyne si štrngli. Koľko štrngnutí bolo počuť? V úlohe vystupuje Lucka a Lenka, teda L nie je vhodné označenie),
- dekodovať, interpretovať a rozlišovať medzi rôznymi formami znázorňovania (popisovania) matematických objektov a situácií, (Je vhodnejšie zapisovať do riadku alebo do roviny?),
- vyberať medzi rôznymi formami znázorňovania a prechádzať medzi nimi podľa situácie a účelu,
- popisovať a znázorňovať matematické objekty a situácie jasne, stručne, presne, zrozumiteľne (na obr. 2 je konkrétny príklad,

kde žiak začal vypisovať možnosti a potom už videl, ako to bude pokračovať a zmenil formu zápisu),



Obr. 2 – Zrozumiteľný zápis

- vyhodnocovať informácie kvantitatívneho a kvalitatívneho charakteru obsiahnutých v grafoch, diagramoch, tabuľkách, atď.,

4. Neštandardná úloha a jej analýza

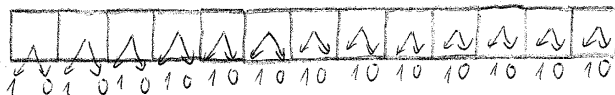
Študentom vysokej školy sme zadali neštandardnú úlohu: Pat a Mat si kúpili nový pozemok. Rozhodli sa, že si ho ohradia ozdobnými zeleno-bielymi stĺpikmi, ktoré majú trochu netradičný tvar - na vrchnú stenu kocky je postavená menšia kocka tak, že jej spodné vrcholy spĺývajú so stredmi hrán väčšej kocky (stĺpik má teda päť vodorovných stien, šiestu, ktorá bude v zemi, neuvažujeme). Koľko rôznych stĺpikov si môžu postaviť okolo pozemku, ak jednotlivé steny stĺpikov budú ofarbovať buď zelenou, alebo bielou farbou?

K úlohe nebol obrázok. Zamerali sme sa na schopnosť vybrať z textu podstatné informácie a podľa toho si predstaviť tvar stĺpika. Ďalší dôvod prečo sme vybrali práve takúto úlohu je, že núti riešiteľa hľadať systém reprezentácie. Úlohu by sme mohli zaradiť na úroveň reflexie. Riešili ju študenti matematiky, informatiky a učiteľstva matematiky. Poďme rozanalyzovať túto úlohu z pohľadu kompetencií, ktoré úloha dominantne rozvíja a z hľadiska fáz riešenia úlohy, do akej sa študenti dostali podľa G. Polya:

- Kompetencie matematické pojmy, matematické modelovanie a priesktorová predstavivosť sa rozvíjajú pri riešení úlohy vo fáze porozumenia úlohe. V tejto fáze by si mal študent uvedomiť: Ktoré stĺpiky sú rovnaké? Čo je stena stĺpika? Koľko stien vlastne ofarbujeme?
- Kompetencie týkajúce sa reprezentácie sa rozvíjajú vo fáze návrh stratégie riešenia, kde študent hľadá vhodný systém na prehľadávanie možností.
- Myslenie a usudzovanie je rozvíjané vo fáze realizácia stratégie, kde študent vypisuje konkrétne možnosti a zlučuje podobné možnosti do skupín.
- Schopnosť analýzy a syntézy a hodnotiace myslenie sa využíva pri fáze pohľadu späť. Študent nájdené možnosti ofarbenia spätne prehodnocuje, či táto možnosť je správna a či ju už niekde neuvažoval.

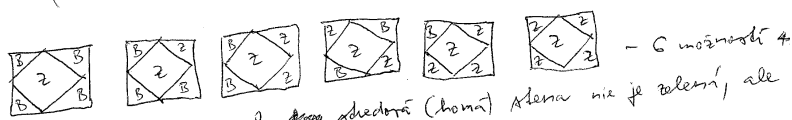
Pri analýze riešení úloh sme narazili na zle rozvinuté kompetencie, ktoré by sme mohli zatriediť do 4 skupín:

1. nepochopenie úlohy - neuvažovali vôbec o tom že stĺpiky majú byť rôzne, alebo čo to znamená rovnaký stĺpik, prípadne si preformulovali úlohu na inú.
2. zlá reprezentácia



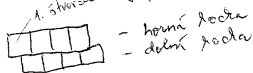
Obr. 3 – Konkrétne žiacke riešenie ukazujúce zlú reprezentáciu. Konkrétne navrhnutá schéma nevystihuje štruktúru telesa.

- nevystihnúť štruktúry telesa
 - aj keď reprezentácia farieb je správna
3. dobrá reprezentácia ale nesystematické vypisovanie možností - teda nepreskúmali všetky možnosti



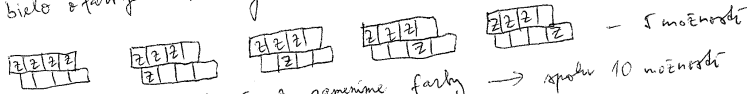
plus ďalších 6, ale ~~nie~~ ~~schéma~~ (horu) skúsia nie je zelená, ale biela → spolu 12 možností ✓

8) Keďže máme možnosti na rôzne odfarbenie iba zvislých stien odlišnosť:

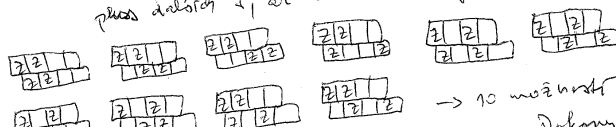


Pr. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ je to také ako $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, keď 1. stena v skutočnosti nie je prvý (stena alebo na konci)

1) bielo odfarbenie 4 steny a zeleno tiež 4 steny



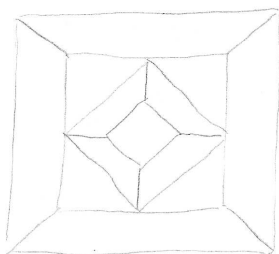
plus ďalších 5, ak zmeníme farby → spolu 10 možností



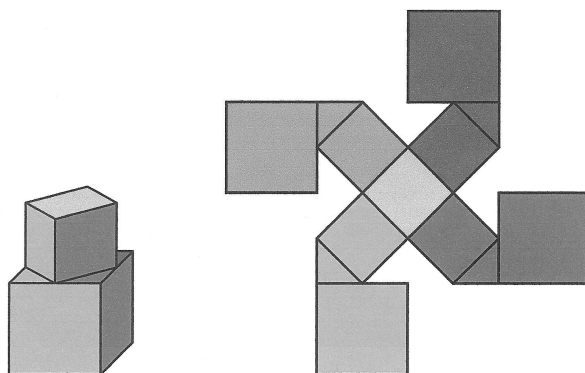
celkom 10 možností

Obr. 4 – Ukážka žiackeho riešenia na dobrú reprezentáciu ale nesystematické vypisovanie možností

- pohľad zhora - vypísanie všetkých možností
 - pohľad z boku - veľmi nesystematické a neprehľadné vypisovanie možností (zabudol preskúmať niektoré možnosti)
4. dobrá reprezentácia a systematické vypisovanie



Obr. 5 – Študent analyzoval pohľad zhora a rozdelil si to na 4 skupiny plôch (vrchná stena, steny malej kocky, steny veľkej kocky, zvyšok)



Obr. 6 – Ďalšie žiacke riešenie na dobrú reprezentáciu

Študent najprv analyzoval, koľko možností má na ofarbenie jednej strany a potom uvažoval ako môžu byť skombinované (na obrázku je každá strana reprezentovaná inou farbou):

- (a) Nech sú všetky 4 strany rovnaké
- (b) Nech má 3 strany rovnaké a jednu rôznu
- (c) ...

Ako ďalšia možnosť by sa dala ešte uviesť dobrá reprezentácia, ale vynechanie nejakej možnosti, prípadne zlé spočítanie, ale táto možnosť je z pohľadu analýzy riešení nezaujímavá.

Nevýhodou odovzdaného riešenia úloh je, že nevidíme v riešení, či študent prechádzal medzi jednotlivými reprezentáciami, aký bol prvotný

nápad a či už ten bol ten dobrý, keďže odovzdávajú už len čistopis. Práve táto otázka je zaujímavá z pohľadu vyučovania kombinatoriky.

5. Záver

Učitelia by sa mali pri vyučovaní kombinatoriky viac venovať výberu reprezentácie a vizualizácii, lebo aj pre budúcich učiteľov je to problém zvoliť si vhodnú reprezentáciu. Na hodine by mal učiteľ dať priestor žiakom aby vysvetlili, čo a ako si označili a prečo vôbec niečo označovať, akú reprezentáciu si zvolili a porovnať riešenia jednotlivých žiakov a na tom ukázať, ktoré riešenia sú najvýhodnejšie a prečo.

Literatúra

- [1] KUBÁČEK, Z. – KORŠŇÁKOVÁ, P.: *PISA 2003 - Matematická gramotnosť* (správa). ŠPÚ, Bratislava 2004.
- [2] SEKERÁK, J.: *Diagnostikovanie a rozvíjanie kľúčových kompetencií v matematickom vzdelávaní* (Dizertačná práca). UPJŠ v Košiciach, Košice 2008.

EXAMPLES OF INTRODUCING CHOSEN CONCEPTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Zbigniew Powązka

Uniwersytet Pedagogiczny, Instytut Matematyki

ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków

e-mail: powazka@up.krakow.pl

Abstract. In this paper we present examples of introducing basic concepts of mathematical analysis. We especially accent didactical operations which have been used to facilitate understanding of those concepts to students.

1. Introduction

During studying mathematical analysis it is essential to understand and correct use of concepts such as limit of a sequence, limit of a function, differentiability and integrality of function. These concepts are not easy and they cause many difficulties for students. There is a lot of teaching procedures which are being used to vanquish these difficulties. One of them is so-called *functional method of teaching mathematics*.

The foundation of this method of teaching mathematics on different levels of education was elaborate by Z. Krygowska (1977, s. 81 - 129) who based on results of researches of psychologist J. Piaget. According to H. Siwek (2005): *conception of functional method is fundamental strategy of didactically proper teaching process - learning of mathematics, but it can be also easily interpreted as basic strategy of discovering and creating mathematics by students*.

Using this method of teaching gives an opportunity to form different elements of mathematical activity. We can assume that building up these activities by learners is one of important goals of mathematics teaching (Krygowska 1986).

We can distinguish three levels while developing concepts with use of this method:

- level of concrete activities,
- level of concrete - imaginative activities,
- level of abstract activities.

Researches on methods of mathematical analysis teaching are also carried on at Slovakia and Czech Republic. We should indicate on important results gained by J. Fulier (2001), J. Fulier, J. Gunčaga (2006), J. Gunčaga (2001), J. Gunčaga, J. Fulier, P. Eisenmann (2008).

Number of value ideas of developing of basic mathematical analysis concepts are contained in lectures by I. Kluvánek (2006, 2007).

2. Examples of forming chosen concepts of mathematical analysis

Mathematical analysis classes on different levels of education are great opportunity to developing definitions of basic concepts, discussing examples and counterexamples and proving number of properties of these concepts. During the classes, aside from solving computing tasks, students have opportunity to gain an insight of these concepts. It is favored by functional method of teaching.

This method at the level of concrete activities requires solving a few computing task. Its amount do not have to be extensive because access to multimedia agents, such as computers or graphical calculators, pushes into the background necessity of exercising computing skills. Nonetheless, the selection of tasks should make them useful to extend the concept at higher levels of cognition. Let us observe that process by concerning below examples.

EXAMPLE 1.

Limit of a sequence is elementary concept of mathematical analysis. Convergence of the sequence a_n to finite limit $g \in \mathbb{R}$ is stated to students as belonging of almost all terms of this sequence to arbitrary neighborhood of number g .

Forming of this concept using the functional method of teaching require - at the level of concrete activities - to compute such type of tasks:

- Indicate neighborhood of given figure with indicated radius in set of real numbers with plain metric.
- Investigate how much terms of given sequence is in neighborhood of given number with indicated radius.
- There is given the sequence a_n and some real number a . Indicate such neighborhood of this number that almost all terms of sequence do not belong to it.
- Indicate such neighborhood of number a mentioned in previous task that infinitely many terms of considered sequence a_n belong to this neighborhood but not almost every terms.

- For unlimitedly settled neighborhood of some real number indicate the example of sequence which fulfill one of following conditions: almost every terms belong to this neighborhood, only finite number of terms belong to this neighborhood, infinitely many terms belong to this neighborhood.

In these tasks, both the number and the radius of the neighborhood, at the beginning should have a form of particular values which afterwards should be replacement by letter symbols. By investigating particular examples students learn to differentiate if the given number can be a limit of the sequence.

At the level of concrete - imaginary activities there can be achieved proofs of convergence of sequence a_n to limit g starting with severely easy examples which require only to solve the inequality

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

and then to investigate if for any ε almost every natural numbers belong to the solution of this inequality.

Afterwards, the examples should be enriched with such sequences that it will be suffice to estimate difference $|a_n - g|$ instead of solving mentioned inequality.

At the level of abstract activities we propose to students proofs of various qualities of convergent sequences. While exploring theorem concerning operations in the set of convergent sequences, students on the one hand learn techniques of achieving proofs with use of sequence limit definition and on the other, they discover important tool to indicate the limit of various sequences.

At this level we can also introduce the concept of divergence of the sequence to the infinity and discuss indeterminate forms.

Next elementary concept of mathematical analysis is limit of a function at a point.

EXAMPLE 2.

The idea of introducing this concept for real function is - in its foundations - similar to functional method of teaching and it was described in paper by Z. Powązka and J. Tabor (1988). In this example let U be a neighborhood of real x_0 and let V be $U \setminus \{x_0\}$, where $x_0 \in \mathbb{R}$.

At level of concrete activities there are indicated neighborhoods of various points which belong to the axis. Also here we indicate neighborhoods and neighborhoods of $-\infty$ or $+\infty$. At this level there are also exercised

different notation methods of neighborhoods of unlimited elements which belong to extended set of real numbers.

The next step contains exercises of finding neighborhoods of any point of numerical axis, which are part of inverse image of appropriate neighborhoods of a function f . After these didactically operations one defines general neighborhood-based definition of limit of a function at a point. Thereafter this general definition is specified according to particular circumstances.

In this development definitions of finite and infinite limit of the sequence, correspondingly in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ are particular cases of general definition of function limit.

EXAMPLE 3.

Interesting didactically solution for introducing the concept of limit of the function at a point is to prior define the concept of the function continuity. Then, investigation if the function has a limit in point x_0 amounts to give answer to the question about existence of continual protraction of given function to the set which is domain of this function extended by point x_0 . This idea is described in textbook by I. Kluváněk (2007).). Examples of tasks which could be use for functional develop of this concept are contained in book by J. Gunčaga, J. Fulier, P. Eisenmann (2008). We can also find there results of researches upon didactically mileage of this method.

Example which appears below presents different idea of introducing the concept of limit of the function at a point. It is less time-consuming but it requires use of some concepts which do not appear in current curriculum of math teaching in middle school.

EXAMPLE 4.

Different conception of introducing definitions of limit and continuity of the function is earlier development of metric in unlimited set concept and afterward development of concept of convergence to the metric.

In this case, at the level of concrete activities there should be worked out task in which there are examined examples of different metrics, in particular metrics in sets $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Then, there should be defined convergence to metric, in general and in particular cases. These deliberations can be conceded as concrete - imaginary activities.

At level of abstract activities there are achieved proofs of theorems relevant to properties of the concept of function limit which are true in all models. Then, there are discussed particular cases.

Each of these solutions has advantages and disadvantages. Choice of the particular didactically situation should depend on meritorical background of students and pupils.

We can also use functional method of teaching to develop other concepts, e. g. differentiability of the function (Gunčaga, Powązka 2006), measure and integrality of the function (Powązka 2009).

References

- [1] Fulier, J.: 2001, *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*, Univerzita Konštantína Filozofa, Fakulta Prírodných Vied. Nitra.
- [2] Fulier, J., Gunčaga, J.: 2006, *Modul matematickej analýzy v kurze ďalšieho vzdelávania učiteľov*. Matematika v škole dnes a zajtra, Zborník 6. ročníka konferencie s medzinárodnou účasťou, Ružomberok, s. 66-74.
- [3] Gunčaga, J.: 2001, *Limitné procesy v školskej matematike*, doktorská práca, Nitra, UKF, <http://fedu.ku.sk/guncaga/publikaci/DizWeb.pdf>
- [4] Gunčaga, J., Fulier, J., Eisenmann, P.: 2008, *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy*, Katolícka Univerzita v Ružomberku, Pedagogická Fakulta, Ružomberok.
- [5] Gunčaga, J., Powązka, Z.: 2006, *Badania nad wykorzystaniem pojęcia ciągłości funkcji do definiowania pochodnej funkcji w punkcie*, Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka Matematyki, 29, s. 5-28.
- [6] Kluvánek, I.: 2006, *Pripravný kurz k diferenciálnemu a integrálnemu počtu*, Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku, Ružomberok.
- [7] Kluvánek, I.: 2007, *Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej*, Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku, Ružomberok.
- [8] Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, WSiP, Warszawa.
- [9] Krygowska, Z.: 1986, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka Matematyki 6, s. 25-41.
- [10] Powązka Z.: 2009, *Uwagi o kształtowaniu rozumienia pojęcia miary na różnych poziomach edukacji*, Prace monograficzne z dydaktyki matematyki. Współczesne problemy nauczania matematyki 2, Forum Dydaktyków Matematyki, s. 141-149.

- [11] Powązka Z., Tabor J.: 1988, *Koncepcja wprowadzenia pojęcia granicy funkcji i granicy ciągu*, Matematyka 1, s. 18-25.
- [12] Przeniosło, M.: 2000, *Rozumienie granicy funkcji wyniesione ze szkoły średniej*, Kielce.
- [13] Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

EXAMPLES OF USING ICT FOR FORMING REDUCTIVE REASONING AT SCHOOL

Tadeusz Ratusiński

*Institute of Mathematics
Pedagogical University of Cracow
ul. Podchorążych 2, 30-084 Cracow
e-mail: ratusita@gmail.com*

Abstract. One of fundamental part of maths teaching is teaching of reasoning. Reduction is a method "moving from end to beginning". It is very useful in process of solving mathematical problems, but it's hard to teach reduction in natural way at school. Maybe special kind of maths problem can help with it. Educational computer game can be such problem. It can discreetly provoke situation, when pupils discover reductive method to win the game. In this article I'll show results of research over use of educational computer game for forming reductive reasoning at school (10 - 14 years old pupils).

1. Introduction

We have been living in a world that makes us more and more addicted to the surrounding Information Technology. Computers have already been used in every field of life. Their role in education has also become crucial. Teaching of mathematics with the use of computers is the subject of many discussions conducted both by teachers and educators. There has been some research on various problems connected with functioning of computers in the teaching process. My research concentrated on the discovery of the role they have in the process of forming reductive reasoning.

In the process of teaching mathematics one can distinguish, with a considerable simplification, four components: forming of mathematical terms, task solving, mathematical reasoning, establishing mathematical language.

Math is associated with tasks solving. There is a lot of true in this sentence, because tasks played, play and will play in teaching of mathematics fundamental part.

There are many different classifications of mathematical tasks in literature [1], [2], [7], [10]. In all of them "*didactic games*" are displayed as separate type of tasks, which however can realize the functions of others types

of math's tasks. This is one of basic property of didactic games which can be used as training tasks, math's problem or educational "*provocation*". . . .

What is it the game? We can use notion of game as the action (the moves) executed by playing persons or teams (at least two), peaceably with settled forward the rules, which is the aim victory of one of playing persons (one of teams) [4].

Didactic game is a specific game, which bases on basic function of the child's psyche, on need of play and this game influences on his intellectual actions consciously [3].

Rules of didactic game characterize, that:

- realization of move peaceable with rules of game requires the realization the operation, which capture is the aim of teaching,
- every evaluation of strategy of game is connected to discovery of property or dependence, which perception is the aim of teaching [9].

The utilization of the games is one of methods to make pupils more interested in mathematics, which inflicts, that their approach to this "*difficult*" subject becomes positive. This positive putting is the essential element of didactic success.

Currently didactic games, as a method of education, became more popular at schools. Usage such games has three main functions:

- motivating to undertake intellectual effort,
- didactic, they teach contents and the methods of mathematics,
- educational, they teach rules of team's work [4].

Mathematical didactic games have well-chosen mathematical contents and constructed principles of them lead to mathematical activities. Additionally they introduce element of rivalry.

3. Reductive method

Reductive method called also *reduction* is a method "*moving from end to beginning*". It is very useful in process of solving mathematical problems. In this method we start from the point we want to prove, from the question which was put in the task. Answering the question: "*what would it sufficed to know...*?", we formulate next questions, easier and more easier, answers of which would lead us to the solution of the task. Proceed until we got question, which is obvious to us [7].

We resolve the task on numbers of the different tasks which lead to the solution of the task from which we went out on the beginning.

"The scheme of the reductive reasoning is following in the case of the argumentation of statements. If by F we mark foundations, and by T - the thesis, then we will for such conditions:

$$T_1, T_2, \dots, T_n, T_1 \Rightarrow T, T_2 \Rightarrow T_1, T_3 \Rightarrow T_2, \dots, T_n \Rightarrow T_{n-1} \text{ and } F \Rightarrow T_n.$$

At last, so every step of such reasoning is the formula of sufficient condition for the thesis, or different the already received condition with regard of the foundation of the statement, received postulates, definition and statements" [6].

This method ought to be teaching not by standard demonstration, but across creation such situations in which this way of thinking can appear spontaneously or it can be discreetly provoked by teacher's question. Reduction should be taught early, in such situation emerges in the natural way from the constructed suitably didactic situation so it would be comprehensible and accessible for pupils. The game Maths Meadow attends this postulate.

4. Maths Meadow - example of reduction game

Maths Meadow is Flash based computer didactic game for two players. If there is no real opponent computer plays as the second player. The game consists in *flying* over flowery meadow. There are two different boards - named *Meadow* (figures 1 & 2). Both players control one pawn - *Bee*, and each make one move (one jump to the nearest flower) per turn. There is Bee on very bottom flower at the beginning of the game. Arrows show all possible moves. Winner is this player who reach the hive (at the top of each board).



Figure 1 - Meadow 1



Figure 2 - Meadow 2

5. The winning strategy

Everyone who plays a game wants to win. This intention of winning the game is good situation for discovering reduction reasoning. Why ?

Game seems to be easy. Starting position is the first flower at the bottom of the board (it's marked with "S" on the picture 3 & 4). The goal of the game is to reach the hive (at the top of the board - "F" on schema). But how should we play to manage to do this? There is winning strategy for both of boards.

By winning strategy we understand such a plan of proceeding, which lead us to victory independently on partner's movements. Player must uncover and use them to win in whole game. To do this he must answer the question *"Where I have to put Bee to be sure that in my last movement I will reach hive (I will put Bee on finish line)?"* Let's look how he might discover the winning strategy for left board (picture 3).

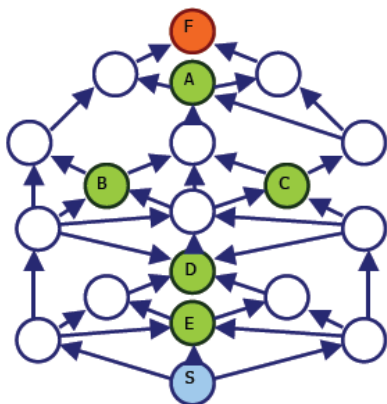


Figure 3 - Meadow 1

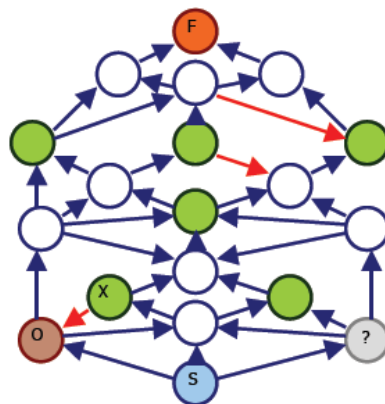


Figure 4 - Meadow 2

The correct answer for that question is *"I have to put Bee on flower marked as "A" at the top of the board"*. New question appears immediately *"what should I do to put it over there?"* And now player must discover that the fundamental point for this is to take position on one of flowers marked as "B" or "C". *"But how to get to this position?"* Strategic point for this situation is the next flower "D". The next step of reduction indicate next flower "E". The last question *"How to made to put Bee on flower "E"?"* is trivial, because *"when I start I can move pawn to that position"*. Player finishes all steps of reduction and find out full winning strategy for left board. Those, who will begin game have to put Bee on flower "E" and next jump to lucky flowers "D", "C" or "B", "A" and finally reach hive (marked as "F"). The player who begins as second should try to occupy any of the

above flowers. It is possible in case, when the opponent doesn't apply the winning strategy.

Now let's look at the next board (*Meadow 2* - picture 4). There are only four differences between them - opposite directions of three arrows and absence one middle arrow. But it changes the winning strategy.

The series of analogical questions allow to discovery which flowers are "the way for victory" (fields marked on scheme). The first *lucky flower* is just field marked "O". But there is new element on this board - loop. Then opponent puts pawn on flower "X" and player who knows winning strategy can turn back to flower "O" and he will win. Another important fact is that there is no symmetry on this board. It's easy to explain why flower marked as "?" doesn't guarantee the succeed and flower "O" does.

As we can see game *Maths meadow* requires strategic and logical thinking. To win, player has to uncover winning strategy.

Using deduction to discover strategy is hardly useful, because there are too many paths to analyze (over 150 ways to go from beginning to the end). But if we use reduction we will solve this problem quickly. The reduction is very attractive and effective method in this situation.

So, is it proper to think, do pupils will discover strategy playing the computer game by reduction?

6. Research and some conclusions

The research has been applied to 164 pupils 10 - 14 years old - 76 boys and 88 girls (there were only one 9 years old and one 15 years old).

They all played couples so many times and as long as they want. They were observed and additionally all they did was recorded as films (this way gave next materials for analyse). Research based also on special prepared questionnaire.

There are results of pupils' observations in table 1.

	Meadow 1								Meadow 2							
Age	9	10	11	12	13	14	15	All	9	10	11	12	13	14	15	All
Full strategy	0	0	0	2	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
Incomplete strat	1	1	1	2	9	8	0	22	0	0	0	3	3	1	0	7
„Lucky flowers“	0	0	7	3	6	7	0	23	0	0	1	3	5	8	0	17
None	0	6	34	25	26	24	1	116	1	7	41	26	33	31	1	140

Table 1

They are based on questionnaires in which pupils had to evaluate themselves.

If we compare "how pupils claimed" in questionnaire and "how they played" (table 2) based on analysis of collected materials (recorded films) we formulate surprised conclusion: **pupils had applying the strategy insensible!** They played right flowers, but they didn't know it's strategy.

	Meadow 1								Meadow 2							
Age	9	10	11	12	13	14	15	All	9	10	11	12	13	14	15	All
Full strategy	1	0	0	3	7	5	0	16	0	0	0	0	1	1	0	2
Incomplete strategy	0	1	17	7	16	9	0	50	0	0	3	5	7	0	0	15
„Lucky flowers”	0	4	19	20	13	22	0	78	0	1	16	10	16	23	0	66
None	0	2	6	2	5	4	1	20	1	6	23	17	17	16	1	81

Table 2

Let's sort the same data from analysis of films by school classes (Meadow 1 - figure 3, Meadow 2 - figure 4).

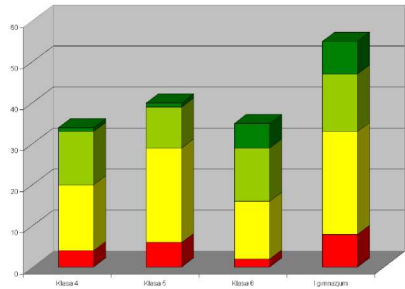


Figure 5 - Meadow 1

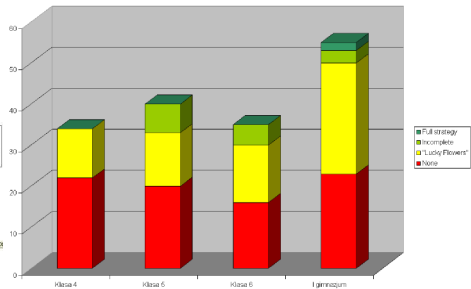


Figure 6 - Meadow 2

Few more conclusions can be formulated:

The winning strategy for Meadow 1 has been easier to discover then the other one. In this situation the first strategy seems to be some kind of epistemological obstacle [8]. Pupils who had found the winning method for Meadow 1 had problems with discovering next one.

If we concentrate on Meadow 1 we'll observe:

- ~45% of each class (primary school and secondary school) noticed lucky flowers - they observed: If I put Beep on this flower I'll win. They didn't make any reasoning for this fact, just observation.
- ~33% of each group - find out incomplete strategy - it means they forgot about one flower (most often the first - the very bottom one - the last step of reasoning).

- ~15% of oldest classes (6th primary school and 1st secondary school) discovered full strategy (full reductive reasoning).
- Significant majority of all pupils discovered at least lucky flowers on first board.

The analysis of recorded films shows that quite a lot of pupils solved this problem in both cases (on both boards):

IV SP (4th primary school) - ~30%,
V SP (5th primary school) - ~56%,
VI SP (6th primary school) - 50%,
I Gimnasium (1st secondary school) - ~94%.

Additional from observation two more conclusions can be formulated:

- Pupils cooperation has been better way to discover winning strategy than their contest.
- Weakest pupils learned more observing opponents. It helped them to find out the right way of reasoning.

Described game Maths Meadow is a part of collection of math's didactics games. Working over such project we realize that this product is dedicated for children. Well-made educational game can become an object of interest even of the most demanding player. Under colourful, breath taking graphic, interesting music and the sound effects, in easy way we can smuggle mechanisms responsible for formatting logical and creative thinking as well as skill of discovering the strategy.

The desire of victory is natural helping factor for uncovering winning strategy. It seems, that such didactic games are proper for pupil independently of age. Results of researches show, that suitably constructed games can help in teaching reductive reasoning. At the beginning the pupils play without any analisation of situation. However, after several played parts appears question: what should I do to win? This the motivates to analyse next steps of the game and search for strategy which allows winning. Strategic games used in didactics have to be always adapted to child's intellectual possibilities.

The research has showed, that it is possible and may be effective to teach reduction from 10 years old. Educational games help to develop way of thinking which should be the basic aim of education at school, but it is not possible without general introducing computers. The computers allow teaching in a way that was unavailable up to now.

Maths meadow is example of such game, which we can use to teach reduction, starting from 10 years old pupils of primary school. Experiences

gained during the process of searching winning strategy in suitably constructed game are highly valued. In the future they can become the starting point for systematic learning of using reduction in other situations [5]. In this way it is easier to transfer this method to solve different problems, and at last, to understand and realize the generality of reductive method in the future by older pupil.

References

- [1] Kąkol, H. (1984). *Typy zadań*, Oświata i Wychowanie, version B 15, 10-12.
- [2] Krygowska, A.Z. (1975). *Zarys dydaktyki matematyki*, część 3, WSiP, Warszawa.
- [3] Okoń W. (1975). *Słownik pedagogiczny*, PWN, Warszawa.
- [4] Pieprzyk, H. (1987). *Gry i zabawy w nauczaniu matematyki*, Oświata i Wychowanie, 22, 5-8.
- [5] Pieprzyk H. (1985). *Gry jako pomoc dydaktyczna w kształceniu rozumowania redukcyjnego u uczniów klasy IV*, Dydaktyka Matematyki, 4, 7-59.
- [6] Pieprzyk, H. (2002). *Matematyczne gry i zabawy*, Wydawnictwo Dla Szkoły, Wilkowice.
- [7] Polya, G. (1993). *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.
- [8] Sierpińska A. (1998). *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki*, Dydaktyka matematyki 8, 103-153.
- [9] Turnau S., Pieprzyk H. (1975). *Gry w nauczaniu arytmetyki*, Oświata i Wychowanie, version C i D, 5.
- [10] Wittman, E. (1993). *Dydaktyka matematyki jako design science*, Dydaktyka matematyki 15, 103-116.

TVORBA ŠKOLSKÉHO VZDELÁVACIEHO PROGRAMU A ĎALŠIE VZDELÁVANIE UČITEĽOV MATEMATIKY

Eva Rusnáková

*Metodicko - pedagogické centrum
regionálne pracovisko Banská Bystrica
Horná 97, 975 46 Banská Bystrica
e-mail: eva.rusnakova@mpc-edu.sk*

Abstract. The paper deals with a need of lifelong learning mathematics teachers in the field of school education programs. The goal of the article is to propose criteria for the creation of training programs for teachers of Mathematics.

Tesne pred začiatkom školského roka 2008/2009 boli učitelia základných a stredných škôl postavení pred neľahkú úlohu - vypracovať školské vzdelávacie programy (ŠkVP). Aj napriek tomu, že Zákon 245/2008 Z. z. v §7 definoval požiadavky na školské vzdelávacie programy, že bola vypracovaná a zverejnená podrobná metodika tvorby ŠkVP a organizovali sa hromadné informatívne stretnutia riaditeľov a učiteľov škôl, mnohí nevedeli čo sa od nich očakáva. Len málokto z pedagogických zamestnancov vedel čo školský vzdelávací program je a ako treba postupovať pri jeho tvorbe.

Podľa (1) jednou zo zásad pre tvorbu ŠkVP je to, že "*pre tvorbu ŠkVP využíva škola voliteľné hodiny a pripravuje si vlastný učebný plán*"(1). Škola môže využiť voliteľné hodiny niekoľkými spôsobmi. Môže ich využiť na rozvoj kompetencií žiakov, na zvýšenie časovej dotácie povinných predmetov bez rozšírenia učiva, alebo s doplnením rozširujúceho učiva, prípadne na vyučovanie nových predmetov. Nedostatok času ale hlavne to, že doteraz boli školy a učitelia iba realizátormi štátom predpísaného kurikula a nie jeho tvorcami, bolo zrejme príčinou toho, že pri tvorbe ŠkVP si mnoho škôl zvolilo tú najjednoduchšiu cestu - posilniť časovú dotáciu povinných predmetov bez rozšírenia učiva. Táto forma využitia voliteľných hodín kládla na učiteľov najmenšie nároky. Najdôležitejšie bolo dohodnúť sa, ktoré predmety a akým počtom hodín posilniť. Potom už nebolo veľkým problémom pretransformovať ŠVP do ŠkVP. V spôsobe vyučovania, nie len matematiky, sa však väčšinou nič nezmenilo.

Do zložitejšej situácie sa dostali školy, ktoré sa rozhodli posilniť časovú dotáciu povinných predmetov s doplnením rozširujúceho učiva, a najmä tie, ktoré sa rozhodli využiť voliteľné hodiny na rozvoj kompetencií alebo na vyučovanie nových predmetov. Tieto školy museli vypracovať vlastné ŠkVP. Tvorba kvalitných vzdelávacích programov si však vyžaduje od učiteľov získanie nových kompetencií.

Bolo by veľmi dobré, keby učitelia matematiky, aj vzhľadom k tomu, že týždenná časová dotácia vyučovacích hodín v rámcovom učebnom pláne ICSED 1 - 3A bola oproti predchádzajúcim učebným plánom znížená, nebojovali iba o zvýšenie počtu vyučovacích hodín matematiky, ale aby dokázali vytvoriť vlastné vzdelávacie programy, ktoré budú podporovať rozvoj matematickej gramotnosti žiakov.

Podľa zákona 245/2008 Z. z. §7 ods. 4 školský vzdelávací program obsahuje:

- a) názov vzdelávacieho programu,
- b) vymedzenie vlastných cieľov a poslania výchovy a vzdelávania,
- c) stupeň vzdelania, ktorý sa dosiahne absolvovaním školského vzdelávacieho programu alebo jeho ucelenej časti,
- d) vlastné zameranie školy,
- e) dĺžku štúdia a formy výchovy a vzdelávania,
- f) učebné osnovy,
- g) učebný plán,
- h) vyučovací jazyk podľa §12,
- i) spôsob, podmienky ukončovania výchovy a vzdelávania a vydávanie dokladu o získanom vzdelaní,
- j) personálne zabezpečenie,
- k) materiálno-technické a priestorové podmienky,
- l) podmienky na zaistenie bezpečnosti a ochrany zdravia pri výchove a vzdelávaní,
- m) vnútorný systém kontroly a hodnotenia detí a žiakov,
- n) vnútorný systém kontroly a hodnotenia zamestnancov školy,
- o) požiadavky na kontinuálne vzdelávanie pedagogických a odborných zamestnancov (2).

Za najdôležitejšie, vo vzťahu k štruktúre vzdelávacieho programu, jeho tvorbe, realizácii a hodnoteniu, sa javia kompetencie, ktoré v rámci komplexného pohľadu na kompetencie a spôsobilosti učiteľa uvádzajú Kasáčová a Kosová:

- *identifikovať psychologické a sociálne faktory učenia sa žiaka - poznať teórie učenia, poznať, diagnostikovať a využívať individuálne učebné štýly v závislosti od psychických, fyzických a sociálnych podmienok,*

- *mať schopnosť plánovať a projektovať výučbu - vedieť tvoriť a realizovať strednodobé a krátkodobé edukačné plány, projekty, edukačné situácie s ohľadom na školský program a individuálne potreby žiakov,*
- *mať schopnosť stanoviť ciele vyučovania orientované na žiaka - poznať cieľové požiadavky vzdelávania a vymedziť ich v podobe učebných požiadaviek na žiaka,*
- *mať schopnosť psychodidaktickej analýzy učiva - poznať a vedieť uskutočniť didaktickú analýzu učiva, vybrať základné a rozvíjajúce učivo v súlade s edukačnými cieľmi a vzdelávacími potrebami žiakov,*
- *mať schopnosť výberu a realizácie vyučovacích foriem a metód - poznať a efektívne používať metódy a formy podporujúce aktívne učenie sa žiaka,*
- *mať schopnosť hodnotiť priebeh a výsledky vyučovania a učenia sa žiaka - poznať spôsoby hodnotenia, vedieť stanoviť kritériá a hodnotiť žiakov vzhľadom na ich individuálne odlišnosti,*
- *vytvárať a využívať materiálne a technologické zázemie vyučovania - tvoriť a využívať didaktické pomôcky, médiá, IKT v edukačnom procese,*
- *mať schopnosť ovplyvňovať personálny rozvoj žiaka - poznať, aplikovať stratégie personálneho rozvoja žiaka (sebapoňatia, sebadôvery, sebaregulácie), oceňovať personálne spôsobilosti žiaka (3).*

Určite nikto nepochybuje o tom, že ak má učiteľ získať uvedené kompetencie je potrebné aby sa vzdelával.

Štúdiom odbornej literatúry, pasívnou účasťou na prednáškach môže učiteľ získať potrebné teoretické vedomosti o postupoch pri tvorbe vzdelávacích programov, rôznych teóriách učenia, diagnostikovaní učebných štýlov, plánovaní a projektovaní výučby, cieľoch vyučovania, psychodidaktickej analýze učiva, rôznych formách a metódach vzdelávania, spôsoboch hodnotenia priebehu a výsledkov vyučovania a učenia sa žiaka. Aj najlepšie teoreticky vybavený učiteľ však len ťažko vytvorí vzdelávací program bez toho aby mal možnosť sa to skutočne naučiť.

Ďalšie vzdelávanie učiteľov je potrebné realizovať tak, aby napĺňalo požiadavky tvorivo - humánnej výchovy a vzdelávania. Iba učiteľ, ktorý má možnosť vzdelávať sa v súlade s hlavnými princípmi humanistického prístupu vo výchove a vzdelávaní bude schopný tieto princípy rešpektovať pri tvorbe a realizácii vlastného vzdelávacieho programu. V ďalšom vzdelávaní učiteľov je dôležité využívať také metódy a formy, ktoré učiteľom poskytnú dostatok priestoru pre učenie sa, aktivitu, skupinovú prácu, kooperáciu pri učení sa a komunikáciu. Ak má byť vzdelávanie učiteľov založené na ich aktívnom učení sa, nemôže byť realizované masovo formou prednášok. V praxi

by sa to malo prejaviť tak, že semináre nebudú organizované pre viac ako dvadsaťpäť učiteľov v jednej skupine.

Tvorba školských vzdelávacích programov si vyžaduje spoluprácu všetkých učiteľov školy. Vzdelávacie programy, ktoré by rozvíjali kompetencie učiteľov matematiky v oblasti tvorby vzdelávacích programov na rozvoj matematickej gramotnosti žiakov by nemali byť určené iba pre uzavretú komunitu učiteľov matematiky. Je vhodné cieľovú skupinu učiteľov matematiky rozšíriť aj o učiteľov iných predmetov (fyzika, chémia, biológia, geografia, slovenský jazyk), pretože rozvoj matematickej gramotnosti nie je možné bez rozvoja čitateľskej a prírodovednej gramotnosti. V rámci takto realizovaných vzdelávacích programov budú mať učitelia možnosť spolupracovať, komunikovať a tak hľadať to, čo je v jednotlivých predmetoch spoločné. Takáto spolupráca im umožní nadobudnúť nadpredmetový pohľad na vzdelávanie a na rozvoj kompetencií žiakov, čo určite prispeje aj k ľahšej integrácii prierezových tém do vytvorených vzdelávacích programov.

Záver

Za základné kritériá, podľa ktorých by mali byť vytvorené a realizované vzdelávacie programy pre učiteľov matematiky považujem tieto:

- cieľová skupina - učitelia matematiky aj učitelia iných predmetov,
- metódy a formy - podporujúce aktívne učenie sa, eliminovať prednášky,
- obsah - tvorba vzdelávacích programov,
- výstupy - konkrétne nadpredmetové vzdelávacie programy zamerané na rozvoj nielen matematickej gramotnosti žiakov,
- organizácia - skupiny učiteľov s max. počtom 25 účastníkov (počet účastníkov z jednej školy 2 - 3).

Literatúra

- [1] Štátny vzdelávací program pre 2. stupeň základnej školy v Slovenskej republike, ISCED 2 - nižšie sekundárne vzdelávanie, Bratislava: ŠPÚ, 2008.
- [2] Zákon č. 245/2008 Z. z. o výchove a vzdelávaní (školský zákon) a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov, 22. máj 2008.
- [3] Kasáčová, B., Kosová B.: *Kompetencie a spôsobilosti učiteľa - európske trendy a slovenský prístup*. In: Kolektív autorov: Profesiálny rozvoj učiteľa. 1.vyd. Prešov : Metodicko-pedagogické centrum, 2006.

LANGUAGE ASPECTS OF THE INITIAL PHASE OF THE CLIL METHOD IMPLEMENTATION INTO MATHEMATICS LESSONS AT LOWER SECONDARY LEVEL

Marek Šulista

*Ekonomická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Studentská 13, 370 05 České Budějovice
e-mail: sulista@ef.jcu.cz*

Abstract. The paper presents research result conducted at lower secondary school level focusing on the language aspects of the initial phase of implementation of the CLIL method into mathematics lessons.

1. Introduction

It is generally acknowledged (Ellis, 2002; Gay, 1988; Darn, 2006) that foreign (second) languages are most effectively learnt in a context which is meaningful and interesting for the learners. This key fact makes language teachers and methodologists think about the importance of the context and about possible authenticity brought into the learning process. The effectiveness of the usage of a second language as a medium to convey informational content of interest and relevance to the learners has become a rationale underlying content-based second language learning and teaching.

Nowadays, there is clear evidence of stressing general knowledge of foreign languages in today's society. There are many ways and possibilities of supporting foreign language teaching and learning, but one of them which is more and more often used at lower and upper secondary and university level is the Content and Language Integrated Learning (CLIL) method – teaching a non-language subjects in a foreign language.

The curricular reform taking place in the Czech Republic, which allows elementary and secondary schools to make their own school curricula, use new teaching methods and be out of the mainstream in order to become more attractive for prospective pupils and students and their parents, enables schools to implement the CLIL method. However, there are different

reactions and attitudes among teachers, as some of them think that such teaching is very demanding for pupils, it requires very good knowledge of English for both students and teachers, and that such teaching would not be possible to carry out within the current curriculum. On the other hand, some teachers thought that teaching in a foreign language could be interesting, motivating and they would like to try it within their mathematics lessons.

There are no doubts that to implement this method of teaching at lower secondary level is not always easy, as the creation of a suitable environment for such teaching is affected by many factors. The language competence of participating students, the language readiness of the teachers, and the willingness of the school management to support this teaching method at a particular school are some of many. However, CLIL can unlock a number of doors which hinder an institution's potential for growth. But precisely how that could happen depends on the local circumstances (Marsh, Marsland, Stenberg, 2001, p. 28.) This paper outlines experience with the use of foreign (target) language in the initial phase of implementation of the CLIL method into mathematics lessons.

2. Experimental Teaching

The experimental teaching was conducted in Základní škola Matice Školské in České Budějovice where one class of Year 8 participated in the experiment. The mathematical topic of the experimental teaching was the Pythagorean Theorem and the experimental lessons were video-recorded. The camcorder recorded mainly the happening at the blackboard and the presentation of the teacher-experimenter which had been permitted by the school headmaster. Using the record of the lessons, the utterances of the teacher-experimenter and some of the students was transcribed and afterwards analysed. The attention was paid mainly to the proportion of the target language, the way the teacher-experimenter used the code-switching and the target language's grammar and vocabulary features of the presentation.

It is crucial to say that the findings of the conducted experiments can be generalized only to a certain extent as the participating pupils, students, their teachers and the teaching environment are always unique and specific and should be understood that they can only indicate general conclusions.

3. Research Outcomes

During the experimental teaching, the pupils accomplished all the assigned tasks and co-operated with the teacher-experimenter at usual level, and

their mathematics teacher did not notice significant changes in the pupils' behaviour. The language background of the CLIL method implemented in mathematics lessons could be described from several point of view. From the grammatical point of view, the teaching consisted of basic grammatical elements and was adequate to the pupils level of English.

The mathematical vocabulary numbered 24 new specialised words in the presented topic which were well acquired by the pupils. The teacher-experimenter managed to cover the mathematical topic using the target language in 76 percent of all utterances – either only in English or together with the same Czech translation. It represents a large cover of the presented topic in the target language. Teachers' worries about the implementation of the CLIL method in lessons of mathematics can be seen as odd. The conducted research showed it is possible to implement successfully the CLIL method within the given time allocation devoted to mathematics at particular educational levels without increasing the number of lessons.

Concerning the language level, the target language used by the experimenter at the lower secondary level corresponds with the language reference level of B1 and the level of the pupil was at level A1. Teachers should not be afraid to switch between the mother tongue and the target languages. In the initial phase of the implementation it is unavoidable. The analysis of the functionality of the code-switching of the experimenter concluded that the functions formulated by Sert (2005) and Cook (1991) are rather insufficient and that the code-switching have also other functions. The experimenter switched the code when asking for comprehension, explaining the context such as history, or for summarizing what has been explained in the target language.

However, even though the code-switching is used for several reasons, it is still possible to cover a significant part of lessons of mathematics in the target language and meet the criterion for CLIL teaching. Teachers should consider code-switching as a helpful tool.

The experimenter tried to get the pupils involved in the process posing simple questions asking them to answer in the target language. The questions were primarily focused on:

- the reading of numbers (How do we read this number?, How many intersections do we have?, How do we read $62 + 82 = 102$?),
- the English alphabet (e.g. What is the name of the triangle?, Which side of the triangle is the hypotenuse?, Which triangle is right-angled?),

- inquiry questions (e.g. Do you agree?, Do you understand?, Is it clear?),
- and calculations (e.g. How much is five squared?, How much is the square root of 81?).

The last language feature examined during the language analysis focused on the followup reactions on the teachers prompts. The experiment showed that about 59 percent of the responses to the questions posed by the teacher-experimenter in the target language were responded also in the target language. Therefore, teachers should pose questions to their pupils and students in the target language, as it seems that it is an effective tool to make them also respond in the target language.

The interviewing of two randomly chosen pupils which was focused on the identification of possible problems with understanding both the English language as well as the mathematical matter showed that the pupils almost every time did understand the mathematical matter. The different situation was with the understanding of English. In a half of the cases pupils admitted that they had problems to understand certain parts of the lessons. Majority of them solved the problem with the bad understanding by asking their peers. However, in the end, they thought that they understood everything. If some of the pupils did not understand what had been said English, the pupils mainly asked their neighbour (93 percent), or they waited for another formulation or for a later Czech translation (7 percent) given by the teacher.

It is also important to mention that the participated pupils liked the lessons and they have some problems with understanding both the mathematical subject matter as well as the target language. The majority of the pupils think that they have learnt some interesting words and phrases.

This is in accordance with Swain (1988, p. 69-73) who states that „a typical immersion (CLIL) classroom approach is that the teacher asks questions and the pupils provide short answers which make the teacher input abundant and the learner's output minimal.“ He adds that „not many tenses and grammatical structures are used and, therefore, little practise of more complex language structures can be observed in the CLIL classroom.“

4. Conclusion

For more general conclusions, more research of the same nature has to be conducted at various educational levels. It can be concluded that the experiment was definitely beneficial, not only for the participating pupils, students and their teachers (for whom the experiment enabled a new sight on the

teaching of mathematics), but also for other teachers and the school management, who could see that such an implementation of the CLIL method into mathematics lessons does not bring many complications or slowness, and that it is not so demanding regarding the language competence of the teachers as well as their pupils and students.

References

- [1] Cook, V. (1991). *Second Language Learning and Language Teaching*. Melbourne: Edward Arnold / Hodder Headline Group.
- [2] Darn, S. (2006). *Content and Language Integrated Learning (CLIL): A European Overview*. ERIC (ED490775). [online] (16.11.2008). <http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b//80/1b/c4/2b.pdf>.
- [3] Ellis, R. (2002). *Understanding second language acquisition*. Oxford: Oxford University Press.
- [4] Gay, G. (1988). *Designing relevant curricula for diverse learners*. Education and Urban Society, 20(4).
- [5] Marsh, D., Marsland, B., Stenberg, K. (2001). *Integrating Competencies for working life*. Jyväskylä: University of Jyväskylä.
- [6] Sert, O. (2005). *The functions of code switching in ELT classrooms*. Internet TESL Journal, 11 (8).
- [7] Swain, M., Lapkin, S. (1982). *Evaluating Bilingual Education: A Canadian Case Study*. Clevedon: Multilingual Matters.

ICT SUPPORT IN MATHEMATICS

Takács István Árpád

*Katona József High School
Dózsa György út 3 Kecskemét, Hungary
e-mail: itakacs@kjg.hu*

Abstract. Using ICT as a tool for learning enables students to:

- efficiently and effectively access digital information to assist with -investigating issues, solving problems and decision making,
- produce creative solutions to support learning and develop new understandings in areas of learning,
- communicate, share and work collaboratively in local and global environments,
- understand the legal, ethical and health and safety implications of using ICT and their responsibilities as users and developers,
- develop new thinking and learning skills to support learning.

On my view we have to teach the teachers at first. I wanted to represent several problems and it's solutions with GG. - never mention the fact that - No matter how important we consider IT programs it is essential that students produce written records.

1. Introduction

I teach Mathematics in several forms of class in Hungary: Bilingual- (3 hours/week), real-(3 hours/week), science-based form (6 hours/week). Our national aim is to create a task oriented interactive classroom. Most of the teachers doesn't wanted to "waste" one lesson for Computers. This attitude we must clear from the teachers mind. We have to accept, that now we live in a hard-computer based world (at it will become more tangled). It is to be regretted that the student are expending too much time before a PC-and doing nothing efficient.

In our school we have a good and close relationship with our IT-teachers. We have arrangement that they will teach some tutorial lesson for using GeoGebra, it follows that I can bring the math lesson into the it-classroom.

Certainly it involves the following questions:

- What is the exact aim of using ICT in Math?
- Create a ppt- presentation for one special lesson?
- Using of Digi-Table?
- Improving a knowledge base working with the Programs?
- Do we teach the same?
- Would we need a nationally uniform approach?

One of the best ways to handle problems is to have the right attitude towards them. Sometimes problems may be blessings in disguise. Problems may be a way that existence is trying to assist us to create opportunities for us to grow and become better human beings. Problems can hide opportunities not only for personal growth but also to create wealth and success. For every problem, there should be a solution.

How to Solve a problem suggests the following steps when solving a mathematical problem:

1. First, you have to understand the problem.
2. After understanding, then make a plan.
3. Carry out the plan.
4. Look back on your work. How could it be better?

"If you can't solve a problem, then there is an easier problem you can solve: find it." George Pólya

2. GeoGebra in mathematics education

GeoGebra (from now on GG) was created to help students gain a better understanding of mathematics. That's not just one step in the learning process. You can connect the steps with GG. Clear visualizations, animated diagrams, parametrical data's help to not only represent one exact situation. Sometimes students work could be described as "mathematical experimenting", if they create them own toolbar (for example: inscribed circle, orthogonal projection, Median of a triangle) or an animated ggb-file. GG helps to glide over the difficult passages of the syllabus.

Let's observe the grade 9 (year 14) syllabus:

- Sets, Combinatorics [6 h]
- Algebra and Number theory [19 h]
- Functions [16 h]
- **Triangles Quadrilaterals and polygons** [19 h]

- Equations, Inequalities, Equation systems [20 h]
- **Geometrical Transformations** [20 h]
- **Statistics** [5 h]

People may think, that the first part, when the GG can use in this curriculum will be the Functions. That's wrong. I created (with the help of Tadeusz Ratusiński) ggb- files to represent several problems, for instance:

Find the locus of points, that lies at least 3 units from a given line and at most 5 units from a given point.

At that point we must stop for a moment, while this is an open exercise. We have no idea about the place of the two starting object! This point is element of the line? With GG you can take advantage of representing all the different circumstances.

After this I realized, that GG has also Spreadsheet (which often we use for Statistics or Calculations). That indicates me to create a How to Convert from Decimal to Binary, Ternary ... Octal gbb file while it's just a "table". Where cell B1- contains that number which have to transform and D1 the new base of the numeral system. Needless to say, that I hide unnecessary 0-s whit a 'Condition to show object'.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		19	23	2			23		
2		18		0			11	1	
3							5	1	
4							2	1	
5							1	0	
6							0	1	
7							0	0	
8							0	0	
9							0	0	
10							0	0	
11							0	0	
12							0	0	
13							0	0	
14							0	0	
15							0	0	
16							0	0	
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Before I write anything about the next chapter FUNCTIONS, let's start a standard level exercise from December 15, 2010.

Write down a formula that defines the rule of assignment of a function on the set of real numbers, such that the function has an absolute maximum. State the point where the maximum of the function occurs. (3 points out from 100)

If we show the students the "way" of creating the characteristic of a function, it's not enough. Same problem is appeared about right angled triangles.

Ask the students to draw one:

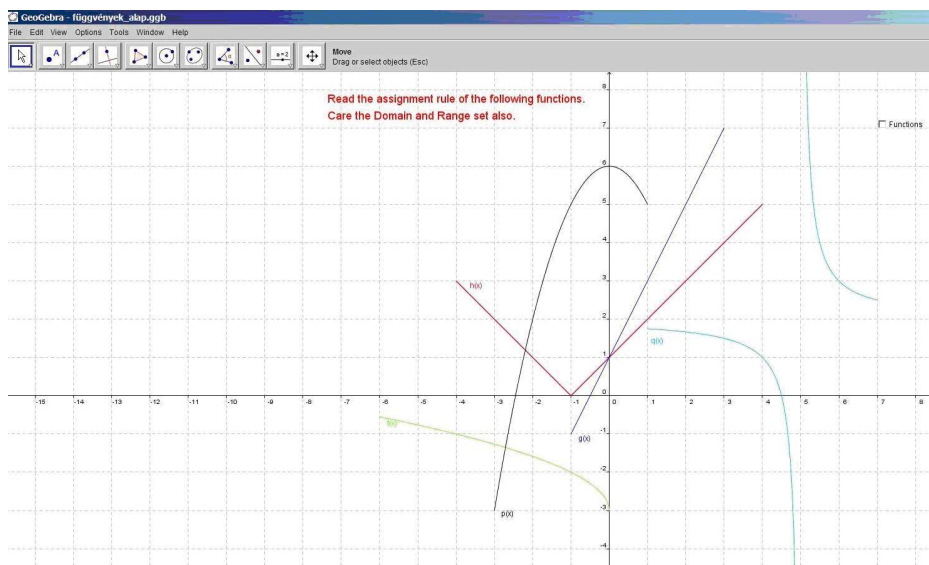


It will be looks like one out of this two. Now ask a student to create an arbitrary triangle:



!!! This is also a right angled one !!!

The conception to realize, to identify the triangles (planar objects: rhombus - rotated square) is one of the biggest problem in normal students. I can prove that the last triangle is also right-angled. They can't see it, while they met only the previous two "face" of triangle. It indicates the way of teaching, Polya's second law: After understanding, then make a plan. Everybody is excepted ton contribute according to his level. Accordingly I not only teach the functions ant their transformations I also make lessons to identify functions.



Another Std level exercise from 5 may 2009:

The graph of the function $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $f(x) = \sin x$ is translated by the vector $\vec{v} = (\frac{\pi}{2}; -3)$ in the Cartesian system yielding the graph of a function $g(x)$. What is the formula of this function? (3 points out of 100)

A function is translated by a vector?!?! I understand a problem, while I'm a math teacher, but in grade 9 the 80% of the pupils have no idea about vectors, so we can't teach this. And in the case of coordinate geometry who is going to back in time (virtually) to grade 9 to parenthesize: that's also a way of transformations of functions, while you have learned the word - translate.

Introduction of concepts

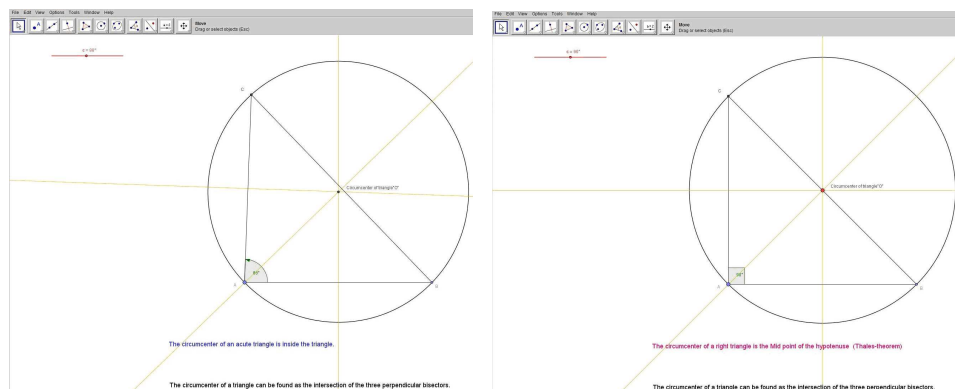
- Deductive way: The student comes from the general to the specific. Before pupils can predict or explain what will or has happened, i.e. why there is a singular verb or why the nail is attracted by the magnet, pupils must have acquired the generalisation which they can link to the specific case. This is often a problem because pupils frequently only come to understand the generalisation from looking at examples.
- Inductive way: Abstraction, i.e. a specific individual comparison of examples, highlighting common features through to get to the generalization. Inductive thinking proceeds from a specific case, or from cases, to the general. This is the opposite of deductive thinking. In inductive thinking the individual makes a number of observations which are then sorted into a concept or generalization; the individual does not have prior knowledge of the abstraction but only arrives at it after observing and analyzing the observations.
- Constructive way: Under certain conditions representative of a particular concept, then generalize the procedure.

GG could be the basic pillar of our "inductive" lessons.

The task of preparing examples to teach a generalization is a bit more complex. Appropriate examples for illustrating a generalization must not only illustrate the concepts contained in the generalization, but must also illustrate the relationships within the concept. Once the examples or illustrations are prepared, the planning phase of inductive activities is complete. The teacher can now begin to implement the activity.

Let's construct the circumscribed circle of a triangle!

Usually, we start first with acute-, right- and obtuse-angled triangle one of each. Construct the perpendicular bisectors of the sides, and we got the centre point of this circle. With the help of GG (with drag able points or using animation) you can represent infinite many drafts, where student can see mathematics in a new light. Here imagination and creativeness combined together.



3. Conclusions

After some self-experience lesson with GG. I could give the students homework about historical problems. (Feuerbach's circle, Golden section, Ptolemy's theorem, Trisecting angle by Tomahawk) They made it. We have to agree on the aim: Enjoy during math lesson, that's the root of all learning process phase.

Much more gbb- file can be reached from my web pages, and also I will send for anyone by mail ...share our resources.

References

- [1] Ambrus András. 2004. *Bevezetés a matematika-didaktikájába*, ELTE Eötvös kiadó, Budapest.
- [2] R. Skemp, 1971. *The Psychology of Learning Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, London.
- [3] G. Polya, 1957. *How to Solve It*, 2nd ed., Princeton University Press.

HISTORICKÉ POZNÁMKY O METÓDACH INTEGROVANIA

Štefan Tkačik

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku

Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok

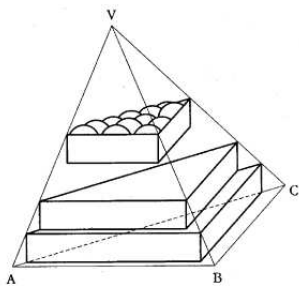
e-mail: stefan.tkacik@ku.sk

Abstract. Making an excursion into the history of integration, from ancient to the present time, we can trace down some principles and methods which essentially contributed to integration theory. Two hypotheses of Demokritos mark the birth of integral and can be related to two different approaches. The first one, connected to such names as Cavalieri and Newton prevails. The second one, based on the exhaustion method invented by Eudoxos has been used by Archimedes and Oresme in their integration attempts. The aim of our article is to show that this second approach leads to an integral equivalent to the Lebesgue integral. It is based on the summation of infinite series and it has some pedagogical advantages. A weaker form of it completely avoids measure theory and it is more simple than the Riemann integral.

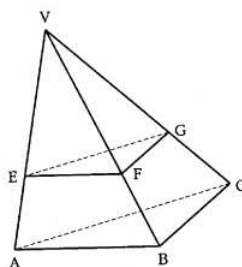
1. Začiatok u Demokrita

Prvotné myšlienky integrálneho počtu môžeme nájsť u antických matematikov, pochádzali z Pythagorových čias a týkali sa otázky: „Kde sa berie ono množstvo jednotiek, ktoré prináleží danej úsečke a jej počet je daný touto úsečkou?“ Najjednoduchšou odpoveďou, ktorej sa pythagorejci pridržali je taká, že daná úsečka týmto množstvom už sama je, že totiž ona sama je zložená z akýchsi ďalej nedeliteľných jednotiek. Potom, ale rôznym úsečkám takto prináležia rôzne množstvá a to, že dve úsečky majú rovnakú dĺžku, znamená iba to, že počet jednotiek v oboch množstvách je rovnaký. Podobne je tomu i v prípade plôch a telies. Práve tento výklad sa netýka len veľkosti geometrických objektov, ale zasahuje aj tieto samotné objekty. Telesá, plochy a krivky si vykladáme ako množstvo určitých jednotiek. Tento Pythagorov výklad javu veľkosti rozvinul jeden z jeho nasledovníkov, a to Demokritos. Prejavil najmenší zmysel pre špekulácie, zato však najväčší pre reálny svet.

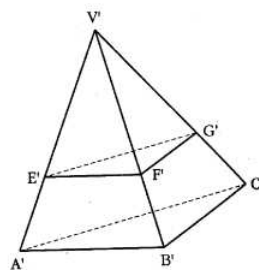
Demokritos rozvinul pythagorejský výklad predovšetkým pre objem, hmotnosť a tvrdosť. Podstata jeho výkladu spočívala v tom, že Pythagorové jednotky zhmotnil. Podľa neho sú reálne objekty zložené z nepatrne malých, ďalej už nedeliteľných čiastočiek, takzvaných atómov. Práve táto myšlienka výraznou mierou ovplyvnila rozvoj výkladu objemu geometrických telies. Môžeme to ilustrovať napríklad na ihlane (obrázok 1). Reálny objekt sa nám javí ako ihlan, v skutočnosti je však zložený z tenkých nepatrných vrstiev, pričom každá z týchto vrstiev je zložená z atómov. Na základe týchto úvah prijali geometri niekoľko hypotéz týkajúcich sa objemu niektorých geometrických telies. Budeme si však všímať len jednu z nich, tzv. prvú Demokritovu hypotézu.



Obrázok 1



Obrázok 2



PRVÁ DEMOKRITOVA HYPOTÉZA: Nech $ABCV$ a $A'B'C'V'$ sú dva trojboké ihlany so zhodnými podstavami (trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$) a výšky nad týmito podstavami sú rovnako veľké. Potom oba tieto ihlany majú rovnaký objem.

Demokritos vychádzal z tvrdenia, že ak dva hranoly, ktorých plošný obsah podstáv je rovnako veľký a majú rovnako veľkú výšku, tak majú rovnaký objem. Demokritos to zdôvodňoval zásadou silnej porovnateľnosti veľkosti geometrických objektov, t.j. nech A, B sú dva objekty základného druhu (napr. hranoly). Nech veľkosť (napr. objem) hranola B je menší ako objem (veľkosť) hranola A . Potom v geometrickom svete sa nachádza hranol C , ktorý je časťou hranola A a jeho objem je rovnaký ako objem hranola B .

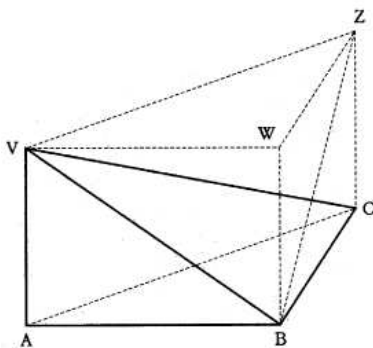
Márna by však bola naša snaha nájsť postup, ktorým by sme za uvedených predpokladov takto premenili ihlan $ABCV$ na ihlan $A'B'C'V'$. Naproti tomu zásada silnej porovnateľnosti platí pre reálne objekty a ihlan takým je, preto túto zásadu môžeme odôvodniť nasledujúcim spôsobom.

Dajme tomu, že oba tieto ihlany sú vytesané z mramoru. Potom atómy, z ktorých sú tieto ihlany zložené, majú podľa Demokrita rovnaký tvar a

veľkosť a sú v týchto ihlanoch rovnako husto rozložené. Postavme tieto ihlany tak, aby ich podstavy ABC a $A'B'C'$ ležali v tej istej rovine. Ak ich pretne rovinou rovnobežnou s rovinou ich podstav (obrázok 2), tak trojuholníky $\triangle EFG$ a $\triangle E'F'G'$, v ktorých táto rovina pretína tieto ihlany, sú zhodné, čo nie je ťažké dokázať (pozri [1]). To znamená, že aj vrstvy atómov prisluchajúce týmto rezom majú rovnaký počet atómov, a keďže tieto ihlany majú rovnakú výšku, majú rovnaký počet vrstiev. V dôsledku toho sa oba tieto ihlany skladajú z rovnakého počtu atómov, a pretože v oboch ihlanoch sú atómy rozložené rovnako husto, majú tieto ihlany rovnaký objem.

Tvrdenie: *Objem trojbokého ihlanu je rovnaký ako objem trojbokého hranolu o tej istej podstave a tretinovej výške.*

Dôkaz. Ak prijmeme prvú Demokritovu hypotézu i pre ideálne geometrické ihlany, môžeme to ľahko dokázať. Majme daný trojboký ihlan $ABCV$ a vytvoríme trojboky hranol $ABCVWZ$ taký, že úsečky AV , BW , CZ sú rovnobežné a rovnako dlhé (obrázok 3). Tento hranol rozložíme na tri trojboké ihlany, a to $ABCV$, $VWZB$, $VCBZ$. Na základe prvej Demokritovej hypotézy dokážeme, že všetky tieto 3 ihlany majú rovnaký objem. Ihlany $ABCV$ a $VWZB$ majú rovnaké objemy, lebo majú rovnako veľké podstavy ABC a VWZ a rovnako veľké výšky nad týmito podstavami.



Obrázok 3

Teraz dokážeme, že ihlany $VWZB$ a $VCBZ$ majú rovnaký objem. Podstavy WZB a CBZ týchto ihlanov sú zhodné a aj výšky týchto ihlanov sú rovnako veľké. Pretože tieto tri ihlany majú rovnaký objem a spolu ich objem sa rovná objemu hranolu $ABCVWZ$, je objem každého z nich, a teda aj ihlanu $ABCV$, rovný jednej tretine objemu tohto hranola, teda objemu hranola o podstave ABC a tretinovej výške.

□

2. Eudoxova exhaustačná metóda

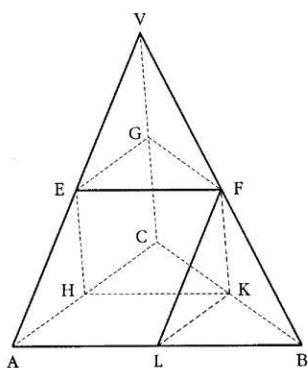
Poznatok o nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca odsunul s konečnou platnosťou veľkosť, ktorá zodpovedala chápaniu pythagorejcov. Bolo to preto, lebo tento poznatok znamenal, že mohutnosti (prírodné čísla) nie sú dostatočne bohaté na to, aby sa pomocou nich dali vyjadriť najrôznejšie podoby javu veľkosti. V dôsledku toho sa museli matematici poobzerať po inej podobe javu veľkosti. Tomu, ktorému sa podarilo stanoviť hlavnú zásadu pre ďalší rozvoj výkladu javu veľkosti bol Eudoxos. Ako si máme počínať, predviedol Eudoxos v dvanástej knihe [2] na príklade obsahov rovinných plôch útvarov a objemov telies. To čo si začal uvedomovať bolo vypracovanie vhodného modelu pre výklad plôch a telies. Uvedomil si, že veľkosti úsečiek nebudeme hľadať medzi plošnými obsahmi, ani objemami priamo, ale prostredníctvom obsahov štvorcov (plocha štvorca je jednoznačne určená dĺžkou strany a naopak), poprípade objemov kociek. Dali sa použiť aj iné výklady napríklad miesto štvorcov vezmeme iný plošný útvar (trojuholník, kruh, ...), podobne miesto kociek (guľa, ihlan, ...). Na nasledujúcom príklade ilustrujeme ako Eudoxos rozšíril vzájomnú dosažiteľnosť plošných obsahov.

Tvrdenie: *Nech u, v sú plošné obsahy ľubovoľných rovinných plôch, resp. objemy ľubovoľných telies, pričom veličina v je menšia ako veličina u . Ak budeme veličinu v opakovane zväčšovať o v , tak po konečnom počte krokov bude veľkosť tejto veličiny väčšia ako u .*

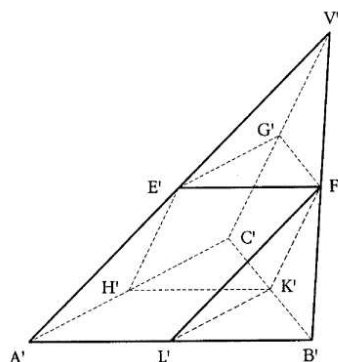
Dôkaz. Nech A, B sú rovinné plochy také, že plošný obsah plochy A je u a plošný obsah plochy B je v . Nech C je štvorec, vnútri ktorého leží plocha A a D je štvorec, ktorý leží vnútri plochy B . Plošný obsah štvorca C je teda väčší ako u a plošný obsah štvorca D je menší ako v . Nech k je číslo udávajúce počet predlžovania strany štvorca D stále o jeho dĺžku, ktorý je potrebný k prekročeniu dĺžky strany štvorca C . Po k^2 -krát zväčšení plošného obsahu štvorca D , obdržíme veličinu väčšiu, ako je plošný obsah štvorca C , lebo k^2 štvorcov zhodných so štvorcom D je možné pokryť štvorec C . Avšak k^2 -krát veličina v je väčšia ako k^2 -krát plošný obsah štvorca D , čo je väčšie ako plošný obsah štvorca C , a ten je opäť väčší ako veličina u . □

Práve tento postup položil základy exhaustačnej metódy, pomocou ktorej ako nepriamo naznačujú zachované pramene, bola dokázaná prvá Demokritova hypotéza. Tento postup sa dá preformulovať na dnes známu **Archimedovu vlastnosť reálnych čísel** alebo Archimedov princíp:

Ku každému kladnému reálnemu číslu u a každému číslu v existuje také prírodné číslo n , že $v > nu$. (1)

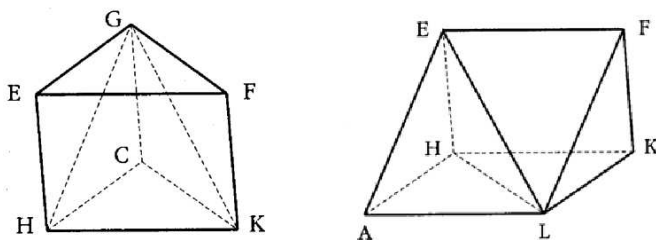


Obrázok 4



Obrázok 5

Eudoxov dôkaz prvej Demokritovej hypotézy. Nech $ABCV$, $A'B'C'V'$ sú také dva ihlany, že ich podstavy sú navzájom zhodné trojuholníky ABC , $A'B'C'$ a výšky týchto ihlanov sú rovnako veľké. Rozložíme ihlan $ABCV$ na dva navzájom zhodné ihlany $EFGV$, $LBKF$ a dva hranoly $HKCEFG$, $LKFAHE$ tak, ako je to nakreslené na obrázku 4, kde body E, F, G, H, K, L sú stredy príslušných hrán. Z obrázkov 4 a 6 je vidieť, že ihlan $EFGV$ má menší objem ako každý z týchto hranolov, teda oba tieto hranoly majú dohromady objem väčší, ako je polovica objemu ihlanu $ABCV$. Rozložme tiež ihlan $A'B'C'V'$ podobným spôsobom (obrázok 5). Pretože hranoly $HKCEFG$ a $H'K'C'E'F'G'$ majú rovnaký plošný obsah podstáv a rovna-



Obrázok 6

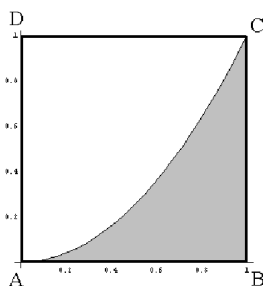
kú výšku, majú rovnaký objem. Podobne je tomu aj s druhými dvoma hranolmi. Nech teda ihlany $ABCV$, $A'B'C'V'$ nemajú rovnaký objem a nech napríklad ihlan $ABCV$ má objem väčší ako ihlan $A'B'C'V'$. Nech u je objem, o ktorý je objem ihlanu $ABCV$ väčší ako objem ihlanu $A'B'C'V'$. Odoberme z ihlanu $ABCV$ oba uvedené hranoly a vezmeme dva zostávajúce ihlany. Objem týchto zostávajúcich ihlanov je dohromady menší ako polovica objemu ihlanu $ABCV$, lebo viac ako polovicu objemu tohto telesa sme odobrali. Z každého zostávajúceho ihlanu odoberieme opäť podobné

hranoly. Ostanú štyri malé ihlany podobné pôvodným, a z každého z nich odoberieme podobne hranoly ako v predchádzajúcom kroku. To isté zopakujeme s ihlanmi, ktoré ostanú, atď. To robíme tak dlho pokiaľ neostanú ihlany, ktorých objem je dohromady menší ako objem u . V tomto okamihu sme z ihlanu $ABCV$ odobrali hranoly, ktorých objem je dokopy väčší ako objem ihlanu $A'B'C'V'$. Koľkokrát sme odobrali hranoly z ihlanu $ABCV$, toľkokrát ich teraz odoberieme aj z ihlanu $A'B'C'V'$, v každom kroku sme odobrali hranoly s rovnakým objemom. To ale znamená, že v každom kroku odoberáme z ihlanu $A'B'C'V'$ rovnaký objem, ako sme odobrali z ihlanu $ABCV$. Nakoniec odoberieme z ihlanu $A'B'C'V'$ hranoly, ktorých objem je spolu rovnaký ako objem všetkých hranolov odobraných z ihlanu $ABCV$, teda väčší ako objem ihlanu $A'B'C'V'$. To však je spor, lebo z ihlanu $A'B'C'V'$ nemôžu byť odobrané telesá s väčším objemom, ako je objem tohto ihlanu. $\square$

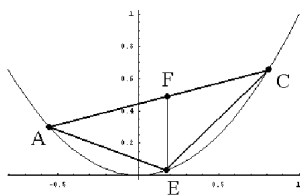
Tento postup bol predchodcom metódy, ktorú môžeme označiť ako počiatok integrálneho počtu, a to je Archimedova kvadratura paraboly. Archimedes počítal veľkosť plochy pod parabolou dvoma metódami. Po viacerých storočiach ich zanedbávania sa matematici vrátili hlavne k tej prvej. Postupný rozvoj myšlienok obsiahnutých v tejto metóde viedol napokon k pojmu Riemannovho integrálu a prostredníctvom neho neskôr k modernému pojmu Lebesgueovho integrálu. Ale práve pri druhej využil exhaustačnú metódu a práve táto metóda môže sprehľadniť výstavbu a výučbu Lebesgueovho integrálu až natoľko, aby pri porovnaní s ním sa Riemannov integrál javil ako ťažkopádny muzeálny exponát [3].

3. Počiatky integrálneho počtu u Archimeda

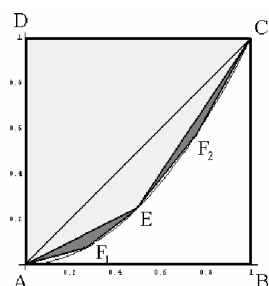
Archimedes použitím exhaustačnej metódy vypočítal veľkosť plochy ohraňenej parabolou $y = x^2$ a x -ovou osou od 0 po 1 (vyšrafovaná plocha na obrázku 7).



Obrázok 7



Obrázok 8



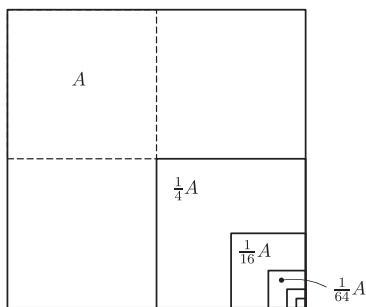
Obrázok 9

Je zrejmé, že súradnicový systém bol Archimedovi úplne neznámy, my ho používame pre lepšiu predstavu a exaktnosť dôkazu. Archimedes si všimol vlastnosť trojuholníka, ktorého vrcholy patria parabole.

Ak A, C sú ľubovoľné body paraboly a bod E je bodom paraboly pričom veľkosť jeho x -ovej súradnice je aritmetickým priemerom veľkosti x -ových súradníc bodov A a C (obrázok 8), tak obsah trojuholníka ACE je $\left(\frac{x_C - x_A}{2}\right)^2$ (pozri [4]). Označme obsah $\triangle ACE$ ako $\mu(\triangle ACE)$ a zostrojme ďalšie tetivové trojuholníky $\triangle AF_1E$, $\triangle AF_2C$, ... (obrázok 9). Ľahko dôjdeme k záveru, že súčet plôch týchto trojuholníkov sa rovná $\mu(\triangle ACE) + \frac{1}{4}\mu(\triangle ACE) + \frac{1}{4^2}\mu(\triangle ACE) + \dots$

Teraz je potrebné vypočítať tento súčet. Dnes by to nebol problém vzhľadom k tomu, že ide o geometrický rad. Tento vzorec na výpočet súčtu geometrického radu, však Archimedes neovládal, preto vymyslel na výpočet geniálny spôsob, ktorý je ilustrovaný na obrázku 10. Máme štvorec rozdelený na 4 rovnaké štvorce, pričom obsah plochy troch z nich sa rovná A , teda obsah celého $\frac{4}{3}A$. Z pôvodného štvorca odstránime jeden roh. Odstránený roh je štvorec, ktorého strana je polovica strany pôvodného štvorca, preto jeho obsah je $\frac{1}{4}$ obsahu plochy pôvodného štvorca. To isté opakujeme s odstránením menšieho štvorca, a tak ďalej. Obsah plochy každého útvaru v tvare L je $\frac{1}{4}$ plochy pôvodného útvaru, preto

$$A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \frac{1}{4^3}A + \dots = \frac{4}{3}A.$$



Obrázok 10

Doslovne by sme teda mohli povedať, že plošný obsah úseku paraboly určenej tetivou sa rovná obsahu plochy trojuholníka určeného touto tetivou. Archimedov prínos v použití tejto metódy je vlastne nájdenie dôležitej vlastnosti reálnych čísel dnes známej ako Archimedova vlastnosť reálnych čísel. V jeho dobe neexistovala konštrukcia reálnych čísel ako ju poznáme dnes. Reálne čísla dnes používame na meranie všetkých častí kvantít v primera-

ných jednotkách a operácie s nimi berieme ako samozrejmosť. Archimedes dokázal, že $\frac{4}{3}A$ je najmenšie číslo zo všetkých čísel, pre ktoré platí

$$A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \frac{1}{4^3}A + \dots + \frac{1}{4^n}A < \frac{4}{3}A, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Práve k tomu potreboval už zmienenú vlastnosť (1), ktorú môžeme zapísať v tvare

Pre každé číslo $\varepsilon > 0$ a každé K existuje prirodzené číslo n také, že $\frac{1}{n}K < \varepsilon$.

Tvrdenie: $\frac{4}{3}A = \sup\{A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \frac{1}{4^3}A + \cdots + \frac{1}{4^n}A, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Dôkaz. Archimedes dôkaz tohto tvrdenia urobil sporom (viď [5]). Ak by číslo B ($A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \frac{1}{4^3}A + \cdots + \frac{1}{4^n}A < B$) bolo menšie ako $\frac{4}{3}A$ a podmienka (2) by platila pre každé $n = 0, 1, 2, \dots$, tak vezmeme $\varepsilon = \frac{4}{3}A - B$ a $K = \frac{1}{3}A$. Ak $\varepsilon > 0$, tak podľa Archimedovej vlastnosti musí existovať prirodzené číslo n , pre ktoré platí $\frac{1}{n}K < \varepsilon$. Pretože platí $n < 4^n$, tak

$$\frac{1}{3} \frac{1}{4^n} A = \frac{1}{4^n} K < \frac{1}{n} K < \varepsilon = \frac{4}{3} A - B.$$

Archimedes na základe konštrukcie štvorca (obrázok 10) tvrdil

$$A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \cdots + \frac{1}{4^n}A + \frac{1}{3} \frac{1}{4^n}A = \frac{4}{3}A, n = 1, 2, 3, \dots$$

Z toho však dostane spor

$$\frac{4}{3}A = A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \cdots + \frac{1}{4^n}A + \frac{1}{3} \frac{1}{4^n}A < B + \frac{1}{3} \frac{1}{4^n}A < \frac{4}{3}A.$$

□

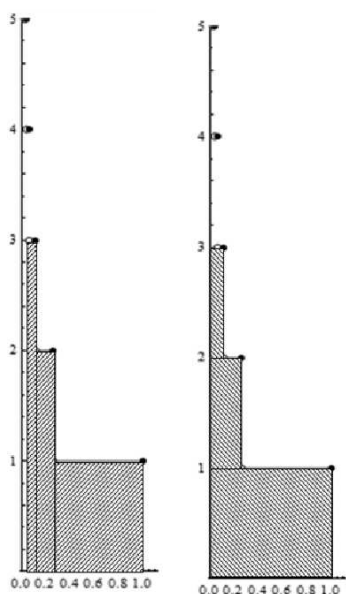
Týmto Archimedova metóda položila základ pre definovanie súčtu postupnosti čísel bez použitia limit. Túto vlastnosť môžeme použiť pri definícii integrálu. Táto definícia oproti „štandardnej“ má výhodu, že nepoužíva limity, je jednoduchšia a všeobecnejšia.

4. Spôsob zavedenia Lebegueovho integrálu

Metódy výpočtov plôch a objemom, ktoré zaviedol Archimedes sú oprávnené považované za východiskový bod vzniku a rozvoja integrálneho počtu. Táto druhá Archimedova metóda ostala nevyužitá a nerozvinutá a len sporadicky našla občas využitie. Jedným z mála, ktorý túto metódu využil bol Nicole d'Oresme, ktorý podobnou metódou ukázal, že

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots = 2.$$

Tento súčet bol v časoch Oresmeho známy, ale on využil geometrickú metódu, ktorá môže byť základom pre definíciu integrálu. Postup vychádzal z toho, že rozdelil tú istú rovinnú oblasť do obdĺžnikov dvoma spôsobmi (obrázok 11).



Obrázok 11

Každý obdĺžnik na obrázku 11 vľavo má základňu dĺžky $\frac{1}{2^n}$ a výšku n , preto plocha každého z obdĺžnikov, označme ako A_n a obsah $\mu(A_n) = \frac{n}{2^n}$. Každý obdĺžnik, označme ho B_n (obrázok 11 vpravo), má základňu dĺžky

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \cdots = \frac{1}{2^n}.$$

Z tohto vyplýva

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots = \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots = 2 \end{aligned}$$

Archimedova metóda aj metóda Oresmeho je založená na vlastnosti plochy, ktorá sa nazýva σ -aditívnosť, t.j. ak rovinná oblasť S sa rovná zjednoteniu rovinných oblastí $A_1, A_2, A_3, \dots$, pričom spoločná časť ľubovoľných dvoch z nich má plochu o veľkosti 0, tak veľkosť plochy S sa rovná súčtu veľkosti plôch $A_1, A_2, A_3, \dots$. Archimedove a Oresmeho výpočty ukazujú, že tieto vlastnosti môžeme využiť na určenie plôch rovinných oblastí a tiež na výpočet súčtu členov postupnosti. Ak interpretujeme integrál nezápornej funkcie ako plochu pod týmto grafom, tak môžeme túto vlastnosť využiť na konštrukciu integrálov. Archimedov trik s trojuholníkmi nahradíme obdĺžnikmi a preložíme tieto geometrické idey do jazyka matematickej analýzy.

Nech dĺžka ohraničeného intervalu I je daná absolútnou hodnotou rozdielu súradníc jeho koncových bodov, označme ju $\lambda(I)$. Charakteristickú funkciu intervalu I , označme χ_I , teda

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$$

Nech c je nezáporné číslo a I je ohraničený interval, potom „plocha pod grafom“ funkcie $c\chi_I$ je obdĺžnik, ktorého základňou je strana dĺžky $\lambda(I)$ a výška je strana dĺžky c . Veľkosť plochy tohto obdĺžnika je $c\lambda(I)$. Na základe tohto môžeme definovať integrál.

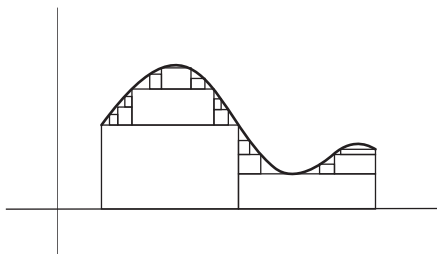
Definícia 1. Funkciu $f \geq 0$ definovanú na intervale I budeme nazývať *Oresmeho integrovateľnou*, ak existujú nezáporné reálne čísla c_i a intervaly $I_i \subseteq I, i = 1, 2, \dots$ také, že platí nasledujúca podmienka:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{I_i}(x) \quad \text{pre každé } x \in I. \quad (3)$$

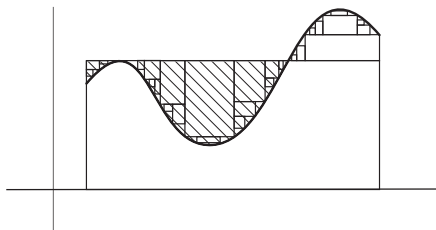
Oresmeho integrál na intervale I je definovaný

$$\int_I f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i). \quad (O)$$

To však bude platiť len pre nezáporné ohraničené funkcie (obrázok 12). Drobnou úpravou v definícii môžeme zahrnúť niektoré neohraničené funkcie a tiež, že interval I , ktorý je neohraničený.



Obrázok 12



Obrázok 13

A okrem toho nemusí byť ľahké, resp. možné, pokryť „plochu pod grafom“ obdĺžnikmi bez toho, aby sme pokryli niekoľko bodov mimo tohto regiónu. Keď pokrývame plochu pod grafom funkcie, nemusíme to striktné len obdĺžnikmi z tohto regiónu. Ak sa tam vyskytne nejaký obdĺžnik, ktorý nepatrí do danej rovinnej oblasti (na obrázku 13 sú vyšrafované), tak veľkosť jeho plochy odpočítame. V tomto prípade pre jednoznačnosť súčtu budeme vyžadovať absolútnu konvergenciu súčtu obsahov plôch daných obdĺžnikov, teda $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \lambda(I_i) < \infty$, ale tiež jednoznačnosť definovania funkcie f , teda $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \chi_{I_i}(x) < \infty$. Takto dostaneme definíciu integrálu všeobecnejšiu a absolútna konvergencia nám dovoľuje rozšíriť definíciu aj na záporné funkcie.

Definícia 2. Funkciu f definovanú na intervale I budeme nazývať *Kluvánkovsky integrovateľnou*, ak existujú reálne čísla c_i a také intervaly $I_i \subseteq I, i = 1, 2, \dots$, že platia nasledujúce podmienky:

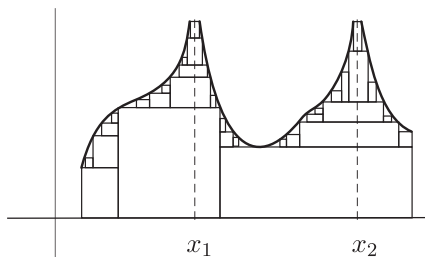
$$1^* \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{I_i}(x) \quad \text{pre každé } x \in I,$$

$$2^* \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \chi_{I_i}(x) < \infty \text{ pre každé } x \in I,$$

$$3^* \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \lambda(I_i) < \infty.$$

Klúvankov integrál na intervale I je definovaný

$$\int_I f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i). \quad (\text{K})$$



Obrázok 14

Aj táto definícia sa dá rozšíriť o funkcie, ktoré sú na intervale I v niektorých bodoch neohraničené, resp. nedefinované (obrázok 14, body x_1, x_2). V definícii 2 zmeníme podmienku 1, pričom rovnosť nastane len v bodoch, ktorých $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \chi_{I_i} < \infty$.

Definícia 3. Funkciu f definovanú na intervale I budeme nazývať *Archimedovsky integrovateľnou*, ak existujú reálne čísla c_i a také intervaly $I_i \subseteq I, i = 1, 2, \dots$, že platia nasledujúce podmienky:

$$1^* f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{I_i}(x) \text{ v bodoch } x \in I, \text{ v ktorých } \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \chi_{I_i}(x) < \infty,$$

$$2^* \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \lambda(I_i) < \infty.$$

Archimedov integrál na intervale I je definovaný

$$\int_I f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(I_i). \quad (\text{A})$$

Nasledujúcou otázkou je vzťah Archimedovho integrálu k iným pojmom integrovateľnosti a integrálu uvedeným v literatúre. Dá sa ukázať, že funkcia je Archimedovsky integrovateľnou vtedy a len vtedy, keď je Lebesgueovsky integrovateľná a Archimedov integrál sa zhoduje s Lebesgueovým. Takto definovaný integrál pokrýva triedu Lebesgueovsky integrovateľných funkcií. Pojmy Oresmov integrál, Klúvankov integrál a

Archimedov integrál boli použité len pre výstavbu Lebesgueovho integrálu a nejde o zavedenie nového typu integrálu.

Tento model výstavby integrálu je prirodzený a jednoduchý. Archimedova definícia integrálu, podľa názoru prof. Igora Kluvánka, je v úvodnom kurze matematickej analýzy vhodnejšia a jednoduchšia ako Riemannov integrál a vedie k dôležitým aplikáciám. Toto je zrejmé, v menšej miere v prípadoch, keď aplikácia si vyžaduje integrovanie partikulárnej funkcie. V takých prípadoch Archimedov (vlastne Lebesgueov) integrál predstavuje výhodu už aj preto, že obmedzenia týkajúce sa výpočtových metód sú slabšie. Ale skutočná výhoda Archimedovho integrálu sa viac prejavuje v prípadoch, keď ide o celé triedy funkcií. Pretože systémy funkcií definovaných v pojmoch Archimedovho integrálu sú zvyčajne značne bohatšie ako tie, ktoré sú definované v pojmoch Riemannovho integrálu. Tam sa práve objavujú dôležité problémy v matematike a v jej aplikáciách, ktoré nie sú riešiteľné pomocou Riemannovho integrálu, ale mohli by sme ich vyriešiť ak použijeme Archimedov/Lebesgueov integrál.

Myšlienky týkajúce sa tried funkcií (alebo tried geometrických objektov takých ako planárne obrázky) presahujú hranice okruhu myšlienok prístupných Archimedovi. Ale aj napriek tomu mu vďačíme za ideu a metódy, ktoré boli využité pri rozvoji integrálneho počtu.

Poznámka

Článok vznikol s podporou grantu KEGA č. 168-010KU-4/2010.

Literatúra

- [1] Vopěnka, P.: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Práh, Praha 2001, druhé vydanie.
- [2] Eukleides: *Základy*. O.P.S., 2007, 151 s.
- [3] Kluvánek, I.: *Archimedes mal pravdu*. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, preložil, č. 4/2010, s. 7 - 19.
- [4] Tkačík Š.: *Grécka matematika II*. Disputationes Scientifcae, Ružomberok, 2005, ročník V, číslo 3, s. 69 - 82.
- [5] Heath, T.L.: *The Works of Archimedes in Modern Notation with introductory chapters*. The Cambridge University Press, Cambridge, 1912.

GEOGEBRA NA 2. STUPNI ZŠ

Erika Tomková

*ZŠ Malinovského
Malinovského 1160/31, Partizánske
e-mail: erika.tomkova@gmail.com*

Abstract. Cieľom príspevku je ukázať niektoré možnosti využitia informačno-komunikačných technológií a softvéru GeoGebra vo vyučovaní matematiky na základnej škole. Príspevok obsahuje metodický list pre učiteľa využívajúci program GeoGebra pri výučbe geometrie. V práci sú uvedené prepojenia na videosekvencie zverejnené v priestore Windows Live s návodmi pre prácu v programe GeoGebra. [10] V závere je zhodnotený prínos GeoGebry k skvalitneniu vyučovania geometrie na základnej škole. V prílohe práce je k dispozícii niekoľko pracovných listov pre žiakov a zoznam videosekvencií.

1. Úvod

Pre súčasné slovenské školstvo sú typické snahy o modernizáciu vyučovania, okrem iného aj za pomoci IKT. Informačné technológie prinášajú do pedagogickej praxe mnoho nových a užitočných prvkov. Treba však dbať na to, aby boli použité rozumne a efektívne.

Internet je neobmedzeným zdrojom informácií, ku ktorým sa môže dostať ktokoľvek, kedykoľvek a kdekoľvek na svete. Pravdaže - za predpokladu existencie pripojenia k internetu. Ak učiteľ dokáže tento mohutný prúd informácií regulovať a usmerňovať, vytvorí tak pre žiakov vhodné podmienky na samostatné štúdium.

"Pedagogický softvér (PS) je softvér špeciálne vyvinutý na podporu učenia sa, poznávania a na rozvoj informačnej gramotnosti. Existuje niekoľko kritérií, ktoré by mal dobrý PS spĺňať. Mal by mať didaktický cieľ. PS by mal rozvíjať informačnú gramotnosť a informatickú kultúru." [7] PS by mal mať formu hry, čo zvyšuje motiváciu a chuť učiť sa. Človek sa najlepšie učí pozorovaním, skúšaním, preto by mal byť PS interaktívny, mal by využívať multimédiá a vizualizáciu. Mal by poskytovať spätnú väzbu, prípadne by mal ilustrovať stav výpočtu, spôsob výpočtu, výsledky práce, neskôr vyhodnotiť riešenie, ilustrovať chyby, ktorých sa používateľ vo výpočte dopustil.

Ak PS chváli, mierne napomína pri chybe alebo v prípade potreby pomáha, je to motivácia pre ďalšiu prácu. Vlastnosti, ktoré by tiež dobrý PS mal mať, sú otvorenosť, možnosť aktualizovať a dopĺňať údaje (nové informácie, údaje, príklady, úlohy...) a prispôsobovanie sa potrebám používateľa.

Cez letné prázdniny v roku 2009 sa účastníci Letnej školy Pytagoras v Hronci mali možnosť zoznámiť s pedagogickým softvérom GeoGebra. Už prvý kontakt s týmto programom bol veľmi inšpirujúci. Jedným z hlavných dôvodov bol ten, že je dostupný zdarma. Jeho jediné obmedzenie je nepoužívať ho na komerčné účely. A vzhľadom k tomu, že škola komerčnou inštitúciou nie je, je tento softvér ideálny pre vzdelávanie.

Hlavným cieľom práce je ukázať možnosti, ako vhodne využiť IKT a internet na hodinách matematiky. Je to aj akési hľadanie odpovedí na otázku, ako sa dá internet a IKT aplikovať na školách na Slovensku. Súčasne chceme prostredníctvom práce poskytnúť učiteľovi pomôcku pre výučbu niektorých kapitol z geometrie na 2. stupni základnej školy.

2. Metodický list v GeoGebre

Učiteľ vo svojej práci často experimentuje. Niekedy sú jeho experimenty tak vydarené, že je škoda neodporúčať ich ďalej kolegom. Najvýhodnejšia forma je vytvorenie metodického listu. Všeobecných popisov metodických listov sa nachádza na internete a v knihách veľmi veľa. Ale pre učiteľa sú tieto metodické listy nevyužiteľné, vôbec mu nepomáhajú. Oveľa väčším prínosom pre neho sú metodické listy, ktoré popisujú použitie konkrétnej metódy, v konkrétnej situácii, pri preberaní konkrétnej témy.

Každý metodický list má svoju štruktúru, pri ktorej sa nemá zabudnúť na: Názov témy, Ciele výučby, Cieľová skupina, Metodika modelovej hodiny, Prehľad použitých metód a pod. Štruktúru metodického listu je možné meniť. My v tejto práci používame štruktúru metodického listu uvedenú v Didaktike predmetu Informatika 1. [5]

V tejto časti uvedieme jeden metodický list pre učiteľov na prácu s využitím programu GeoGebra: **Rysovanie v GeoGebre.**

Názov témy:
Rysovanie v GeoGebre - Tvorba prvého výkresu v programe GeoGebra
Ciele výučby v rámci modelovej hodiny/hodín:
• pomocou pracovného listu vytvoriť svoj prvý výkres v prostredí programu GeoGebra podľa zadaného obrázku, • aplikovať postupnosť a poradie krokov vedúcich k tvorbe výkresu,

- argumentácia pozitív a negatív použitia konkrétneho riešenia - s dôrazom na rozdiely medzi statickými výkresmi (na papieri alebo v niektorom z kresliacich programov; napr. Skicár, LogoMotion, Zoner Calisto, Inkscape) a dynamickými výkresmi vytvorenými v programe GeoGebra,
- vedieť pomenovávať (resp. premenovať) narysované objekty, meniť ich vzhľad - farbu, hrúbku a štýl čiar, bodov, uhlov, aj iných objektov,
- naučiť žiakov vedieť rozhodnúť, kedy a aký nástroj zvoliť pre najvhodnejšie narysovanie objektov na výkrese,
- naučiť chápať vzájomné vzťahy - viazanosť (väzbu) objektov na výkrese,
- vedieť rozoznávať základné nástroje v prostredí programu GeoGebra a aktívne ich vedieť používať.

Rámcové umiestnenie modelovej hodiny/hodín:

Predmet Matematika (Informatika), 2 vyučovacie hodiny

Cieľová skupina:

Základná škola, 5. ročník, (6. ročník, 7. ročník, 8. ročník, 9. ročník)

Základná štruktúra modelovej hodiny/hodín:

- Administrácia hodiny (2 - 3 min)
- Výklad učiva (čo je dynamický výkres) a diskusia so žiakmi o význame využitia dynamických výkresov (8-10 min.)
- Spustenie programu GeoGebra (1-2 min) - podľa toho, ako sme program nainštalovali; buď cez ŠTART / PROGRAMY / GEOGEBRA alebo z panelu rýchleho spustenia
- Diskusia - obsah, forma, základné prvky tvorby výkresov v programe GeoGebra, (10-15 min)
- Prezentácia tvorby jednoduchého výkresu v GeoGebre (5-10 min)
- Vlastná tvorba výkresov - úsečky (5 min)
- Vlastná tvorba výkresov - ostatné prvky podľa obrázka (20-25 min)
- Ukážky prác žiakov s vytvorenými dynamickými výkresmi (10-15 min)
- Zhrnutie a záver (3-5 min).

Výklad témy:

Pri rysovaní geometrických útvarov na papier má mnoho žiakov problémy s presnosťou, predstavivosťou a snáď aj s časom, ktorý majú k dispozícii na úlohu. V prostredí programu GeoGebra s presnosťou nebude mať problém ani jeden žiak. Veľakrát sa tiež stáva, že žiaci potrebujú pri klasickej konštrukcii narysované objekty gumovať, čím sa výkres znehodnocuje. V programe GeoGebra je tento problém ošetrený možnosťou vymazania nesprávne alebo chybné narysovaných objektov.

Prednosťou vytvorenia dynamického výkresu je, že žiaci sa sami vizuálne presvedčia o správnosti narysovaných prvkov. Teda či sú dodržané vzájomné vzťahy medzi prvkami výkresu.

Študijný materiál pre študentov: Pracovný list č. 1 *Rysovanie v GeoGebre* ([WEB](#))

Videosekvencie:

[Videosekvencia o práci s nákresňou v GeoGebre](#)

[Videosekvencia o kreslení v GeoGebre](#)

[Videosekvencia o vymazávaní v GeoGebre](#)

[Videosekvencia o pohybe v GeoGebre](#)

Metodika modelovej hodiny/hodín:

Ako najvhodnejšiu formu odporúčame zvoliť osvedčenú kooperatívnu prácu vo dvojiciach v učebni IKT. So žiakmi najskôr prediskutujeme problém rysovania zo všetkých jeho aspektov - presnosť, zastrúhané ceruzky, mäkkosť respektíve tvrdosť ceruziek, vyštrbené pravítka, tlak pri rysovaní, gumovanie. . .

Nasleduje prezentácia o práci s programom GeoGebra. Program už musí byť nainštalovaný na všetkých počítačoch v učebni. Na začiatku sa oboznámime s jeho prostredím a spolu si zvolíme základné nastavenia. V hlavnom menu Nastavenia pomocou tlačidla Uložiť nastavenia si všetky nami zvolené nastavenia (Zaokrúhľovanie, Štýl bodu, Štýl pravého uhla, Veľkosť písma, Nákrešňa. . .) zapamätáme pre ďalšie použitie. Poznatky i zručnosti - práca s nákresňou, rysovaním objektov a s ich vlastnosťami, vymazávanie nesprávne narysovaných objektov - na toto všetko využijeme prezentáciu hotových videosekvencií cez projektor. Alebo videosekvencie prehrávame a zobrazujeme programom na prenos obrazovky (napr. SmartClass). Po tejto prezentácii žiaci rysujú podľa Pracovný list č. 1 *Rysovanie v GeoGebre* ([WEB](#)), alebo si môžu sami znovu prehrávať videosekvencie. [10]

Ak sú s výkresom hotoví, môžeme im zadávať rôzne úlohy pre tento výkres, ako napr.:

- Zobrazte pri úsečkách, ktoré sú stranami trojuholníka ABC , namiesto ich pomenovaní a , b , c ich hodnoty.
- Pohybujte vrcholmi trojuholníka tak, aby vzniknutý trojuholník bol tupouhlý (pravouhlý, ostrouhlý).
- Pokúste sa narysovaný uhol HJH' premiestniť tak, aby sa kryl s uhlom BAC . Čo musíte spraviť, aby sa vám to podarilo?
- Narysujte polomer kružnice k , pomenujte ho r , zobrazte jeho dĺžku aj popis, nastavte mu tmavomodrú farbu, hrúbku čiary dajte 7. Potom zmeňte polomer tejto kružnice na dĺžku 5cm.

- Narysujte 6-uholník (nastavte mu červenú farbu a výplň nastavte na 30 %). Narysujte aj pravidelný 6-uholník (nastavte mu modrú farbu a výplň dajte na 30 %). Porozmýšľajte a skúste vysvetliť, aký je medzi týmito dvomi objektmi rozdiel. Použite na to polohu pohybu v programe. Ktorými vrcholmi môžeme pohybovať v pravidelnom 6-uholníku?

Na záver si frontálne zopakujeme nové poznatky pri práci s GeoGebrou, ktoré sme sa dozvedeli a žiaci si postup zaznačia.

Prehľad použitých aktivizujúcich metód:

Diskusia - riadená forma komunikácie učiteľa a žiakov, pri ktorej sa vzájomne vymieňajú názory na danú tému. Na základe svojich skúseností a vedomostí uvádzame argumenty. Cieľom je vzbudiť záujem žiakov o potrebu vytvorenia dynamického výkresu - aby tak lepšie pochopili vzájomné väzby medzi narysovanými objektmi výkresu.

Expozičná metóda - demonštrácia - prvotné oboznámenie žiakov s učivom formou vopred pripravenej ukážky práce v programe GeoGebra.

Aplikačná metóda - tvorba výkresu - využitie získaných poznatkov pri riešení konkrétnej úlohy.

Heuristická metóda - žiaci sami bádajú a objavujú prácu s nástrojmi v prostredí programu GeoGebra.

Pomôcky potrebné k príprave a realizácii modelovej hodiny

Počítače s pripojením na internet a nainštalovaným programom GeoGebra, projektor (respektíve nainštalovaný program na prenos obrazovky - Smart-Class alebo iný), pracovný list publikovaný na webovej stránke školy. http://www.zsmalinovpart.edu.sk/EduPage/INFORMATIKA/PL_ZIAK_GEO_rysovanie.docx

Alternatívne riešenie modelovej hodiny/hodín:

Alternatívou pri vyššej časovej dotácii je tvorba náročnejších výkresov. Napríklad výkres s posuvníkmi, na ktoré by sa viazali dĺžky strán trojuholníka, polomerov kružníc, začiarovacích políčkami na zobrazenie objektov. Je to ale úvodná modelová hodina, preto žiakom umožníme, aby sa "pohrali" s programom, nech sami nakreslia výkres podľa svojich predstáv - či už farebne alebo aj použitím náročnejších ovládacích prvkov programu. Niektorí šikovní žiaci istotne zvládnu narysovať aj 3D modely kociek, kvádrov a iných telies, pochopia problematiku vektorov. A to aj napriek tomu, že na základnej škole sa tento pojem v matematike nespomína. Pre takýchto šikovnejších žiakov je vhodné vytvoriť v škole krúžky.

Úskalia modelovej hodiny/hodín:

Pri zavádzaní programu GeoGebra do výučby matematiky za hlavné úskalie pokladám nedostatočný počet počítačov na niektorých školách. Je veľmi dob-

ré, keď pri jednom počítači pracujú najviac dvaja žiaci. Najvhodnejšie je, keď úlohu rieši pri PC jeden žiak. Avšak takýto model je možný len na máloktorej škole. Iné problémy pri zavádzaní GeoGebry snáď ani nie sú.

Ukončenie hodiny a spätná väzba:

Záver hodiny je potrebné venovať prehliadke hotových výkresov s uvedením autorov výkresov a dátumom vytvorenia na samotnom výkrese. Vyriešenie úloh z pracovného listu je spätnou väzbou pre učiteľa. Na záver odporúčam, aby žiaci zopakovali metódy rysovania základných prvkov v GeoGebre. Mala by nasledovať aj diskusia o výhodách rysovania v prostredí GeoGebry.

Autor modelovej hodiny:

RNDr. Erika Tomková, Základná škola, Malinovského 1151/60,
erika.tomkova@gmail.com

Dátum, príp. číslo verzie metodického listu:

10. 5. 2010, verzia 1

Krátke zhrnutie skúseností s realizáciou:

V prostredí programu GeoGebra pracujem približne desať mesiacov. Tento školský rok som začala realizovať výučbu s využitím GeoGebry. Základy práce nerobili mojim žiakom žiadne problémy. Program je nenáročný, je intuitívny. Učím žiakov byť pozornými k tomu, čo im počítač "píše", a o tom je aj práca s GeoGebrou. Deviataci, ktorí sa prvýkrát stretli s týmto programom, veľmi radi pracovali s *videosekvenciami*. Ich výkresy sú zverejnené v ich priestoroch Windows Live, ktoré uvádzam v závere.

3. Záver

V článku sme sa pokúsili poukázať na jednu z možností využitia internetu a IKT vo vyučovaní matematiky na druhom stupni ZŠ vo vybraných kapitolách geometrie. Vytvorené metodické listy, ktoré tvoria jadro práce, boli priamo na hodinách matematiky ale aj informatiky so žiakmi odskúšané.

Na portáli www.zborovna.sk zverejňujeme videosekvencie pre prácu s GeoGebrou. Tak sa tento vynikajúci softvér dostáva do povedomia širšieho okruhu učiteľov na Slovensku, o čom svedčia aj diskusné príspevky na uvedenom portáli. Podľa návodu, ktorý sme zverejnili na portáli, mnohí naši žiaci zvládli inštaláciu a prácu s GeoGebrou si obľúbili. Ich práce si všetky môžete pozrieť na http://cid-3407d0cdf9a5fe4e.skydrive.live.com/browse.aspx/.Public/GEO%20GEBRA/ZIACI%5E_2009%5E_2010

Vo výkresoch sa iste nájdú aj chyby, ale program GeoGebra sa pri výučbe jednoznačne osvedčil. Prínosom bolo, že ak žiaci pracovali vo dvojiciach, vzájomne si pomáhali, učili sa tak akceptovať názory iných. Priebežne

posielali e-mailom učiteľovi svoje výkresy. Dostávali od neho spätnú informáciu, čo majú dobre, čo treba opraviť, prípadne doplniť. Tiež v prípade neprítomnosti učiteľa boli šikovnejší žiaci prizvaní k spolupráci pri výklade učiva. Boli ochotní venovať svoj voľný čas štúdiu GeoGebry. Žiak potrebuje byť učiteľom pochopený, vnímaný ako partner, nie ako súper. Na samotných hodinách matematiky bolo takto realizované partnerské učenie.

Do budúcnosti plánujeme vytvoriť web stránku s appletmi GeoGebry pre vyučovanie geometrie na druhom stupni ZŠ, kde je vizualizácia abstraktných pojmov z didaktického hľadiska viac než vítaná. Na stránke tiež zverejníme aj odporúčania, ako sa vyvarovať základných chýb pri práci s GeoGebrou - prehliadanie informácií v čítanom texte, nesprávne určenie väzieb medzi narysovanými objektmi, zlé prípony pri ukladaní súborov. . .

Veríme, že web stránka s appletmi GeoGebry bude učiteľom slúžiť nielen ako dobrá didaktická pomôcka, ale aj ako inšpirácia k tvorbe. Aby aj oni sprístupnili vytvorené materiály na internete a tak si vzájomne pomáhali.

Literatúra

- [1] GeoGebra web stránka [on line] [cit. 2010-05-11]. Dostupné na internete: <http://www.geogebra.org/cms/sk>
- [2] GeoGebra získala Tech Award [on line] [cit. 2010-05-11]. Dostupné na internete: <http://geogebra.ssgg.sk/news.html>
- [3] Stránka Slovenského GeoGebra inštitútu, Aktualizované 21.4.2010 [cit. 2010-05-28]. Dostupné na internete: <http://geogebra.ssgg.sk/>
- [4] Nápoveda k softvéru GeoGebra, [online] [cit. 2010-05-28]. Dostupné na internete: <http://www.geogebra.org/help/docusk/0bsah.html>
- [5] GUNIŠ, J. a kol.: *Didaktika predmetu Informatika 1*. Bratislava: ŠPÚ 2009, s. 36.
- [6] Kolektív autorov: Štátny vzdelávací program. [online] Bratislava: ŠPÚ v Bratislave, 2008. [on line] [cit. 2010-05-17]. Dostupné na internete: http://www.statpedu.sk/documents//16/vzdelavacie_programy/statny_vzdelavaci_program/iscsed2_jun30.pdf
- [7] ŽIDOVÁ, D.: *Využitie internetu vo vyučovaní matematiky*. Aktualizované 6.3.2010 [cit. 2010-05-28]. Dostupné na internete: <http://www.matheasy.eu/data/info/Final.pdf>, s. 21.

- [8] JODAS, V.: *Obsahovo orientovaná didaktika*. [on line] [cit. 2010-05-20]. Dostupné na internete: <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/jodas/Texty/index.htm>
- [9] HEJNÝ, M. - MICHALCOVÁ, A.: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: MC, 2001. 188 s.
- [10] Windows Live, Erika, GeoGebra: [on line]. Dostupné na internete: <http://cid-3407d0cdf9a5fe4e.office.live.com/browse.aspx/Public/GEO%20GEBRA>

VPLYVY UČITEĽA NA POSTOJE ŽIAKOV 5. A 9. ROČNÍKA ZŠ K MATEMATIKE

Peter Vankúš^a, Emília Kubicová^b

*^a Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com*

*^b Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: emilia.kubicova@post.sk*

Abstract. This paper deals with research on pupils' attitudes towards mathematics and its teaching. We study theoretical framework of attitudes and results of our research. Mainly we focus on influences on pupils' attitudes made by the teacher and teaching - learning styles.

1. Úvod

V predkladanom článku pojednávame o teoretickej koncepcii postojov žiakov k matematike, druhu výskumov v tejto oblasti a analyzujeme výsledky dotazníkového prieskumu postojov žiakov k matematike, ktorý bol realizovaný v spolupráci s Faculty of Education, University of Cambridge v školskom roku 2006/2007. Pritom sa v článku zameriavame na položky dotazníka, ktoré zisťovali žiakmi preferované štýly učenia a vyučovania matematiky a názory žiakov na pôsobenie učiteľa matematiky. Uvedené faktory boli zvolené na základe ich vzťahu k samotným postojom žiakov k matematike a k jej vyučovaniu (Yara, 2009). Dotazník použitý v rámci prieskumu bol vytvorený počas štúdie zaoberajúcej sa štruktúrou systému postojov žiakov k matematike a k riešeniu matematických problémov (De Corte a Op't Eynde, 2002). Uvedený dotazník bol upravený za účelom zistenia jeho compatibility v rámci používania v rôznych štátoch, konkrétne Anglicku, Španielsku a Slovensku (Andrews a kol., 2007a; Andrews a kol., 2007b). Cieľom dotazníkového prieskumu realizovaného na slovenských školách bolo otestovať vytvorený nástroj a súčasne porovnať rozdiely v postojoch žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k vyučovaniu matematiky.

2. Teoretická koncepcia postojov žiakov k matematike

Pojem postoj začal dominovať najmä v americkej sociálnej psychológii, kde sa mu medzi prvými začali venovať W. J. Thomas a F. Znaniecki v diele *Polish peasant in Europa and America* (Poľský roľník v Európe a Amerike). Títo autori chápali postoj ako "procesy individuálneho vedomia, ktoré súčasne determinujú aktuálne aj potencionálne reakcie každej osoby vzhľadom k sociálnemu okoliu" (in: Janoušek, 1988). G. W. Allport (1935) vo svojej definícii postoja, ktorá sa označuje aj ako klasická, chápal postoj ako: "mentálny a nervový stav pohotovosti, organizovaný skúsenosťou, vyvíjajúci direktívny alebo dynamický vplyv na odpoveď individua voči všetkým objektom a situáciám, s ktorými je v relácii." (in: Nakonečný, 1999).

Iní autori definujú postoje ako "trvalé sústavy pozitívnych alebo negatívnych hodnotení, emocionálneho cítenia a tendencií konania pre a proti vzhľadom na spoločenské objekty" (Krech, Crutchfield, Ballachey, 1968; in: Nakonečný, 1999). Podľa Veselského sa spájajú postoje s vnútornou motiváciou. Postoj chápe ako hodnotiaci vzťah k určitým predmetom, činnostiam, myšlienkam, ľuďom, skupinám... Tento vzťah sa zakladá na istých poznatkoch, názoroch o predmete postoja a skúsenostiach s ním (Veselský, 2005).

Všeobecne môžeme konštatovať, že v literatúre sú najviac frekventované 3 typy definícií postoja (Zan a Di Martino, 2007):

1. Jednoduchá definícia postoja ako pozitívneho alebo negatívneho stupňa vplyvu spojeného s určitým predmetom (McLeod, 1992).
2. Multidimenzionálna (viaczložková) definícia uznáva 3 komponenty: emocionálne reakcie, presvedčenie viazané k predmetu a správanie sa k predmetu (Hart, 1989; Ruffell a kol., 1998).
3. Bi-dimenzionálna (dvojjložková) definícia neobsahuje explicitne správanie sa k predmetu, postoje sú chápané ako schéma presvedčení a emócií viazaných k predmetu (Daskalogianni a Simpson, 2000).

Problematika definície postojov je aktuálne súčasťou ich výskumu. Štúdie týkajúce sa postojov žiakov k matematike sa vyvíjajú od výskumov zameraných na vzťah medzi pozitívnymi postojmi k matematike a výkonom žiakov (Neale, 1969), cez štúdie zamerané na problematiku merania postojov (Kulm, 1980), meta-analýzu existujúcich výskumov (Ma a Kishor, 1997) až po štúdie, ktoré sa zaoberajú hlbšie samotnými postojmi (Ruffel a kol., 1998) a hľadaním ich "dobrej" definície (Daskalogianni a Simpson, 2000; Di Martino a Zan, 2001, 2002) resp. hľadaním sofistikovaných nástrojov na zisťovanie postojov (Hannula, 2002). (in: Polo a Zan, 2005)

3. Dotazníkový prieskum postojov žiakov 5. a 9.ročníka

Výskum prezentovaný v predkladanom článku môžeme zaradiť do poslednej kategórie štúdií, keďže sa jedná o tvorbu nástroja na zisťovanie postojov, aj keď dôležitou súčasťou tvorby takéhoto nástroja je teoretická koncepcia postojov, preto sa daný výskum týka aj tejto oblasti. V rámci dotazníka využívaného v rámci výskumu popísaného v článku bola ako teoretické východisko multidimenzionálna koncepcia postojov, pričom jednotlivé zložky danej definície sú obsiahnuté v samotnej formulácii položiek dotazníka. Viac o procese tvorby daného dotazníka nájde čitateľ v článkoch venujúcich sa vývoju tohto nástroja pod názvom Mathematics Related Beliefs Questionnaire (MRBQ) (De Corte a Op't Eynde, 2002; Andrews a kol., 2007a; Andrews a kol., 2007b).

Dotazník skúmal nasledovné oblasti:

- Postoje žiakov k matematike, k jej vyučovaniu a sebahodnotenie matematických schopností.
- Štýly učenia sa matematiky a názor žiakov na štýl vyučovania matematiky ako školského predmetu.
- Názory na vplyv učiteľa na postoje žiakov k matematike.

Vzhľadom na obmedzený rozsah článku sa budeme venovať práve dvom posledne spomínaným oblastiam: učebným štýlom žiakov a názorom žiakov k pôsobeniu učiteľa matematiky. Uvedené položky boli do dotazníka zaradené, aby sa ozrejmil vzťah medzi nimi a postojmi žiakov k matematike. Samotného dotazníkového prieskumu sa celkovo zúčastnilo 204 žiakov, z čoho 76 žiakov 5. ročníka a 128 žiakov 9. ročníka. Prieskum sa konal na základnej škole Alexandra Dubčeka na Majerníkovej ulici v Bratislave. Úvodná strana dotazníka obsahovala informácie o dotazníku a jeho cieľoch. Obsahovala tiež základné informácie o žiakovi a to pohlavie a vek. Dotazník bol zostavený z jednotlivých položiek v tvare Likertovej škály, na ktoré mali žiaci odpovedať jednou zo 6 možností - silne súhlasím (1), súhlasím (2), mierne súhlasím (3), mierne nesúhlasím (4), nesúhlasím (5), silne nesúhlasím (6). Dotazník obsahoval 60 otázok, ktoré boli koncipované tak, aby skúmali zvolené oblasti.

Výsledky dotazníkového prieskumu (priemerné hodnoty skóre žiakov v jednotlivých položkách) v posledných dvoch oblastiach, ktorým sa venujeme v článku, zobrazujú nasledovné obrázky. Pri čítaní grafov treba mať na pamäti, že nižšie hodnoty znamenajú vyššiu mieru súhlasu s danou odpoveďou.

V sekcii pasívne učenie sme vyčlenili 5 položiek dotazníka. Porovnanie priemerných hodnôt piatakov a deviatakov nám poskytuje obrázok 1.



Obrázok 1 - pasívne učenie žiakov

Položky:

1. Učiť sa matematiku je hlavne o tom mať dobrú pamäť.
2. Je stratou času, keď nás učiteľ matematiky nechá premýšľať samostatne.
3. Existuje len jeden prístup na nájdenie správneho riešenia matematického problému.
4. Dostať správnu odpoveď je dôležitejšie ako rozumieť prečo je táto odpoveď správna.
5. Z matematiky sa oddá učiť len to, čo bude na písomke.

Z grafu môžeme vyčítať, že žiaci oboch ročníkov sa prevažne prikláňajú k názoru, že v matematike nejde o pasívne prijímanie informácií. Zároveň si môžeme všimnúť, že žiaci 5. ročníka súhlasia viac s názorom, že učiť sa matematiku je hlavne o tom mať dobrú pamäť, čo môže byť späté s tým, že v úrovni ich kognitívneho vývinu sa žiaci učia ešte mechanicky. Evidentne žiaci 9. ročníka majú lepšiu predstavu o tom, že matematika má rozvíjať najmä myslenie a že je podstatné rozumieť tomu, čo sa učia.

Oproti pasívnemu učeniu sme vyčlenili kategóriu aktívne učenie, ktorej porovnanie priemerných hodnôt odpovedí žiakov 5. a 9. ročníka nám poskytuje obrázok 2.



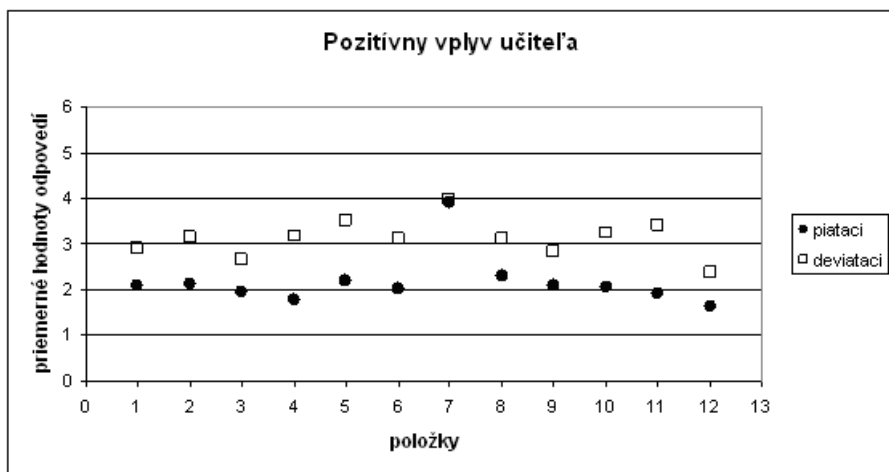
Obrázok 2 - aktívne učenie žiakov

Položky:

1. Každý človek musí tvrdo premýšľať, aby vyriešil matematický problém.
2. Mám rád, keď na matematike musím tvrdo pracovať, aby som dospel k riešeniu úlohy.
3. Ak sa dostatočne snažím, rozumiem tomu, čo sa na matematike učíme.
4. Úlohy na precvičovanie učiva sú veľmi dôležité pre vyučovanie matematiky.
5. Čas strávený snahou o pochopenie postupu riešenia je dobre využitý.
6. Diskutovať o rôznych spôsoboch riešenia matematického problému je dobrý spôsob učenia sa matematiky.
7. Myslím si, že je dôležité naučiť sa viacero spôsobov riešenia toho istého matematického problému.
8. Som rád, keď je práca v triede pre mňa výzvou, takže sa môžem naučiť niečo nové.

Obrázok 2 nám potvrdzuje príklon žiakov k aktívnemu učeniu sa matematiky, čo sa u žiakov 5. ročníka prejavuje výraznejšie ako u žiakov 9. ročníka. Deviataci prejavujú menší záujem o prácu s náročnejšími príkladmi.

V ďalšej časti sa budeme venovať vplyvu učiteľa na postoje žiakov.

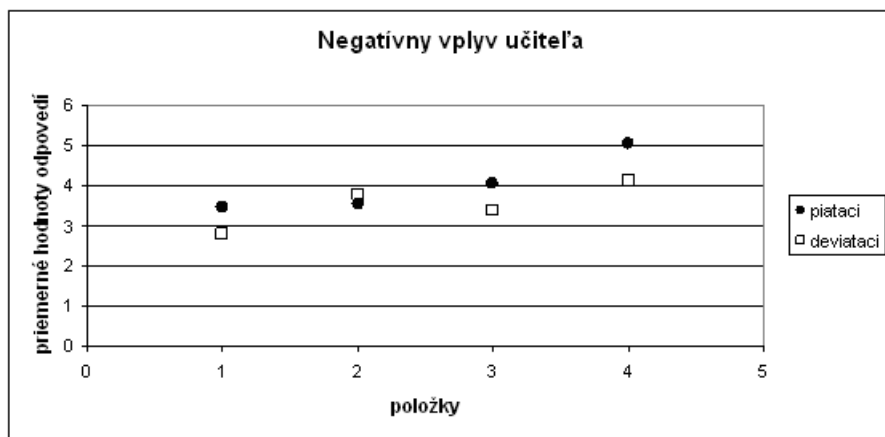


Obrázok 3 - pozitívny vplyv učiteľa na postoje žiakov

Položky:

1. Môj učiteľ si myslí, že nevádi, keď sa mýlime, pokiaľ sa zo svojich chýb učíme.
2. Môj učiteľ vysvetľuje, prečo je matematika dôležitá.
3. Môj učiteľ nám vždy ukáže ako riešiť problém krok za krokom, až potom rátame úlohy na precvičovanie.
4. Môj učiteľ sa snaží, aby sa nám učenie nových vecí páčilo.
5. Môj učiteľ chápe naše problémy a ťažkosti s matematikou
6. Môj učiteľ pozorne počúva, čo povieme.
7. Na hodinách matematiky robíme veľa skupinovej práce.
8. Môj učiteľ nám vždy dá čas na preskúmanie nového problému a vyskúšanie rôznych postupov riešenia.
9. Môj učiteľ ocení, ak sa veľmi snažíme, aj keď naše výsledky nie sú také dobré.
10. Môj učiteľ je k nám priateľský.
11. Môj učiteľ sa snaží urobiť hodiny matematiky zaujímavé.
12. Môj učiteľ chce, aby sme chápali obsah matematiky v tomto ročníku.

Pozitívny prístup učiteľa evidentne vnímajú viac piatáci ako deviatici. Piatáci majú väčší pocit, že sú k nim učitelia priateľskejší, láskavejší a že sa snažia, aby sa žiakom hodiny páčili. Deviatáci majú väčší pocit nepochopenia, čo súvisí aj s ich psychickými problémami v období pubescencie.



Obrázok 4 - negatívny vplyv učiteľa na postoje žiakov

Položky:

1. Môj učiteľ si myslí, že vie všetko najlepšie.
2. Môj učiteľ chce, aby sme si obsah matematiky v tomto ročníku len zapamätali.
3. Môj učiteľ sa nezaujíma o to, ako sa na hodine matematiky cítíme.
4. Môj učiteľ je veľmi "zažratý" do matematiky, nás si nevšíma.

Z obrázku 4 môžeme usúdiť, že žiaci nepocitujú, žeby si ich učiteľ na hodine nevšímal. Deviatáci majú väčší pocit, že sa učiteľ nezaujíma o to, ako sa na hodine matematiky cítia.

Rozdiely späť s vplyvom učiteľa, či už pozitívnym alebo negatívnym, pravdepodobne súvisia aj s iným prístupom učiteľa k piatakovi a k deviatkovi.

4. Záver

Žiaci piatego aj deviateho ročníka v rámci výskumnej vzorky si uvedomujú, že matematika je predmet, v ktorom nejde len o pasívne prijímanie informácií. Väčšiu aktivitu pri riešení problémov však prejavujú žiaci 5. ročníka, ktorí majú väčšiu potrebu nájdania viacerých spôsobov riešenia príkladov a prácu v triede považujú za väčšiu výzvu ako žiaci 9. ročníka.

Pozitívny prístup učiteľa pocitujú viac piataci ako deviatáci, čo môže súvisieť aj s tým, že deviatáci prechádzajú veľmi komplikovaným biologickým i psychickým vývinom. Voči učiteľovi sú oveľa kritickejší a majú väčší pocit nepochopenia z učiteľovej strany.

Uvedené výsledky môžeme dať do súvisu s lepšími postojmi piatakov k matematike v porovnaní s deviatakmi z výskumnej vzorky (Vankúš, 2010). Dané výsledky sú v súlade s doterajšími štúdiami v skúmanej problematike, ktoré jednak ukazujú zhoršovanie postojov žiakov k matematike v priebehu školskej dochádzky (Ma a Kishor, 1997) a tiež poukazujú na súvis medzi postojmi k matematike, učebným štýlom a vplyvom učiteľa (Yara, 2009). Výsledky uvedené v článku predstavujú výzvu na hľadanie spôsobov zlepšovania postojov žiakov, napríklad cez aktívne štýly vyučovania a primerane pozitívny prístup učiteľa matematiky.

Podakovanie

Článok vznikol v rámci grantu MŠSR KEGA č. 3/6484/08.

Literatúra

- [1] ALLPORT, G.W. (1935): *Attitudes*, In: C. Murchison (Ed), *Handbook of Social Psychology*, Worcester, Mass, Clark University Press.
- [2] ANDREWS, P. - DIEGO-MANTECÓN, J. - OP 'T EYNDE, P. - SAYERS, J. (2007a): *Evaluating the sensitivity of the refined mathematics-related beliefs questionnaire to nationality, gender and age*, In: *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Cyprus, Larnaca, s. 209-218.
- [3] ANDREWS, P. - DIEGO-MANTECÓN, J. - VANKÚŠ, P. - OP 'T EYNDE, P. - CONWAY, P. (2007b): *Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: A three-way cross-sectional pilot comparative study*, 12 Biennial Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI), Budapešť.
- [4] ANDREWS, P. - DIEGO-MANTECÓN, J. - VANKÚŠ, P. - OP 'T EYNDE, P. - CONWAY, P. (2008): *A tanuló matematikai meggyőződéseinek értékelése: Egy három országot érintő összehasonlító vizsgálat*, (Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: A three-way cross-sectional pilot comparative study) *Iskolakultúra Online*, 2008(2), s. 141-159.
- [5] DASKALOGIANNI, K. - SIMPSON, A. (2000): *Towards a definition of attitude: The relationship between the affective and the cognitive in pre-university students*, *Proceedings of PME 24*, vol.2, s. 217-224, Hiroshima.

- [6] DE CORTE, E. - OP 'T EYNDE, P. (2002): *Unraveling students' belief systems relating to mathematics learning and problem solving*, In: A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference "The Humanistic renaissance in mathematics education"*, s. 96-101, Palermo, The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- [7] DI MARTINO, P. - ZAN, R. (2001): *Attitude toward mathematics: some theoretical issues*, *Proceedings of PME 25*, Utrecht, Netherlands, vol.3, s 351-358.
- [8] DI MARTINO, P. - ZAN, R. (2002): *An attempt to describe a 'negative' attitude toward mathematics*, In: P. Di Martino (Ed.), *Proceedings of the MAVI-XI European Workshop*, s 22-29.
- [9] HANNULA, M. (2002): *Attitude toward mathematics: emotions, expectations and values*, *Educational Studies in Mathematics*, 49, s 25-46.
- [10] HART, L. (1989): *Describing the Affective Domain: Saying What We Mean*, In: McLeod & Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving*, s. 37-45, New York, Springer Verlag.
- [11] JANOŮŠEK, J. (1988): *Sociální psychologie*, Vyd. 1., Praha, Státní pedagogické nakladatelství.
- [12] KRECH, D. - CRUTCHFIELD, R. S. - BALLACHEY, E. L. (1968): *Človek v spoločnosti*, Bratislava, SAV.
- [13] KULM, G. (1980): *Research on Mathematics Attitude*, In: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*, s. 356-387, Reston, VA, NCTM.
- [14] MA X. - KISHOR N. (1997): *Assessing the Relationship Between Attitude Toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis*, *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 26-47.
- [15] MCLEOD, D. (1992): *Research on affect in mathematics education: a reconceptualization*, In: D.Grows, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, s. 575-596, New York, McMillan Publishing Company.
- [16] NAKONEČNÝ, M. (1999): *Sociální psychologie*, Praha, Academia.
- [17] NEALE, D. (1969): *The role of attitudes in learning mathematics*. *The Arithmetic teacher*, Dec. 1969, s 631-641.

- [18] PHILIPPOU, N. G. - CHRISTOU, C. (1998): *The Effects of a Preparatory Mathematics Program in Changing Prospective Teachers' Attitudes towards Mathematics*, Educational Studies in Mathematics, 35, s. 189-206.
- [19] POLO, M. - ZAN, R. (2005): *Teachers' use of the construct 'attitude'. Preliminary research findings*, In: M. Bosch (Ed.), Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics, s. 265-274.
- [20] RUFFELL, M. - MASON, J. - ALLEN, B. (1998): *Studying attitude to mathematics*, Educational Studies in Mathematics, 35, 1-18.
- [21] THOMAS W. I. - ZNANIECKI, F. (1918-1920): *The Polish Peasant in Europe and America*, Chicago, University of Chicago Press.
- [22] VANKÚŠ, P. - KUBICOVÁ, E. (2010): *Postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike*, In: Acta Mathematica, Vol. 13, UKF Nitra, Nitra.
- [23] VESELSKÝ, M. (2005): *Pedagogická psychológia 2*, 1 vyd., Bratislava, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [24] YARA, P. O. (2009): *Students Attitude Towards Mathematics and Academic Achievement in Some Selected Secondary Schools in South-western Nigeria*, In: European Journal of Scientific Research, 36, 3, s. 336-341.
- [25] ZAN, R. - DI MARTINO, P. (2007): *Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy*, The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 3, s. 157-168, The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Catholic University in Ružomberok
Faculty of Education

Teaching Mathematics II

SCIENTIFIC ISSUES

ISBN 978-80-8084-645-9

